

CAPITOLO 3

CINEMATICA DEI FLUIDI

3.1. GENERALITÀ

Prima di vedere gli effetti delle forze sul moto dei fluidi (fluidodinamica vera e propria), è opportuno considerare il moto di un elemento fluido all'interno di un campo di flusso (cinematica). Il moto di un fluido può essere studiato seguendo due differenti metodi, che tradizionalmente vengono designati come **metodo lagrangiano** e come **metodo euleriano**, anche se in effetti entrambi debbano essere attribuiti a Eulero.

Il metodo lagrangiano segue le vicende di ogni particella che si muove lungo la propria traiettoria individuandone la sua posizione iniziale e il tempo trascorso; se sono note le caratteristiche del moto, si riesce a sapere in ogni istante la posizione di ogni particella e quindi a seguire l'andamento del suo deflusso: una qualunque grandezza φ del fluido è quindi una funzione delle coordinate iniziali e del tempo trascorso $\varphi = \varphi(x_0, y_0, z_0, t)$. Questo sistema di riferimento viene usato nello studio di problemi particolari, come per esempio quello della diffusione, ma nella grande maggioranza dei casi interessa però la conoscenza, in un determinato istante, della distribuzione del vettore velocità nel campo del moto. A questa conoscenza mira il metodo euleriano, che consiste nell'individuare ogni particella fluida mediante la sua posizione in quell'istante e mediante il tempo cui ci si riferisce: una qualunque grandezza φ del fluido è quindi funzione delle coordinate istantanee e del tempo $\varphi = \varphi(x(t), y(t), z(t), t)$.

Il metodo euleriano è più usato di quello lagrangiano perché, oltre a essere teoricamente più semplice, si presta meglio allo studio della maggior parte dei problemi fluidodinamici. Nella meccanica dei fluidi, infatti, l'esigenza principale è di conoscere cosa stia succedendo in un certo punto dello spazio, senza tener conto di quale particella fluida stia occupando quel punto in quel particolare momento.

Quando un sistema continuo formato da un cubo infinitesimo di lati dx , dy e dz , di volume dV e di massa dm si muove in un campo fluido può essere sottoposto a spostamenti di corpo rigido e a deformazioni lineari e angolari (come già detto nel § 1.5).

Gli spostamenti di corpo rigido sono dati da:

- traslazione generica o spostamento lineare - non provoca variazioni né di forma né di volume né di orientazione e può essere scomposta lungo i tre assi (in fig. 3.1.a sono riportate le componenti in x e in y),
- rotazione generica o spostamento angolare - non provoca variazioni né di forma né di volume né di orientazione e può essere scomposta lungo i tre assi (in fig. 3.1.b è riportata la componente in z);

mentre le deformazioni sono date da:

- deformazione assiale generica - provoca solo variazioni di forma e generalmente anche di volume, ma non di orientazione perché i piani delle facce del cubo infinitesimo rimangono fra loro perpendicolari (in fig. 3.1.c sono riportate le deformazioni in x e in y),
- deformazione angolare generica - provoca variazioni di forma e di orientazione, perché i piani delle facce del cubo infinitesimo non rimangono fra loro perpendicolari, e in generale anche di volume (in fig. 3.1.d sono riportati gli effetti sul piano perpen-

dicolare a z).

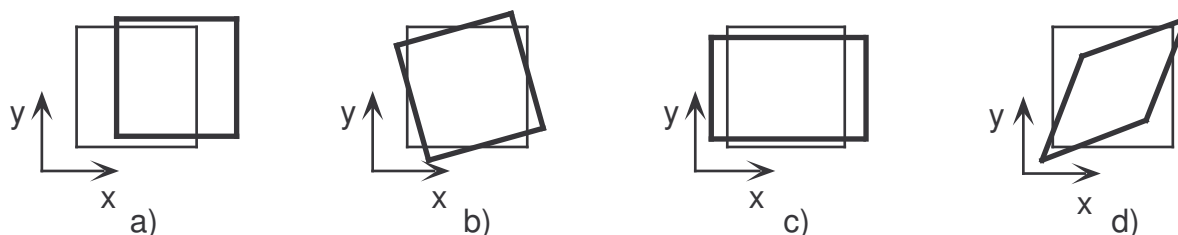


Fig. 3.1.- Moto bidimensionale sul piano (x,y) di un cubetto fluido: a) traslazione; b) rotazione; c) deformazione assiale; d) deformazione angolare.-

Nel passaggio da una configurazione all'altra il cubo elementare subisce una combinazione di traslazione, di rotazione e di deformazioni assiale e angolare; la fig. 3.1 illustra queste quattro componenti per un flusso in due dimensioni sul piano (x,y), mentre per un flusso generico in tre dimensioni è necessario aggiungere anche le componenti sui piani (y,z) e (z,x). In conclusione quindi si può affermare che il cubo elementare di fluido mantiene la sua configurazione quando è sottoposto a pura traslazione e/o rotazione e che questo non avviene quando invece è sottoposto a deformazioni; per di più solo nel caso di deformazioni si verifica l'insorgere di tensioni tangenziali perché, come si è visto nel § 1.15, esse sono proporzionali ai gradienti delle velocità in direzione perpendicolare agli strati fluidi e perché, come si vedrà nel § 3.7, combinazioni di gradienti delle velocità formano le velocità di deformazione.

3.2. LINEE DI ISOVALORE E REGIMI DI MOTO

Per rendere possibile l'osservazione visuale del moto, viene largamente usato l'artificio di introdurre nel fluido particelle eterogenee che rimangono in sospensione; nei liquidi viene usata polvere di alluminio e nei gas fumi o nebbie. Tali eterogeneità non influiscono in misura sensibile sul moto, ma servono in un certo modo a materializzare o a individuare i singoli elementi di volume del fluido. Esse possono in particolare venire fotografate o anche cinematografate.

Una fotografia con un tempo di esposizione infinitesimo dt (istantanea) dà per ogni particella un trattino di lunghezza pari allo spazio $d\vec{s} = \vec{u}.dt$ percorso nel tempo dt e diretto come la velocità $\vec{u}$: si ha così una visione contemporanea delle velocità degli elementi fluidi nelle varie parti della corrente. Il vettore velocità a un dato istante risulta quindi essere funzione dei punti dello spazio, come il vettore intensità di un campo di forza. Lo spazio occupato dalla corrente costituisce allora un campo vettoriale e le linee, che hanno in ogni punto la direzione della velocità, vengono chiamate **linee di corrente** o **linee di flusso** e assumono un significato analogo a quello delle linee di forza. Questo tipo di linea è associabile al concetto di metodo euleriano che concentra l'attenzione sul punto dello spazio indipendentemente dalla particella che vi transita.

Se si considerano le linee di flusso che passano attraverso una linea chiusa, si individua un **tubo di corrente** che può estendersi fino ai confini del campo vettoriale $\vec{u}$ oppure può chiudersi come un anello nel suo interno. Un tubo di sezione infinitesima è detto invece **filetto fluido**.

Una fotografia con un tempo di esposizione di lunga durata dà invece per ogni particella una linea continua che rappresenta la sua traiettoria durante il movimento. L'insieme delle traiettorie vengono anche chiamate **linee di percorso**. Questo tipo di linea è invece associabile al concetto di metodo lagrangiano che concentra l'attenzione sulla particella che si muove nello spazio.

Accanto a questi due tipi di linee principali è possibile definire, anche se con mag-

giore difficoltà pratica, altri due tipi di linee. Una **linea isocrona** è costituita da un certo numero di particelle adiacenti, tutte appartenenti a un fluido all'interno di un campo di flusso, che in un dato istante vengono identificate su una linea; controlli in tempi successivi mediante fotografie istantanee sulle particelle così identificate forniscono informazioni su come nell'intervallo di tempo fra due osservazioni tale linea si sia modificata. Una **linea di vena** è formata dalle particelle che passano attraverso un punto prefissato del campo fluido; dopo aver identificato le particelle che passano per questo punto, controlli in tempi successivi mediante fotografie istantanee forniscono informazioni su come nell'intervallo di tempo fra due osservazioni tale linea si sia modificata.

Si dice **non - stazionario** o **variabile** un moto le cui caratteristiche variano nel tempo e solitamente sono diverse da punto a punto del campo fluido. Una fotografia istantanea dipende dal momento in cui è stata fatta ed è differente da tutte le altre (a meno che il moto non vari ciclicamente); infatti una particella, oltre a presentare in vari punti dello spazio accelerazioni oppure decelerazioni, in un determinato punto non si comporta come tutte le altre particelle che qui transitano.

In regime non - stazionario (variabile) le linee di corrente e le linee di percorso (traiettorie) non coincidono perché, nel tempo impiegato da una particella a compiere un percorso infinitesimo, la distribuzione delle velocità può cambiare e con essa la forma delle linee di corrente. Per di più le traiettorie possono anche intersecarsi, mentre questo non può succedere mai per le linee di corrente perché esse in ogni istante e in ogni punto del campo fluido sono sempre tangenti alla direzione del flusso; in altre parole per ogni punto del campo fluido possono passare più traiettorie, perché la velocità in quel punto in istanti successivi ha valori differenti, mentre passa una e una sola linea di corrente, perché la velocità in quel punto in un dato istante ha un solo valore.

Si dice **stazionario** o **permanente** un moto le cui caratteristiche si mantengono costanti nel tempo, pur potendo essere diverse da punto a punto del campo fluido. Una fotografia istantanea risulta sempre uguale indipendentemente dal momento in cui è stata fatta; infatti una particella, pur presentando in vari punti dello spazio accelerazioni oppure decelerazioni, in un determinato punto si comporta come tutte le altre particelle che qui transitano. E' permanente ad esempio il moto in un tronco di tubo convergente, quando si mantenga costante nel tempo la quantità di fluido che attraversa la generica sezione nell'unità di tempo.

In regime stazionario (permanente) la velocità in ogni punto del campo fluido rimane costante nel tempo e di conseguenza le linee di corrente non variano da un istante all'altro; ciò implica che una particella localizzata su una data linea di corrente rimane sempre su di essa. Per di più, particelle consecutive che passano attraverso un punto fissato nello spazio stanno sulla stessa linea di corrente e rimarranno sempre su di essa. Allora le linee di percorso coincidono con le linee di corrente e non si intersecano mai fra loro; anche le linee di vena coincidono con le linee di corrente.

Si dice **uniforme** un moto in cui il vettore velocità si mantiene costante, in ogni momento, lungo ogni traiettoria. Una fotografia risulta uguale indipendentemente dal momento in cui è stata fatta e i tratti $d\vec{s} = \vec{u}.dt$ risultano uguali in ogni punto della traiettoria. Uniformi sono per esempio i moti pienamente sviluppati di un fluido in un tronco di tubo cilindrico oppure in un canale a sezione prismatica, quando il pelo libero sia parallelo alle generatrici della superficie di contorno.

3.3. PORTATA MASSICA E PORTATA VOLUMETRICA

Si consideri il filetto fluido della fig. 3.2; si chiama **portata massica** di un filetto fluido il rapporto fra la massa di fluido che ne attraversa le sezioni normali nel tempo dt e il tempo stesso dt : se con dS_n si indica la sezione infinitesima normale del filetto fluido e con ds lo spazio infinitesimo percorso dal fluido all'interno del filetto fluido nel

tempo infinitesimo dt in modo che $ds = u \cdot dt$, si ha

$$dG_m = \frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = \rho \frac{ds}{dt} dS_n = u \rho dS_n$$

dove u è la velocità del filetto fluido. Se la sezione $d\bar{S}$ presa come riferimento avesse un'orientazione qualunque, si avrebbe ovviamente

$$dG_m = \bar{u} \rho d\bar{S} \quad (3.3.1)$$

con $d\bar{S}$ presa in modo da formare un angolo acuto con $\bar{u}$.

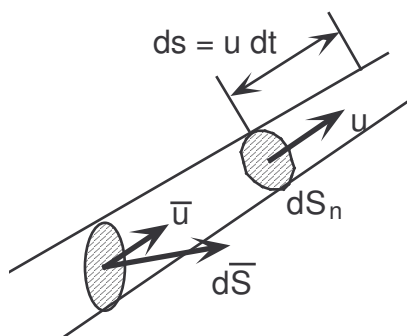


Fig. 3.2.- Portata massica di un filetto fluido.-

Per un tubo di corrente di sezione finita la portata massica è espressa nel seguente modo

$$G_m = \int_{S_n} dG_m = \int_{S_n} u \rho dS_n = \int_S \bar{u} \rho d\bar{S} .$$

La relazione precedente serve per la definizione della **velocità media** u_m , intesa come quella velocità che, immaginata costante in tutti i punti della sezione S_n , fa transitare nell'unità di tempo la portata massica G_m quando anche la massa volumica è costante su tutta la sezione

$$G_m = u_m \rho S_n \quad \rightarrow \quad u_m = \frac{G_m}{\rho S_n}$$

Se il moto è permanente, dalla definizione di tubo di corrente (il fluido non può entrare o uscire attraverso la superficie che lo delimita) e dal principio di conservazione della massa visto nel § 1.9, discende che all'interno del tubo la portata massica rimane costante. Quindi, se si considerano due sezioni di riferimento, la 1 a monte e la 2 a valle rispetto al moto del fluido, si può scrivere

$$G_{m1} = G_{m2} \quad \rightarrow \quad u_{m1} \rho_1 S_{n1} = u_{m2} \rho_2 S_{n2} . \quad (3.3.2)$$

Se il fluido è incompressibile, $\rho_1 = \rho_2$, si deduce da quest'ultima relazione che esiste una proporzionalità lineare inversa fra la velocità media e la sezione normale

$$u_{m2} = \frac{S_{n1}}{S_{n2}} u_{m1}$$

e quindi la velocità rimane costante se la sezione è costante, mentre invece aumenta

al diminuire della sezione e diminuisce al suo aumentare. Questo è quanto avviene, per esempio, in una tubazione percorsa da acqua o da olio in regime permanente.

Viene definita, invece, come **portata volumetrica** G_v di un tubo di corrente il volume di fluido transitato nell'unità di tempo attraverso la sua sezione normale. Essa può quindi essere ottenuta dividendo la portata massica per la massa volumica

$$G_v = \frac{G_m}{\rho} \quad (3.3.3)$$

e il concetto di velocità media diventa

$$u_m = \frac{G_v}{S_n} . \quad (3.3.4)$$

Da quanto finora detto si può concludere che il campo del moto può essere immaginato suddiviso in tanti tubi di flusso le cui pareti, reali o ideali, sono costituite da linee di flusso e quindi non attraversate dal fluido; lungo ogni tubo di flusso, nel moto permanente, si mantiene costante la portata massica, cioè la massa di fluido che attraversa una generica sezione normale del tubo nell'unità di tempo. Se il fluido è incompressibile si mantiene costante anche la portata volumetrica.

3.4. EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Il moto dei fluidi avviene con il rispetto di certe condizioni che sono riassunte dalle cosiddette **equazioni del moto**; la prima di queste equazioni è l'**equazione di bilancio della massa**, che viene anche chiamata equazione di conservazione della massa; in un approccio di tipo euleriano essa enuncia il fatto che: "la differenza fra la massa del fluido che, in un tempo infinitesimo, entra in un volume infinitesimo fisso nello spazio e la massa che ne esce è rappresentata dalla massa che, nello stesso tempo, si accumula nello stesso volume infinitesimo".

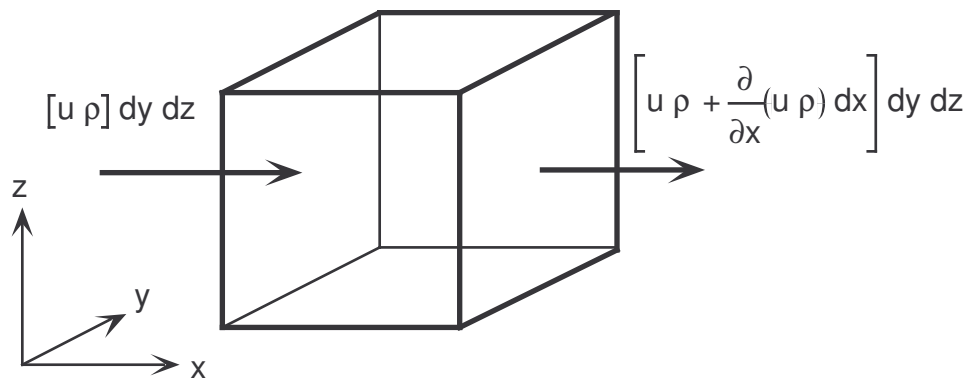


Fig. 3.3.- Portata di massa passante in direzione x.-

La portata massica definita dalla relazione (3.3.1) rappresenta la massa passante attraverso il volume infinitesimo dV fisso nello spazio nel tempo infinitesimo dt e può essere scomposta nelle tre componenti

$$dG_{mx} = u \rho \, dy \, dz \quad dG_{my} = v \rho \, dz \, dx \quad dG_{mz} = w \rho \, dx \, dy \quad (3.4.1)$$

dove $dy \cdot dz$, $dz \cdot dx$ e $dx \cdot dy$ sono le sezioni rispettivamente normali alle direzioni x , y e z . Poiché nel concetto di portata si inserisce la velocità, la portata di uno scalare (la

massa) diventa un vettore.

Facendo riferimento al cubetto infinitesimo rappresentato in fig. 3.3, dove i versi positivi degli spostamenti coincidono con quelli degli assi coordinati, si osserva che la portata massica entrante e la portata massica uscente in direzione x, in base alla relazione precedente, sono date rispettivamente da

$$dG_{mx}(\text{entrante}) = [u \rho] dy dz \quad dG_{mx}(\text{uscente}) = \left[u \rho + \frac{\partial}{\partial x}(u \rho) dx \right] dy dz$$

dove il termine $\frac{\partial}{\partial x}(u \rho) dx dy dz = \frac{\partial}{\partial x}(u \rho) dV$ rappresenta l'incremento della portata massica lungo la x, in quanto il regime del moto non è permanente, ma variabile. Poiché espressioni simili possono essere scritte nelle altre due direzioni

$$\begin{aligned} dG_{my}(\text{entrante}) &= [v \rho] dz dx & dG_{my}(\text{uscente}) &= \left[v \rho + \frac{\partial}{\partial y}(v \rho) dy \right] dz dx \\ dG_{mz}(\text{entrante}) &= [w \rho] dx dy & dG_{mz}(\text{uscente}) &= \left[w \rho + \frac{\partial}{\partial z}(w \rho) dz \right] dx dy, \end{aligned}$$

dopo le semplificazioni, risulta che la differenza fra le portate entranti e uscenti è

$$- \left[\frac{\partial}{\partial x}(u \rho) + \frac{\partial}{\partial y}(v \rho) + \frac{\partial}{\partial z}(w \rho) \right] dV = - \text{div}(\bar{u} \rho) dV$$

dove l'ultima espressione è stata ottenuta dalla definizione di divergenza del vettore $\bar{u}$ di componenti (u, v, w) lungo gli assi (x, y, z).

La **divergenza** di un vettore generico $\bar{\varphi}$ di componenti $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ lungo gli assi x, y, z delle coordinate cartesiane è definita da

$$\text{div}(\bar{\varphi}) = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}$$

mentre la **divergenza** di un vettore generico $\bar{\varphi}$ di componenti $\varphi_r, \varphi_\theta, \varphi_z$ lungo gli assi r, θ , z delle coordinate cilindriche è definita da

$$\text{div}(\bar{\varphi}) = \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} + \frac{\varphi_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\varphi_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}$$

Nel caso di coordinate cilindriche in cui l'elemento infinitesimo nel piano (r, θ) è costituito da un arco di settore circolare, le portate entranti e uscenti lungo le tre coordinate diventano

$$\begin{aligned} dG_{mr}(\text{entrante}) &= [u \rho] \left(r - \frac{dr}{2} \right) d\theta dz & dG_{mr}(\text{uscente}) &= \left[u \rho + \frac{\partial}{\partial r}(u \rho) dr \right] \left(r + \frac{dr}{2} \right) d\theta dz \\ dG_{m\theta}(\text{entrante}) &= [v \rho] dz dr & dG_{m\theta}(\text{uscente}) &= \left[v \rho + \frac{\partial}{\partial \theta}(v \rho) d\theta \right] dz dr \\ dG_{mz}(\text{entrante}) &= [w \rho] dr r d\theta & dG_{mz}(\text{uscente}) &= \left[w \rho + \frac{\partial}{\partial z}(w \rho) dz \right] dr r d\theta \end{aligned}$$

mentre la loro differenza totale diventa

$$\left[-\frac{\partial}{\partial r}(u \rho) - \frac{1}{r} u \rho - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(v \rho) - \frac{\partial}{\partial z}(w \rho) \right] dV = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(u \rho r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(v \rho) + \frac{\partial}{\partial z}(w \rho) \right] dV = - \text{div}(\bar{u} \rho) dV,$$

uguale, come nel caso delle coordinate cartesiane, alla divergenza del vettore $(\bar{u} \rho)$ moltiplicata per il volume dV e cambiata di segno.

La massa accumulatasi nel tempo infinitesimo nel volume infinitesimo fisso nello spazio è data da

$$\frac{\partial}{\partial t}(dm) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho dV) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho) dV + \rho \frac{\partial}{\partial t}(dV) = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

in quanto la derivata del volume infinitesimo dV rispetto al tempo è nulla.

Uguagliando le due quantità così trovate in definitiva si ottiene la relazione che rappresenta l'**equazione di continuità**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[\frac{\partial}{\partial x}(u \rho) + \frac{\partial}{\partial y}(v \rho) + \frac{\partial}{\partial z}(w \rho) \right] \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\bar{u} \rho) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div}(\bar{u}) + \bar{u} \text{grad}(\rho) = 0 \quad (3.4.2)$$

in cui l'ultimo passaggio è stato ottenuto sviluppando il termine della divergenza e ricorrendo alla definizione di gradiente data nel capitolo 2; in questa forma l'equazione di continuità descrive la variazione nel tempo della massa volumica in un punto fisso dello spazio dovuta alla variazione del vettore velocità di massa volumica ($\rho \bar{u}$), o anche del vettore della quantità di moto per unità di volume.

Per derivata **parziale** rispetto al tempo di una quantità **scalare**

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

s'intende la variazione che la quantità subisce nel tempo mantenendo costanti le coordinate spaziali x, y, z dell'osservatore: è come osservare la corrente di un fiume stando fermi sopra un ponte.

Per derivata **totale** rispetto al tempo di una quantità **scalare**

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

s'intende la variazione che la quantità subisce nel tempo facendo variare le coordinate spaziali x, y, z dell'osservatore con una legge qualsiasi: è come osservare la corrente di un fiume da una barca che si muova sopra di esso con un moto differente da quello della corrente. Viene quindi calcolata come la derivata di una funzione di funzione e le derivate rispetto al tempo delle coordinate sono costituite dalle componenti della velocità della barca.

Per derivata **sostanziale** (rispetto al tempo) di una quantità **scalare**

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{u} \text{grad}(\varphi)$$

s'intende la variazione che una quantità subisce nel tempo facendo variare le coordinate spaziali x, y, z dell'osservatore con la legge del moto del fluido esaminato: è come osservare la corrente di un fiume da una barca che si muova sopra di esso con un moto uguale a quello della corrente. Viene quindi calcolata come la derivata di una funzione di funzione, ma in questo caso le derivate rispetto al tempo delle coordinate sono costituite dalle componenti della velocità della corrente u, v, w . L'ultimo passaggio è stato ottenuto dalla definizione di gradiente data nel capitolo 2.

La derivata **sostanziale** (rispetto al tempo) di una quantità **vettoriale** diventa invece un vettore composto dalle derivate sostanziali (rispetto al tempo) delle componenti scalari del vettore

$$\frac{D\bar{\varphi}}{Dt} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u} \bar{\varphi})$$

Questi concetti di derivata sono molto importanti in fluidodinamica e devono essere chiari per comprendere il significato di tutte le equazioni di trasporto.

Dalla definizione di derivata sostanziale la relazione (3.4.2) può essere scritta

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \bar{u} \operatorname{grad}(\rho) = -\rho \operatorname{div}(\bar{u}) \quad \rightarrow \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\bar{u}) = 0 ; \quad (3.4.3)$$

in questa forma l'equazione di continuità descrive la variazione nel tempo della massa volumica, come sarebbe vista da un osservatore che si muovesse assieme al fluido, in conseguenza della variazione del vettore velocità.

Nel caso di fluidi che possono essere considerati come incompressibili, cioè a massa volumica costante ($\rho = \text{cost}$), l'equazione di continuità conseguentemente si riduce a

$$\operatorname{div}(\bar{u}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.4.4)$$

e la sua unità di misura [1/s] rappresenta il flusso o la portata di una quantità adimensionale.

In coordinate cilindriche la (3.4.4) diventa

$$\operatorname{div}(\bar{u}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(ur)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 . \quad (3.4.5)$$

Anche in questo caso l'unità di misura [1/s] rappresenta il flusso o la portata di una quantità adimensionale.

3.5. SPOSTAMENTI DI CORPO RIGIDO

Quando è facile sia identificare un elemento di una sostanza, per esempio una particella schematizzata come un cubetto infinitesimo, sia seguirne il percorso all'interno di un campo fluido, lo studio del suo moto è effettuato utilizzando il metodo lagrangiano di analisi. Infatti, il moto della particella può essere ottenuto mediante l'applicazione della seconda legge della dinamica nel seguente modo

$$\Sigma \bar{F} = m \bar{a} = m \frac{d\bar{u}}{dt} = m \frac{d^2 \bar{s}}{dt^2} \quad (3.5.1)$$

dove $\Sigma \bar{F}$ è la somma di tutte le forze agenti sul sistema di massa m , $\bar{a}$ e $\bar{u}$ sono rispettivamente l'accelerazione e la velocità del centro di gravità del sistema e $\bar{s}$ è il vettore che identifica la posizione del centro di gravità del sistema rispetto ad un sistema di coordinate assolute di riferimento (vedi fig. 3.4).

Se si considera però che un fluido è composto da una quantità innumerevole di particelle, la conoscenza separata del loro moto, anche se teoricamente possibile, diventa praticamente un problema irrisolvibile. Si deve allora seguire un'altra strada che consenta di trovare le caratteristiche del flusso in un dato punto come funzione del tempo; questo metodo chiamato euleriano descrive le proprietà fisiche del flusso in funzione del tempo e delle coordinate spaziali assumendo il fluido come un mezzo continuo.

3.5.1. TRASLAZIONE

Si consideri una particella in moto in un campo fluido. Al tempo t essa si trova nel punto P identificato dal vettore $\bar{s}$ e, poiché si è mossa, al tempo $t + dt$ si trova nel nuovo punto P' identificato dal vettore $\bar{s} + d\bar{s}$; la situazione è riportata in fig. 3.4, dove la traslazione infinitesima è data dal vettore $d\bar{s}$

$$d\bar{s} = d\xi \bar{i} + d\eta \bar{j} + d\zeta \bar{k} ,$$

che rappresenta la somma vettoriale delle traslazioni infinitesime $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ rispettivamente lungo i tre assi coordinati x , y , z .

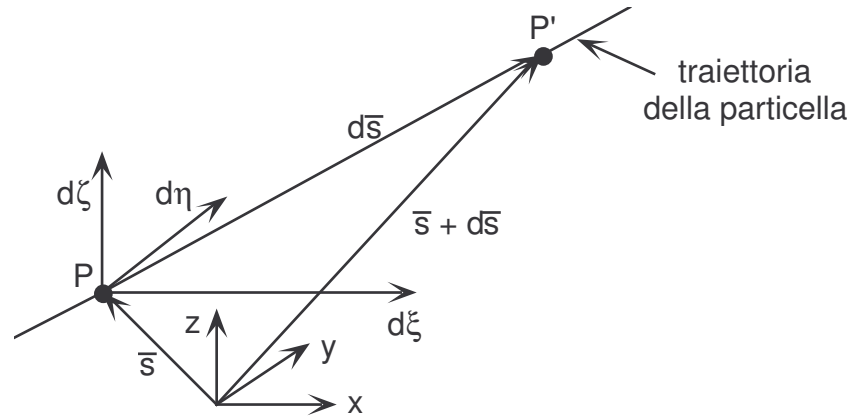


Fig. 3.4.- Traiettoria di una particella all'interno di un campo fluido.-

Per definizione, le componenti della velocità assunte dalla particella nel punto P sono

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (3.5.1.1)$$

e il vettore della velocità diventa

$$\bar{u} = u \bar{i} + v \bar{j} + w \bar{k} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \bar{i} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \bar{j} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \bar{k} .$$

3.5.2. ROTAZIONE

La rotazione infinitesima di una particella che si muove all'interno di un campo fluido è definita da un vettore $d\bar{\alpha}$

$$d\bar{\alpha} = d\alpha_x \bar{i} + d\alpha_y \bar{j} + d\alpha_z \bar{k}$$

che rappresenta la somma vettoriale delle rotazioni infinitesime $d\alpha_x$, $d\alpha_y$, $d\alpha_z$ rispettivamente attorno ai tre assi coordinati x , y , z . Per ottenere la legge di una singola rotazione, per esempio quella attorno all'asse z , si consideri il comportamento sul piano (x,y) del cubo infinitesimo rappresentato in fig. 3.5. Nella trattazione seguente si farà riferimento al caso in cui il vettore degli spostamenti $d\bar{s} = (d\xi, d\eta, d\zeta)$ dei punti del corpo, che individuano la rotazione, siano infinitesimi e funzioni regolari del posto e ad analoga condizione obbediscano le derivate degli spostamenti rispetto alle coordinate che individuano il punto.

I segmenti AA e BB, orientati lungo il verso positivo delle coordinate e fra loro perpendicolari, ruotano attorno all'asse z rispettivamente di un angolo infinitesimo $d\alpha_{zx}$ e di un angolo infinitesimo $d\alpha_{zy}$ e, poiché il cubetto fluido non subisce deformazioni, i due angoli devono essere fra loro uguali; confondendo, per valori infinitesimi, l'angolo in radianti con il suo seno, gli angoli di rotazione diventano

$$d\alpha_{zx} \cong \sin(d\alpha_{zx}) = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad d\alpha_{zy} \cong \sin(d\alpha_{zy}) = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

dove la quantità $+\partial\eta/\partial x \cdot dx$ rappresenta la differenza dello spostamento lungo la y dei punti estremi del segmento AA di lunghezza dx (il segno positivo indica il fatto che il segmento orientato AA dopo la rotazione è diretto nel verso positivo delle y) e la quantità $-\partial\xi/\partial y \cdot dy$ rappresenta la differenza dello spostamento lungo la x dei punti estremi del segmento BB di lunghezza dy (il segno negativo indica il fatto che il segmento orientato BB dopo la rotazione è diretto nel verso negativo delle x).

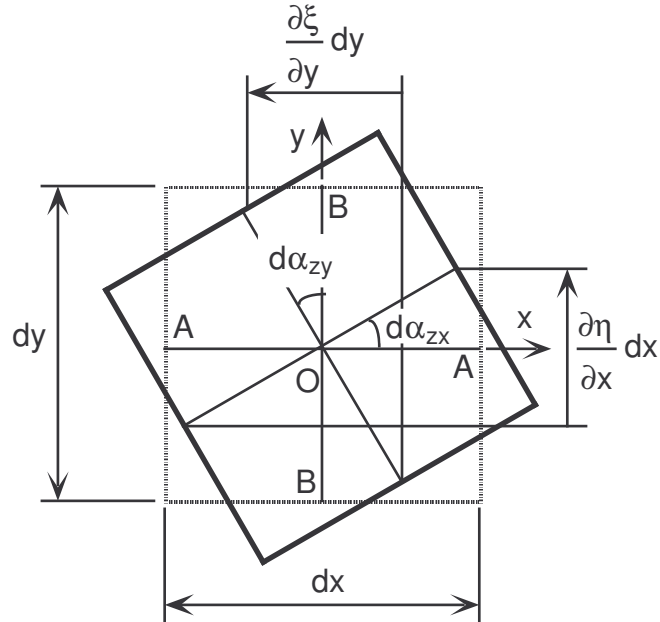


Fig. 3.5.- Rotazione di una particella all'interno di un campo fluido.-

Per definizione, però, soprattutto in vista degli sviluppi futuri legati alla deformazione angolare (vedi § 3.6.2), alle velocità di deformazione (vedi § 3.7) e alla vorticità (vedi § 3.8), la rotazione infinitesima del cubo elementare attorno all'asse z viene presa come semisomma delle due rotazioni infinitesime dei segmenti orientati AA e BB e quindi diventa

$$d\alpha_z = \frac{1}{2}(d\alpha_{zx} + d\alpha_{zy}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right);$$

ripetendo la procedura anche per gli altri due piani (y,z) e (z,x) alla fine si ottiene: per le componenti del vettore della rotazione infinitesima

$$d\alpha_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right) \quad d\alpha_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) \quad d\alpha_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right)$$

e per il vettore della rotazione infinitesima

$$d\vec{\alpha} = d\alpha_x \vec{i} + d\alpha_y \vec{j} + d\alpha_z \vec{k} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\vec{k}\right].$$

Considerando che le derivate degli spostamenti rispetto al tempo sono per definizione le velocità assiali (3.5.1.1), la velocità angolare con cui il cubetto ruota attorno all'asse z passante per il punto O è data da

$$\omega_z = \frac{\partial}{\partial t}(d\alpha_z) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right);$$

ripetendo la procedura anche per le altre due direzioni alla fine si ottiene per le componenti delle velocità di rotazione

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.5.2.1)$$

e per il vettore della velocità di rotazione (velocità angolare)

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \bar{k} \right]. \quad (3.5.2.2)$$

In coordinate cilindriche le componenti della velocità di rotazione (3.5.2.1) diventano

$$\omega_r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \omega_\vartheta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad \omega_z = \frac{1}{2} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r v)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) \quad (3.5.2.3)$$

dove u, v, w sono le componenti della velocità rispettivamente lungo r, ϑ , z.

3.6. DEFORMAZIONI

Si è già detto nel § 1.5.1 che nella meccanica dei corpi solidi si indica con il termine generico di **deformazione** il mutamento di configurazione geometrica che si verifica in un corpo per effetto di una causa qualunque (applicazione di forze, variazione di temperatura, ecc.). Lo stato di deformazione dipende, ovviamente, dalle cause fisiche che lo hanno prodotto e non può essere determinato se non tenendo conto di tale dipendenza. Vi sono tuttavia leggi puramente geometriche, indipendenti dalle cause fisiche della deformazione, alle quali la deformazione stessa deve sottostare quando si tratti di una variazione di configurazione tale da conservare la continuità del corpo (cioè quando non si verificano lacerazioni o compenetrazioni di materia).

La ricerca di tali leggi costituisce la premessa indispensabile per lo studio della deformazione di un corpo, di qualunque origine essa sia. Anche nella trattazione seguente si farà riferimento al caso in cui il vettore degli spostamenti $d\bar{s} = (d\xi, d\eta, d\zeta)$ dei punti del corpo, che individuano la variazione di configurazione, siano infinitesimi e funzioni regolari del posto e ad analoga condizione obbediscano le derivate degli spostamenti rispetto alle coordinate che individuano il punto.

Assunta una terna di assi cartesiani ortogonali di riferimento (x, y, z), si dimostra che lo stato di deformazione, nell'intorno di un punto del corpo considerato, è pienamente definito quando siano noti in tale intorno l'allungamento unitario nelle direzioni dei tre assi e le variazioni dei tre angoli, inizialmente retti, che gli assi formano fra loro a due a due: in totale sei parametri, funzioni del posto. Tali parametri definiscono lo stato di deformazione nel senso che da essi si può ricavare, nell'intorno del punto considerato, l'allungamento unitario in qualunque direzione o la variazione dell'angolo formato da due rette qualsiasi.

Si è però già detto che le tre componenti del vettore spostamento sono funzioni del posto e di conseguenza sufficienti a descrivere le variazioni di configurazione geometrica; è possibile quindi far discendere da queste ultime i parametri della deformazione.

Si consideri a questo proposito un cubetto infinitesimo, di dimensioni dx.dy.dz, sottoposto ad un generico stato di deformazione e si vedano le modifiche della sua

forma geometrica per effetto dell'applicazione di ogni singolo spostamento. In condizioni di linearità la modifica globale del cubetto è data dalla somma delle singole variazioni (sovrapposizione degli effetti).

3.6.1. DEFORMAZIONI ASSIALI

Nella fig. 3.6 è riportato sul piano (x,y) lo stato di deformazione del cubetto elementare dovuto ad uno spostamento lungo l'asse x; da essa si vede che alla faccia di destra deve essere applicato uno spostamento pari all'incremento subito lungo la coordinata x.

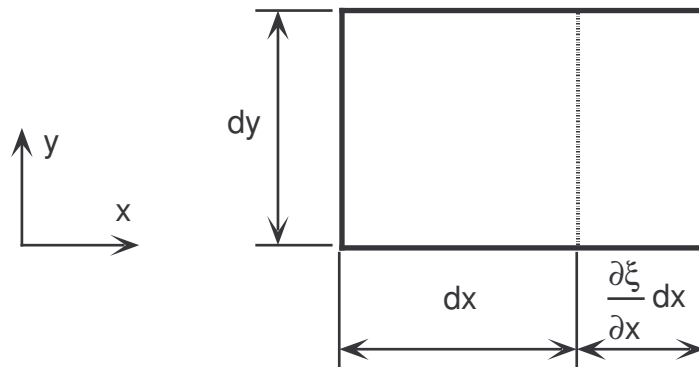


Fig. 3.6.- Deformazione assiale lungo l'asse x.-

La deformazione assiale lungo x, definita come rapporto fra la variazione di lunghezza del segmento dx nella direzione x e la sua lunghezza iniziale, vale allora

$$\epsilon_{xx} = \frac{\left(dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \right) - (dx)}{dx} = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} ;$$

ripetendo la procedura anche per le altre due direzioni y e z alla fine si ottiene

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} . \quad (3.6.1.1)$$

Il doppio pedice assegnato al simbolo delle deformazioni serve per la futura trattazione tensoriale; come per le tensioni, il primo pedice rappresenta la direzione normale al piano su cui la deformazione si trova mentre il secondo pedice rappresenta la direzione lungo la quale la deformazione agisce.

In coordinate cilindriche le deformazioni assiali (3.6.1.1) diventano

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial \xi}{\partial r} \quad \epsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{\xi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

dove $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ sono le componenti dello spostamento $d\vec{s}$ rispettivamente lungo r, ϑ , z.

Se le tre deformazioni assiali vengono applicate contemporaneamente, il cubetto infinitesimo subisce la variazione di volume seguente

$$e = \frac{d(dV)}{dV} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \text{div}(\vec{s}) . \quad (3.6.1.2)$$

Per un fluido incompressibile dalla relazione (3.6.1.2) si deduce che la divergenza

del vettore spostamento diventa nulla, poiché per definizione il volume occupato dal fluido rimane costante nel tempo.

In coordinate cilindriche la variazione di volume (3.6.1.2) diventa

$$e = \frac{d(dV)}{dV} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\xi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \text{div}(\vec{s})$$

dove $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ sono le componenti dello spostamento $d\vec{s}$ rispettivamente lungo r , ϑ , z .

3.6.2. DEFORMAZIONI ANGOLARI

Nella fig. 3.7 viene riportato sul piano (x,y) lo stato di deformazione del cubetto elementare conseguente all'effetto combinato di uno spostamento lungo x e di uno lungo y. In analogia a quanto visto nella rotazione, anche la deformazione angolare sul piano (x,y) viene definita come la semisomma degli spostamenti angolari che le facce $dz \cdot dx$ e $dy \cdot dz$ subiscono durante la deformazione

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (d\alpha_{zx} + d\alpha_{zy})$$

dove $d\alpha_{zx}$ è l'angolo di rotazione della faccia $dz \cdot dx$ e $d\alpha_{zy}$ è l'angolo di rotazione della faccia $dy \cdot dz$ (vedi fig. 3.7).

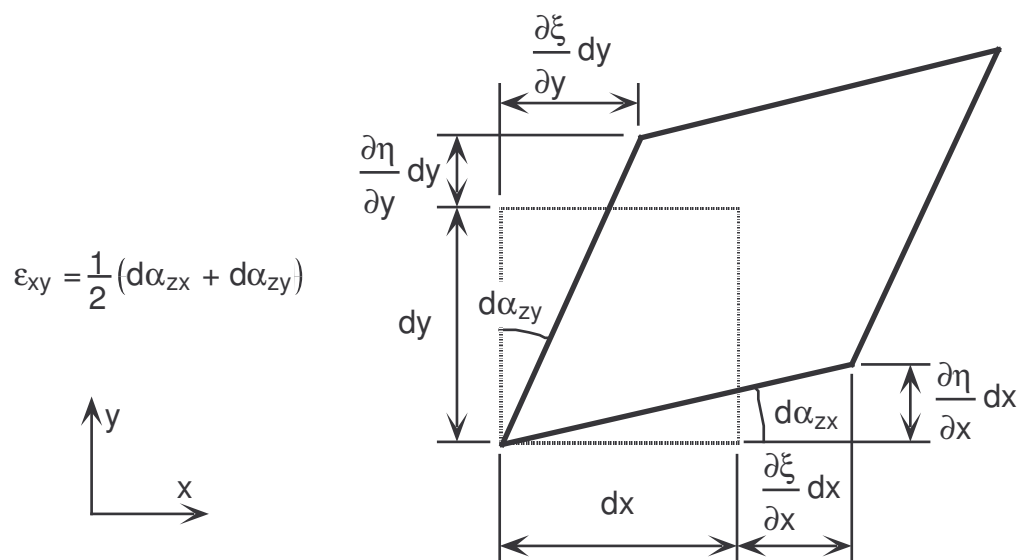


Fig. 3.7.- Deformazione angolare sul piano (x,y).-

Confondendo per piccole deformazioni l'angolo espresso in radianti con la tangente e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore (cioè le variazioni della lunghezza dei lati rispetto alla loro lunghezza iniziale), gli angoli diventano

$$d\alpha_{zx} \cong \text{tg}(d\alpha_{zx}) = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad d\alpha_{zy} \cong \text{tg}(d\alpha_{zy}) = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

dove la quantità $+\partial\eta/\partial x \cdot dx$ rappresenta la variazione dello spostamento lungo la y dei punti estremi del segmento di lunghezza dx (il segno positivo indica che il segmento orientato dx dopo la deformazione è diretto nel verso positivo delle y) e la quantità $+\partial\xi/\partial y \cdot dy$ rappresenta la variazione dello spostamento lungo la x dei punti

estremi del segmento di lunghezza dy (il segno positivo indica che pure il segmento orientato dy dopo la deformazione è diretto nel verso positivo delle x).

La deformazione diventa allora

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (d\alpha_{zx} + d\alpha_{zy}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right);$$

ripetendo la procedura anche per gli due piani (y,z) e (z,x) alla fine si ottiene

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right). \quad (3.6.2.1)$$

Anche in questo caso il primo pedice rappresenta la direzione normale al piano su cui la deformazione si trova mentre il secondo pedice rappresenta la direzione lungo la quale la deformazione agisce.

In coordinate cilindriche le deformazioni angolari (3.6.2.1) diventano

$$\varepsilon_{r\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} - \frac{\eta}{r} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \quad \varepsilon_{\vartheta z} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \quad \varepsilon_{zr} = \frac{\partial \zeta}{\partial r} \quad (3.6.2.2)$$

dove $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ sono le componenti dello spostamento $d\bar{s}$ rispettivamente lungo r , ϑ , z .

A questo punto è opportuno evidenziare alcune conseguenze dovute alle definizioni assunte per la rotazione e per la deformazione angolare. Nel caso dello spostamento di corpo rigido, costituito dalla rotazione attorno all'asse z , le facce del cubo infinitesimo devono ruotare solidalmente nel verso positivo antiorario; di conseguenza dopo la rotazione assumono proiezioni uguali in valore assoluto ma contrarie in segno, la faccia $dz.dx$ positiva rispetto all'asse y e la faccia $dy.dz$ negativa rispetto all'asse x . Nel caso della deformazione angolare sul piano (x,y) le facce $dz.dx$ e $dy.dz$ del cubo infinitesimo non sono solidali ma devono entrambe creare un angolo positivo di deformazione; di conseguenza dopo la deformazione assumono proiezioni di segno uguale rispetto all'asse x e all'asse y .

In base a quanto detto si constata che la deformazione angolare sul piano (x,y) , in cui le facce adiacenti del cubo infinitesimo ruotano di quantità in valore assoluto uguale ma di segno opposto, corrisponde a una rotazione di corpo rigido attorno all'asse z ; la rotazione è quindi una deformazione angolare limite.

3.7. VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE

Si definisce come velocità di deformazione la derivata rispetto al tempo delle deformazioni; poiché le derivate rispetto al tempo degli spostamenti sono per definizione le velocità (3.5.1.1), scambiando l'ordine delle derivate miste, si ottiene

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

e quindi per tutte le velocità di deformazione, assiali e angolari, si ha

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \dot{\varepsilon}_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \dot{\varepsilon}_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \dot{\varepsilon}_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \dot{\varepsilon}_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \dot{\varepsilon}_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Da come sono state ricavate le deformazioni angolari e le rispettive velocità di deformazione risulta chiaro che

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \dot{\epsilon}_{yx} \quad \dot{\epsilon}_{yz} = \dot{\epsilon}_{zy} \quad \dot{\epsilon}_{zx} = \dot{\epsilon}_{xz} ;$$

è allora possibile costruire un tensore delle velocità di deformazione che ha la caratteristica di essere simmetrico

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{bmatrix} . \quad (3.7.1)$$

Con notazione di tipo tensoriale la relazione (3.7.1) può essere scritta

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.7.2)$$

La velocità di deformazione del volume di un cubetto infinitesimo, in base alla (3.6.1.2) diventa

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div}(\bar{u}) . \quad (3.7.3)$$

Dalla relazione (3.4.4) si deduce ovviamente che per un fluido incompressibile la velocità di deformazione del volume è nulla.

Bisogna anche ricordare, senza dimostrarlo perché la dimostrazione esula dai compiti del corso, che in ogni punto di un corpo deformabile esistono tre direzioni fra loro ortogonali lungo le quali solo le deformazioni assiali sono differenti da zero mentre quelle angolari sono nulle. Queste direzioni privilegiate prendono il nome di **direzioni principali** e le deformazioni assiali che ad esse si riferiscono sono chiamate **deformazioni principali**; conseguentemente lungo le direzioni principali si trovano anche le **velocità di deformazione principali**.

3.8. VORTICITÀ

Il vettore $\bar{\omega}$, che è stato definito nel § 3.5.2 come la velocità di rotazione del cubo infinitesimo di fluido in movimento all'interno di un campo fluido e che possiede in coordinate cartesiane le componenti (3.5.2.1) e in coordinate cilindriche le componenti (3.5.2.3), viene anche conosciuto con il nome di **vorticità**; dalla definizione di rotore di un campo vettoriale, in questo caso la velocità di componenti (u, v, w), per il vettore $\bar{\omega}$ si ottiene, sia in coordinate cartesiane sia in coordinate cilindriche, la equazione seguente

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(\bar{u}) . \quad (3.8.1)$$

Il **rotore** di un vettore generico $\bar{\varphi}$ di componenti $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ lungo gli assi x, y, z è un vettore $\bar{\psi}$ di componenti

$$\psi_x = \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial z}, \quad \psi_y = \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial x}, \quad \psi_z = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial y}$$

lungo gli assi x, y, z e il **rotore** di un vettore generico $\vec{\varphi}$ di componenti $\varphi_r, \varphi_\vartheta, \varphi_z$ lungo gli assi r, ϑ , z è un vettore $\vec{\psi}$ di componenti

$$\psi_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \varphi_\vartheta}{\partial z}, \quad \psi_\vartheta = \frac{\partial \varphi_r}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial r}, \quad \psi_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \varphi_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial \vartheta};$$

lungo gli assi r, ϑ , z; entrambi si scrivono

$$\vec{\psi} = \text{rot}(\vec{\varphi}).$$

La vorticità è quindi la misura della velocità di rotazione di un elemento fluido che si muove all'interno di un campo fluido ed è un vettore di componenti

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (3.8.2)$$

In coordinate cilindriche le componenti del vettore vorticità valgono

$$\omega_r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \omega_\vartheta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r v)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right]. \quad (3.8.3)$$

Vengono detti **irrotazionali** quei moti in cui il vettore vorticità è identicamente nullo ($\vec{\omega} = 0$), mentre invece **rotazionali** quei moti in cui il vettore vorticità è differente da zero ($\vec{\omega} \neq 0$). Poiché la vorticità dipende dalle velocità di deformazione delle facce del cubo elementare e poiché le tensioni tangenziali dipendono, tramite la viscosità, dalle deformazioni angolari (vedi § 5.4), lo sviluppo della rotazione in una particella di fluido che inizialmente ne era priva richiede l'azione di una forza tangenziale di tipo viscoso e non l'azione di una forza di massa o di una forza normale di pressione. La condizione di moto irrotazionale può quindi essere valida solo per quelle regioni del fluido in cui le forze viscosi siano trascurabili. Quindi un moto irrotazionale è tipico di un fluido non viscoso e un moto rotazionale è tipico di un fluido viscoso.

Mediante la (3.8.2) le condizioni di **irrotazionalità** riferite al campo di velocità possono essere espresse nel modo seguente

$$\begin{aligned} \omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

Le condizioni di irrotazionalità riferite al campo di velocità in coordinate cilindriche con la (3.8.3) diventano

$$\begin{aligned} \omega_r = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \quad \omega_\vartheta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0 \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r v)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right] = 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial(r v)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \vartheta} = 0. \end{aligned} \quad (3.8.5)$$

In analogia a quanto visto nel § 3.2 a proposito delle linee di corrente, si definiscono come **linee vorticosi** quelle linee la cui tangente ha in ogni punto la direzione del vettore $\vec{\omega}$. Così pure, se si considerano le linee vorticosi che passano attraverso una linea chiusa, si individua un **tubo vorticoso** che può estendersi fino ai confini

del campo vettoriale $\vec{\omega}$ oppure può chiudersi come un anello nel suo interno. Un tubo di sezione infinitesima è detto invece **filetto vorticoso** (fig. 3.8).

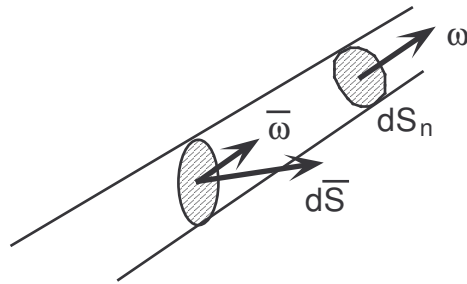


Fig. 3.8.- Filetto vorticoso.-