

CAPITOLO 4

DINAMICA DEI FLUIDI NON VISCOSI

4.0.- RICHIAMI TEORICI

4.1.- EQUAZIONE DI EULERO

4.2.- EQUAZIONE DI BERNOULLI

4.3.- APPLICAZIONI DELL'EQUAZIONE DI BERNOULLI

4.4.- LIMITI DELL'EQUAZIONE DI BERNOULLI

4.0.- RICHIAMI TEORICI

Equazione di Eulero

L'equazione di Eulero è data dalla relazione

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\vec{u} \rho \vec{u}) = -\text{grad}(p) + \rho \vec{F}_m, \quad (4.1)$$

dove $\vec{F}_m$ è la forza per unità di massa applicata dall'esterno, e in coordinate cartesiane si sviluppa nel modo seguente

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \left[\frac{\partial}{\partial x}(u \rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(v \rho u) + \frac{\partial}{\partial z}(w \rho u) \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho F_{mx} \quad (4.1.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \left[\frac{\partial}{\partial x}(u \rho v) + \frac{\partial}{\partial y}(v \rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(w \rho v) \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho F_{my} \quad (4.1.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \left[\frac{\partial}{\partial x}(u \rho w) + \frac{\partial}{\partial y}(v \rho w) + \frac{\partial}{\partial z}(w \rho w) \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho F_{mz}. \quad (4.1.c)$$

L'equazione (4.1) può anche essere scritta nel modo seguente

$$\rho \vec{a} = \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\vec{u} \vec{u}) = -\text{grad}(p) + \rho \vec{F}_m; \quad (4.2)$$

in coordinate cartesiane si sviluppa nel modo seguente

$$\rho a_x = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho F_{mx} \quad (4.2.a)$$

$$\rho a_y = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho F_{my} \quad (4.2.b)$$

$$\rho a_z = \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho F_{mz} \quad (4.2.c)$$

mentre in coordinate cilindriche si sviluppa nel modo seguente

$$\rho a_r = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho F_{mr} \quad (4.2.d)$$

$$\rho a_{\vartheta} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u v}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \rho F_{m\vartheta} \quad (4.2.e)$$

$$\rho a_z = \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho F_{mz}. \quad (4.2.f)$$

Lungo una linea di corrente e in direzione ad essa normale l'equazione (4.2) diventa

$$\rho \frac{\partial u_s}{\partial t} + \rho u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \frac{\partial z}{\partial s} \quad (4.3.a)$$

$$\rho \frac{\partial u_n}{\partial t} + \rho u_n \frac{\partial u_n}{\partial n} = -\frac{\partial p}{\partial n} - \rho g \frac{\partial z}{\partial n} \quad (4.3.b)$$

dove $\vec{F}_m = (0, 0, -g)$ e dove $\partial z / \partial s = \cos(\alpha_z)$ e $\partial z / \partial n = \sin(\alpha_z)$ con α_z angolo fra s e z . Se il moto è stazionario ($\partial u_s / \partial t = \partial u_n / \partial n = 0$ e $u_s = u$) si ha

$$\rho \frac{\partial u_n}{\partial t} = -\frac{u^2}{R}$$

dove R è il raggio di curvatura della linea di corrente e, se si trascura l'effetto della gravità ($g = 0$), la (4.3.a) e la (4.3.b) diventano rispettivamente

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} \quad (4.3.c)$$

$$-\rho \frac{u^2}{R} = -\frac{\partial p}{\partial n} \quad (4.3.d)$$

Equazione di Bernoulli

Integrando l'equazione (4.3.a) fra due punti generici (1) e (2) di una linea di corrente si ottiene

$$\frac{1}{2} u_2^2 - \frac{1}{2} u_1^2 + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g z_2 - g z_1 = 0 \quad (4.4)$$

Se il fluido è incompressibile ($\rho = \text{cost}$), la (4.4) diventa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 &= \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 & \left[\frac{J}{kg} = \frac{m^2}{s^2} \right] \\ \frac{1}{2} \frac{u_1^2}{g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 &= \frac{1}{2} \frac{u_2^2}{g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 & \left[m = \frac{J}{N} \right] ; \\ \frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 + \rho g z_1 &= \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 + \rho g z_2 & [Pa] \end{aligned} \quad (4.5)$$

se il fluido subisce una trasformazione isoterma, la (4.4) diventa

$$\frac{1}{2} u_1^2 + R T \ln(p_1) + g z_1 = \frac{1}{2} u_2^2 + R T \ln(p_2) + g z_2 \quad (4.6)$$

e infine, se il fluido subisce una trasformazione adiabatica, la (4.4) diventa

$$\frac{1}{2} u_1^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1} p_1^{(\gamma-1)/\gamma} + g z_1 = \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1} p_2^{(\gamma-1)/\gamma} + g z_2 \quad (4.7)$$

Velocità di efflusso - Teorema di Torricelli

La velocità di uscita da un recipiente è data da

$$u = \sqrt{2 g \Delta z} \quad (4.8)$$

dove Δz è l'altezza del pelo libero (battente).

Misura della portata - Tubo di Venturi

La velocità u_2 di un fluido di massa volumica ρ nella sezione ristretta S_2 di un venturimetro, inserito in una tubazione di sezione S_1 e collegato ad un manometro differenziale con fluido manometrico di massa volumica ρ_M , è data da

$$u_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)S_1^2}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}} = \sqrt{\frac{2(\rho_M - \rho)g \Delta z S_1^2}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}} \quad (4.9)$$

dove Δz è la lettura del manometro differenziale; la portata è invece data da

$$G_m = \sqrt{\frac{2\rho(p_1 - p_2)S_1^2 S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}} = \sqrt{\frac{2\rho(\rho_M - \rho)g \Delta z S_1^2 S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}} \quad (4.10)$$

Misura della pressione - Tubo di Pitot

La pressione di ristagno p_0 , cioè la pressione letta su un foro praticato nella parte anteriore di un tubicino e-
sposto alla corrente fluida, è data da

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho u^2 = p + p_d \quad (4.11)$$

dove p e p_d sono le pressioni statica e dinamica del fluido.

Misura della velocità - Tubo di Prandtl

La velocità u di un fluido di massa volumica ρ , che investe un tubo di Prandtl collegato ad un manometro differenziale con fluido manometrico di massa volumica ρ_M , è data da

$$u = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_0 - p)} = \sqrt{2 \frac{\rho_M - \rho}{\rho} g \Delta z} \quad (4.12)$$

dove p e p_0 sono le pressioni statica e di ristagno del fluido e dove Δz è la lettura del manometro differenziale.

Lavoro e potenza

Il lavoro effettuato da/su un fluido a pressione p e a volume V costante è dato da

$$L = p V, \quad (4.13)$$

mentre la potenza, usando la (3.3), nelle stesse condizioni è data da

$$P = \frac{L}{t} = \frac{p V}{t} = p G_v = \frac{p}{\rho} G_m. \quad (4.14)$$

4.1.- EQUAZIONE DI EULERO

Esercizio 4.1.1

All'interno dell'intercapedine fra due lastre parallele, in cui scorre acqua con moto stazionario ($\partial u/\partial t = 0$) e a falde parallele ($v = w = 0$), vige un gradiente di pressione $dp/dx = -1000$ Pa/m. Il fluido è considerato ideale e non è soggetto a forze di massa. Calcolare l'accelerazione a_x subita dall'acqua.

Dall'equazione di Eulero (4.2.a) si ha

$$\rho a_x = -\frac{dp}{dx} \quad \rightarrow \quad a_x = -\frac{dp}{\rho dx} = -\frac{-1000}{1000} = 1 \frac{m}{s^2}.$$

Dall'equazione di Eulero (4.2.a) si ha anche

$$\rho a_x = \rho u \frac{du}{dx} \quad \rightarrow \quad a_x = u \frac{du}{dx}$$

e quindi l'accelerazione è di tipo convettivo (cioè spaziale e non temporale). Il moto non è uniforme e, dato che il fluido è incompressibile, il tubo deve diminuire di diametro per soddisfare la legge di conservazione della massa (3.9).

Esercizio 4.1.2

Un campo di velocità bidimensionale (x, z) stazionario ($\partial u/\partial t = \partial w/\partial t = 0$), relativo ad un fluido ideale, è dato dalla legge

$$\vec{u} = 3x \vec{i}.$$

Calcolare: a) la legge della componente w della velocità in z e l'accelerazione di una particella che si trova nel punto ($x = 2$ m, $z = 1$ m); b) il gradiente della pressione nello stesso punto nel caso in cui non si consideri l'effetto della gravità

$$\vec{g} = 0$$

e nel caso in cui si consideri l'effetto della gravità

$$\vec{g} = -g \vec{k}.$$

a) Poiché non esiste movimento in z , il campo fluido è monodimensionale in x con una legge della velocità in z identicamente nulla $w \equiv 0$. In questo caso dall'equazione di Eulero (4.2.a) si ha l'accelerazione in direzione x nel punto dato ($x = 2$ m, $z = 1$ m)

$$a_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = 3x \times 3 + 0 + 0 \times 0 = 3 \times 2 \times 3 = 18 \frac{m}{s^2}$$

dove i gradienti della velocità sono dati da

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3 \frac{1}{s} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

b) Se non viene preso in considerazione il campo gravitazionale, il solo gradiente di pressione lungo la x viene determinato dall'equazione di Eulero (4.2.a)

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x = -1000 \times 18 = -18000 \frac{Pa}{m};$$

se invece viene preso in considerazione anche il campo gravitazionale, dall'equazione di Eulero (4.2.c) si può determinare il gradiente di pressione lungo la z

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -1000 \times 9.80665 = -9810 \frac{Pa}{m}.$$

Da notare che il gradiente in z corrisponde al valore statico della legge di Stevin (2.5.c) per un fluido incompressibile.

Esercizio 4.1.3

Un campo di velocità bidimensionale (x, z) stazionario ($\partial u/\partial t = \partial w/\partial t = 0$), relativo ad un fluido ideale di massa volumica $\rho = 880$ kg/m³ e immerso nel campo della gravità

$$\vec{g} = -g \vec{k} ,$$

è dato dalla legge

$$\vec{u} = 2z \vec{i} + 3x \vec{k} .$$

Calcolare: a) l'accelerazione e il gradiente della pressione di una particella che si trova nel punto ($x = 2$ m, $z = 1$ m); b) la legge della pressione $p = p(x, z)$ sapendo che nel punto (x_0, y_0) la pressione vale p_0 .

Dalle equazioni di Eulero (4.2.a) e (4.2.c) si ha

$$\begin{aligned} \rho a_x &= -\frac{\partial p}{\partial x} & \text{con} & \quad a_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \rho a_z &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g & \text{con} & \quad a_z = u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} . \end{aligned}$$

Nel punto ($x = 2$ m, $z = 1$ m) le velocità sono date da

$$u = 2z = 2 \times 1 = 2.0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad w = 3x = 3 \times 2 = 6.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e i gradienti sono dati da

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2.0 \frac{1}{\text{s}} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 3.0 \frac{1}{\text{s}} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 .$$

a) Pertanto le accelerazioni sono date da

$$\begin{aligned} a_x &= u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = 2.0 \times 0 + 6.0 \times 2.0 = 12.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ a_z &= u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = 2.0 \times 3.0 + 6.0 \times 0 = 6.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

e i gradienti delle pressioni sono dati da

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho a_x = -880 \times 12.0 = -10600 \frac{\text{Pa}}{\text{m}} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho (a_z + g) = -880 \times (6.0 + 9.80665) = -13900 \frac{\text{Pa}}{\text{m}} . \end{aligned}$$

Da notare che l'accelerazione, essendo una quantità cinematica, viene determinata indipendentemente dalla massa volumica mentre la pressione, essendo una quantità dinamica, dipende dalla massa volumica.

b) Il differenziale totale della pressione dp è dato da

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz ;$$

integrando nelle due direzioni tra il punto (x_0, z_0) di pressione p_0 e il punto generico (x, z) di pressione p , si ha

$$\int_{p_0}^p dp = \int_{x_0}^x \frac{\partial p}{\partial x} dx + \int_{z_0}^z \frac{\partial p}{\partial z} dz = -\rho a_x \int_{x_0}^x dx - \rho (a_z + g) \int_{z_0}^z dz \quad \rightarrow \quad \Delta p = -\rho [a_x \Delta x + (a_z + g) \Delta z] .$$

L'isobara ($\Delta p = 0$) è una retta inclinata dell'angolo

$$a_x \Delta x + (a_z + g) \Delta z = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \text{atan}\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right) = \text{atan}\left(-\frac{a_x}{a_z + g}\right) = \text{atan}\left(-\frac{12}{6.0 + 9.80665}\right) = -37.2^\circ .$$

Esercizio 4.1.4

Un campo di velocità bidimensionale (x, z), relativo ad acqua considerata ideale, è dato dalla legge

$$\vec{u} = (5x + 0.3t) \vec{i} + (-4z + 0.2t) \vec{k} .$$

Calcolare: a) l'accelerazione e il gradiente della pressione di una particella che si trova nel punto ($x = 2$ m, $z = 1$ m) al tempo $t = 8$ s; b) la legge della pressione $p = p(x, z)$ sapendo che nel punto (x_0, y_0) la pressione vale p_0 .

Dalle equazioni di Eulero (4.2.a) e (4.2.c) si ha

$$\rho a_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{con} \quad a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\rho a_z = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{con} \quad a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} .$$

Nel punto ($x = 2 \text{ m}$, $z = 1 \text{ m}$) al tempo $t = 8 \text{ s}$ le velocità sono date da

$$u = 5x + 0.3t = 5 \times 2 + 0.3 \times 8 = 12.40 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad w = -4z + 0.2t = -4 \times 1 + 0.2 \times 8 = -2.40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e i gradienti sono dati da

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 5 \frac{1}{\text{s}} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0.2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -4 \frac{1}{\text{s}} .$$

a) Pertanto le accelerazioni sono date da

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = 0.3 + 12.40 \times 5 + (-2.40) \times 0 = 62.30 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = 0.2 + 12.40 \times 0 + (-2.40) \times (-4) = 9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

e i gradienti delle pressioni sono dati da

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x = -1000 \times 62.30 = -62300 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho a_z = -1000 \times 9.80 = -9800 \frac{\text{Pa}}{\text{m}} .$$

b) Il differenziale totale della pressione dp è dato da

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz ;$$

per cui, integrando nelle due direzioni tra il punto (x_0, z_0) di pressione p_0 e il punto generico (x, z) di pressione p , si ha

$$\int_{p_0}^p dp = \int_{x_0}^x \frac{\partial p}{\partial x} dx + \int_{z_0}^z \frac{\partial p}{\partial z} dz = -\rho a_x \int_{x_0}^x dx - \rho a_z \int_{z_0}^z dz \quad \rightarrow \quad \Delta p = -\rho (a_x \Delta x + a_z \Delta z) .$$

Nell'istante $t = 8 \text{ s}$ l'isobara ($\Delta p = 0$) è una retta inclinata dell'angolo

$$a_x \Delta x + a_z \Delta z = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \text{atan}\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right) = \text{atan}\left(-\frac{a_x}{a_z}\right) = \text{atan}\left(-\frac{62.30}{9.80}\right) = -81.1^\circ .$$

Esercizio 4.1.5

Un fluido ideale, immerso nel campo della gravità

$$\vec{g} = -g \vec{k} ,$$

ha un campo di velocità bidimensionale nel piano (x, y) che segue la legge

$$\vec{u} = m x \vec{i} - n y \vec{k} .$$

Calcolare la legge della pressione $p = p(x, y, z)$ sapendo che nel punto (x_0, y_0, z_0) la pressione vale p_0 .

I gradienti delle velocità sono dati da

$$\frac{\partial u}{\partial x} = m \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -n$$

e dalle equazioni di Eulero (4.2.a) e (4.2.c) si ha

$$a_x = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = m^2 x \quad a_z = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -n^2 y ;$$

pertanto dalle equazioni di Eulero (4.2.a), (4.2.b) e (4.2.c) si ha

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x = -\rho m x \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho a_y = -\rho n y \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

e il differenziale totale della pressione dp diventa

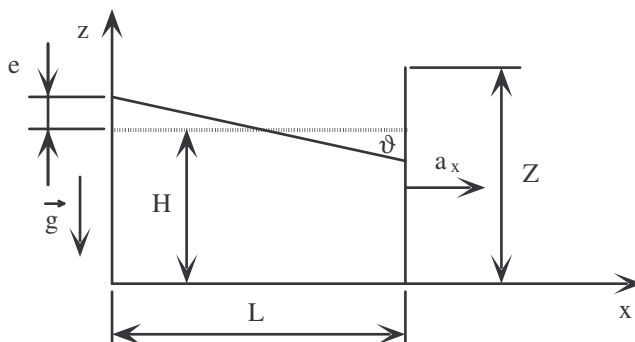
$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz .$$

Integrando nelle tre direzioni tra il punto (x_0, y_0, z_0) di pressione p_0 e il punto generico (x, y, z) di pressione p , si ha

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^p dp &= \int_{x_0}^x \frac{\partial p}{\partial x} dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial p}{\partial y} dy + \int_{z_0}^z \frac{\partial p}{\partial z} dz = -\rho m \int_{x_0}^x dx - \rho n \int_{y_0}^y y dy - \rho g \int_{z_0}^z dz \quad \rightarrow \\ &\rightarrow \quad p - p_0 = -\rho \left[m (x^2 - x_0^2) + n (y^2 - y_0^2) + g (z^2 - z_0^2) \right] . \end{aligned}$$

Esercizio 4.1.6

Una vasca per pesci, di dimensioni $X = 30$ cm, $Y = 60$ cm e $Z = 30$ cm e parzialmente riempita d'acqua considerata come fluido ideale, viene trasportata con un'automobile. Assumendo per una vettura media il valore massimo dell'accelerazione pari ad $a_x = 2/3$ g, calcolare la altezza H dell'acqua che con una ragionevole certezza ($H = 0.75 H_{\max}$) non la faccia tracimare. Si trascurano i sobbalzi.



Si deve notare come il movimento della superficie libera del liquido sia dovuto alle accelerazioni o alle decelerazioni lineari della vettura perché si trascurano gli scuotimenti dovuti ai sobbalzi. Prendendo la coordinata x in direzione del moto, bisogna decidere se allineare il lato lungo della vasca parallelo o perpendicolare al moto, ma la scelta può essere fatta solo dopo aver determinato la forma che assume la superficie quando il liquido è sottoposto ad una accelerazione costante a_x .

L'equazione di Eulero (4.2)

$$\rho \vec{a} = -\text{grad}(p) + \rho \vec{g} ,$$

dove $\vec{g}$ è l'accelerazione di gravità, in coordinate cartesiane può essere scritta nel modo seguente

$$\rho (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) + \rho (g_x \vec{i} + g_y \vec{j} + g_z \vec{k}) .$$

La pressione non dipende da y e quindi si ha $\partial p / \partial y = 0$ e contemporaneamente si ha anche $a_y = a_z = 0$, $g_x = g_y = 0$ e $g_z = -g$; la relazione precedente si semplifica nella

$$\rho a_x \vec{i} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) - \rho g \vec{k}$$

o nelle due componenti

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_x \quad \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g .$$

Il problema è di trovare una espressione per $p = p(x, z)$ che consenta di determinare l'equazione della superficie libera. La differenza di pressione fra i due punti (x, z) e $(x+dx, z+dz)$, cioè il differenziale totale, è dato da

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

e, poiché la superficie libera è una linea a pressione costante ($dp = 0$), si ha

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz = -\rho a_x dx - \rho g dz = 0 ;$$

di conseguenza l'equazione della superficie libera è data dal piano

$$dz = -\frac{a_x}{g} dx \quad \rightarrow \quad \int_{z_0}^z dz = -\frac{a_x}{g} \int_{x_0}^x dx \quad \rightarrow \quad z - z_0 = -\frac{a_x}{g} (x - x_0)$$

che nell'intersezione del piano (x,z) diventa una linea retta.

La sovrelevazione "e" rispetto all'altezza media H è data da

$$e = \frac{L}{2} \tan \vartheta = \frac{L}{2} \left(-\frac{dz}{dx} \right) = \frac{L}{2} \frac{a_x}{g} \quad \left(\text{per } H \geq \frac{L}{2} \right)$$

e, poiché deve essere minima per un a_x dato, la vasca deve essere caricata sulla vettura con il lato corto nella direzione di marcia. Allora con $L = X = 30$ cm si ha

$$e = \frac{X}{2} \frac{a_x}{g} = \frac{30 \times 10^{-2}}{2} \frac{a_x}{g} = 0.150 \frac{a_x}{g}$$

con un valore massimo, quando l'acqua comincia a tracimare, pari a

$$e = Z - H_{\max} = 30 \times 10^{-2} - H_{\max} = 0.30 - H_{\max} .$$

La condizione limite è

$$e = e_{\max} \quad \rightarrow \quad 0.150 \frac{a_x}{g} = 0.30 - H_{\max} \quad \rightarrow \quad H_{\max} = 0.30 - 0.150 \frac{a_x}{g} = 0.30 - 0.150 \times \frac{2}{3} = 0.20 \text{ m} .$$

Lasciando il margine di sicurezza dato, alla fine si ha

$$H = 0.75 H_{\max} = 0.75 \times 0.20 = 0.150 \text{ m} .$$

Esercizio 4.1.7

Un fluido ideale, immerso nel campo della gravità

$$\vec{g} = -g \vec{k}$$

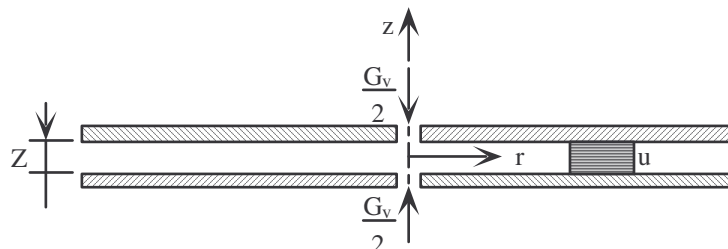
ha un campo di velocità bidimensionale nel piano (r, ϑ) che segue la legge

$$\vec{u} = \frac{\text{cost}}{r} \vec{i}$$

detta "legge della sorgente". Il modello matematico di una sorgente può essere realizzato da una portata costante nel tempo $G_v/2$ entrante da due fori praticati su due lastre orizzontali parallele e poste alla distanza Z; il moto è allora dato da

$$\text{cost} = \frac{G_v}{2\pi Z} .$$

Se $G_v = 8 \pi \text{ m}^3/\text{s}$ e $Z = 1$ m, calcolare nei punti (1) e (2) di raggi $R_1 = 0.5$ m e $R_2 = 2$ m: a) le velocità u_1 e u_2 ; b) le accelerazioni a_{r1} e a_{r2} ; c) i gradienti della pressione $(\partial p/\partial r)_{r=R_1}$ e $(\partial p/\partial r)_{r=R_2}$. Calcolare anche: d) la pressione p_1 nel punto (1), se $p_2 = p_{\text{atm}}$; e) il raggio R_1 in cui $p_1 = 0$.



a) Le componenti della velocità sono date da

$$u = \frac{\text{cost}}{r} = \frac{G_v}{2\pi r Z} = \frac{8 \times \pi}{2 \times \pi \times r \times 1} = \frac{4}{r} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} u_1 &= \frac{4}{R_1} = \frac{4}{0.5} = 8.0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ u_2 &= \frac{4}{R_2} = \frac{4}{2.0} = 2.0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned}$$

mentre i gradienti delle velocità sono dati da

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \vartheta} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{4}{r^2} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=R_1} = -\frac{4}{R_1^2} = -\frac{4}{0.5^2} = -16.0 \frac{1}{s} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=R_2} = -\frac{4}{R_2^2} = -\frac{4}{2.0^2} = -1.00 \frac{1}{s} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \vartheta} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial \vartheta} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

b) Dalle equazioni di Eulero (4.2.d), (4.2.e) e (4.2.f) si ha

$$\begin{aligned} a_r = u \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{4}{r} \left(-\frac{4}{r^2} \right) = -\frac{16}{r^3} \quad \rightarrow \quad a_{r1} = -\frac{16}{R_1^3} = -\frac{16}{0.5^3} = -128 \frac{m}{s^2} \\ a_{r2} = -\frac{16}{R_2^3} = -\frac{16}{2.0^3} = -2.0 \frac{m}{s^2} \\ a_\vartheta = 0 \\ a_z = 0 \end{aligned}$$

c) Dalle equazioni di Eulero (4.2.d), (4.2.e) e (4.2.f) si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} = -\rho a_r = -\rho \left(-\frac{16}{r^3} \right) = \frac{16\rho}{r^3} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=R_1} = \frac{16\rho}{R_1^3} = \frac{16 \times 1000}{0.5^3} = 128 \times 10^3 \frac{Pa}{m} \\ \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=R_2} = \frac{16\rho}{R_2^3} = \frac{16 \times 1000}{2.0^3} = 2.0 \times 10^3 \frac{Pa}{m} \\ \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{aligned}$$

d) Integrando il differenziale della pressione fra i raggi R_1 e R_2 si ha

$$\begin{aligned} \int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial p}{\partial r} dr \quad \rightarrow \quad p_2 - p_1 = 16\rho \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^3} \quad \rightarrow \quad p_1 = p_2 - 16\rho \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \right] = \\ = p_2 - 8\rho \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) = 101325 - 8 \times 1000 \left(\frac{1}{0.5^2} - \frac{1}{2.0^2} \right) = 101325 - 30000 = 71300 \text{ Pa} \end{aligned}$$

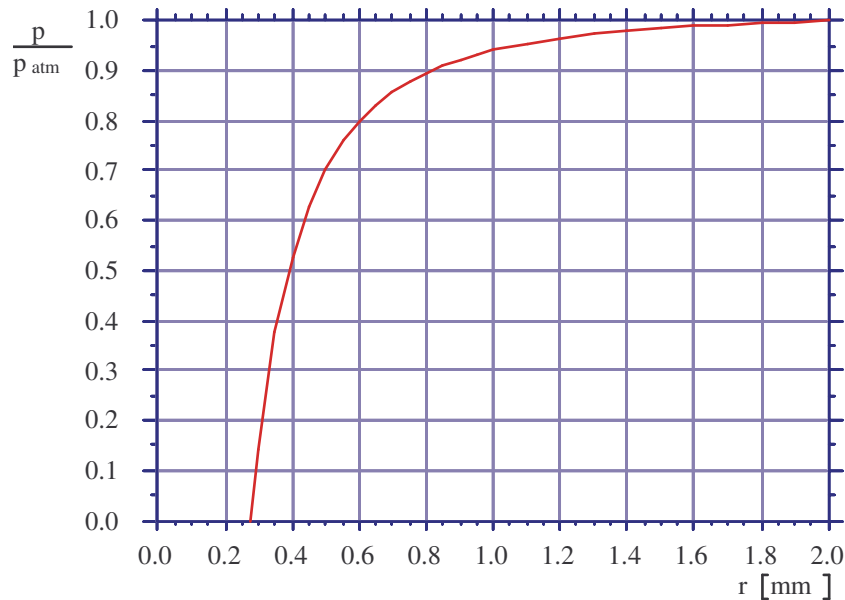
e) Dalla relazione precedente si ha

$$\begin{aligned} 0 = p_2 - 8\rho \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \quad \rightarrow \quad p_2 + \frac{8\rho}{R_2^2} = \frac{8\rho}{R_1^2} \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad R_1 = \sqrt{\frac{8\rho}{p_2 + \frac{8\rho}{R_2^2}}} = \sqrt{\frac{8 \times 1000}{101325 + \frac{8 \times 1000}{2.0^2}}} = 0.278 \text{ m} \end{aligned}$$

Di conseguenza la pressione, adimensionalizzata a quella atmosferica p/p_{atm} , in funzione del raggio generico r diventa

$$p_2 = 8\rho \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \quad \rightarrow \quad \frac{p}{p_{\text{atm}}} = \frac{8 \times 1000}{101325} \left(\frac{1}{0.278^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

e il suo andamento è riportato nel diagramma seguente.



Esercizio 4.1.8

Un fluido ideale, immerso nel campo della gravità

$$\vec{g} = -g \vec{k} ,$$

ha un campo di velocità bidimensionale nel piano (r, ϑ) che segue la legge

$$\vec{u} = \frac{\text{cost}}{r} \vec{j}$$

detta "legge del vortice libero". Se $\text{cost} = 4 \text{ m}^2/\text{s}$, calcolare nei punti (1) e (2) di raggi $R_1 = 0.5 \text{ m}$ e $R_2 = 2 \text{ m}$: a) le velocità v_1 e v_2 ; b) le accelerazioni a_{r1} e a_{r2} ; c) i gradienti della pressione $(\partial p / \partial r)_{r=R_1}$ e $(\partial p / \partial r)_{r=R_2}$. Calcolare anche: d) la pressione p_1 nel punto (1), se $p_2 = p_{\text{atm}}$; e) il raggio R_1 in cui $p_1 = 0$.

a) Le componenti della velocità sono date da

$$u = 0$$

$$v = \frac{\text{cost}}{r} = \frac{4}{r}$$

→

$$v_1 = \frac{4}{R_1} = \frac{4}{0.5} = 8.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = \frac{4}{R_2} = \frac{4}{2.0} = 2.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$w = 0 ,$$

mentre i gradienti delle velocità sono dati da

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial \vartheta} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \vartheta} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{4}{r^2}$$

→

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=R_1} = -\frac{4}{R_1^2} = -\frac{4}{0.5^2} = -16.0 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=R_2} = -\frac{4}{R_2^2} = -\frac{4}{2.0^2} = -1.00 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial \vartheta} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

b) Dalle equazioni di Eulero (4.2.d), (4.2.e) e (4.2.f) si ha

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{r} \left(\frac{4}{r} \right) = -\frac{16}{r^3}$$

→

$$a_{r1} = -\frac{16}{R_1^3} = -\frac{16}{0.5^3} = -128 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_{r2} = -\frac{16}{R_2^3} = -\frac{16}{2.0^3} = -2.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_\vartheta = 0$$

$$a_z = 0$$

c) Dalle equazioni di Eulero (4.2.d), (4.2.e) e (4.2.f) si ha

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho a_r = -\rho \left(-\frac{16}{r^3} \right) = \frac{16\rho}{r^3} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=R_1} &= \frac{16\rho}{R_1^3} = \frac{16 \times 1000}{0.5^3} = 128 \times 10^3 \frac{\text{Pa}}{\text{m}} \\ \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=R_2} &= \frac{16\rho}{R_2^3} = \frac{16 \times 1000}{2.0^3} = 2.0 \times 10^3 \frac{\text{Pa}}{\text{m}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \vartheta} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

d) Integrando il differenziale della pressione fra i raggi R_1 e R_2 si ha

$$\begin{aligned} \int_{p_1}^{p_2} dp &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial p}{\partial r} dr \quad \rightarrow \quad p_2 - p_1 = 16\rho \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^3} \quad \rightarrow \quad p_1 = p_2 - 16\rho \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \right] = \\ &= p_2 - 8\rho \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) = 101325 - 8 \times 1000 \left(\frac{1}{0.5^2} - \frac{1}{2.0^2} \right) = 101325 - 30000 = 71300 \text{ Pa} . \end{aligned}$$

e) Dalla relazione precedente si ha

$$\begin{aligned} 0 &= p_2 - 8\rho \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \quad \rightarrow \quad p_2 + \frac{8\rho}{R_2^2} = \frac{8\rho}{R_1^2} \quad \rightarrow \\ &\rightarrow \quad R_1 = \sqrt{\frac{8\rho}{p_2 + \frac{8\rho}{R_2^2}}} = \sqrt{\frac{8 \times 1000}{101325 + \frac{8 \times 1000}{2.0^2}}} = 0.278 \text{ m} . \end{aligned}$$

Da notare l'analogia con l'esercizio 4.1.7 e l'uguaglianza del comportamento della pressione

$$\frac{p}{p_{\text{atm}}} = \frac{8 \times 1000}{101325} \left(\frac{1}{0.278^2} - \frac{1}{r^2} \right) .$$

Esercizio 4.1.9

Un fluido ideale, immerso nel campo della gravità

$$\vec{g} = -g \vec{k} ,$$

ha un campo di velocità bidimensionale nel piano (r, ϑ) che segue la legge di rotazione attorno all'asse verticale

$$\vec{u} = \omega r \vec{j}$$

detta "legge del vortice forzato". Se $\omega = 4 \text{ rad/s}$, calcolare: a) le componenti della velocità u , v e w ; b) le accelerazioni a_r , a_ϑ e a_z ; c) i gradienti della pressione $\partial p / \partial r$, $\partial p / \partial \vartheta$ e $\partial p / \partial z$. Se per $R_1 = 0$ è $p_1 = 0$, calcolare anche: d) il raggio R_2 in cui $p_2 = p_{\text{atm}}$.

a) Le componenti della velocità sono date da

$$u = 0 , \quad v = \omega r = 4 r \frac{\text{m}}{\text{s}} , \quad w = 0 ,$$

mentre i gradienti delle velocità sono dati da

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial \vartheta} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 , \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \vartheta} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 , \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \omega = 4 \frac{1}{\text{s}} , \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial \vartheta} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 .$$

b) Dalle equazioni di Eulero (4.2.d), (4.2.e) e (4.2.f) si ha

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\omega^2 r = -16 r \frac{\text{m}}{\text{s}^2} , \quad a_\vartheta = 0 , \quad a_z = 0 .$$

c) Dalle equazioni di Eulero (4.2.d), (4.2.e) e (4.2.f) si ha

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho a_r = -\rho (-\omega^2 r) = 16\rho r \frac{\text{Pa}}{\text{m}} , \quad \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = 0 , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g .$$

d) Integrando il differenziale della pressione fra i raggi R_1 e R_2 si ha

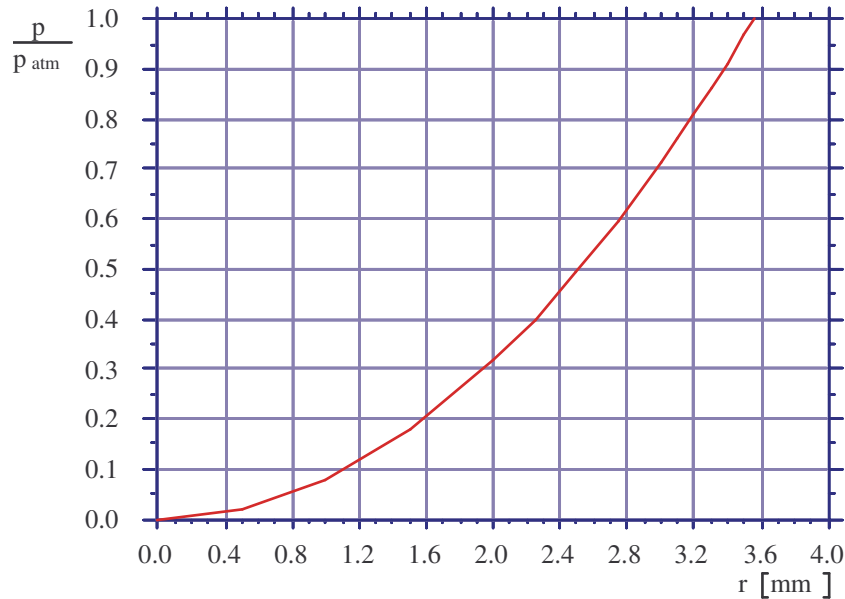
$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial p}{\partial r} dr \quad \rightarrow \quad p_2 - p_1 = 16\rho \int_{R_1}^{R_2} r dr = 16\rho \left(\frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^2}{2} \right) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad p_2 = 16\rho \frac{R_2^2}{2} = 8\rho R_2^2 \quad \rightarrow \quad R_2 = \sqrt{\frac{p_2}{8\rho}} = \sqrt{\frac{101325}{8 \times 1000}} = 3.56 \text{ m} .$$

La pressione, adimensionalizzata a quella atmosferica p/p_{atm} , in funzione del raggio generico r diventa

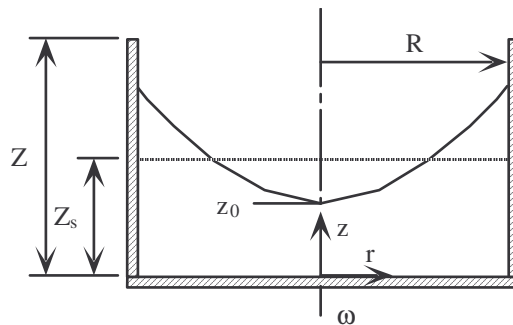
$$p_2 = 8\rho R_2^2 \quad \rightarrow \quad \frac{p}{p_{\text{atm}}} = \frac{8 \times 1000}{101325} r^2$$

e il suo andamento è riportato nel diagramma seguente.



Esercizio 4.1.10

Un contenitore cilindrico, di raggio $R = 0.25$ m e di altezza $Z = 0.5$ m, è riempito per metà altezza ($Z_s = Z/2$) da acqua, considerata come fluido ideale, ed è messo in rotazione con velocità costante ω attorno al suo asse; dopo un certo tempo, anche il liquido si mette a ruotare solidalmente con il contenitore. Il fluido è logicamente sottoposto anche al campo gravitazionale con $g_z = -g$. Calcolare la velocità di rotazione ω alla quale il fluido comincia a traboccare dal bordo superiore.



L'equazione di Eulero (4.2)

$$\rho \vec{a} = -\text{grad}(p) + \rho \vec{g} ,$$

dove $\vec{g}$ è l'accelerazione di gravità, in coordinate cilindriche può essere scritta nel modo seguente

$$\rho (a_r \vec{i} + a_\theta \vec{j} + a_z \vec{k}) = - \left(\frac{\partial p}{\partial r} \vec{i} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) + \rho (g_r \vec{i} + g_\theta \vec{j} + g_z \vec{k}) .$$

La pressione non dipende da ϑ e quindi si ha $\partial p / \partial \vartheta = 0$ e contemporaneamente si ha anche $a_r = -v^2/r$ e $a_\vartheta = a_z = 0$, $g_r = g_\vartheta = 0$ e $g_z = -g$; la relazione precedente si semplifica nella

$$\rho a_r \vec{i} = - \left(\frac{\partial p}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) - \rho g \vec{k}$$

o nelle due componenti

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r} = \rho \omega^2 r \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Il problema è ora di trovare una espressione per $p = p(r, z)$ che consenta di determinare l'equazione della superficie libera. La differenza di pressione fra i due punti (r, z) e $(r+dr, z+dz)$, cioè il differenziale totale, è dato da

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

e, poiché la superficie libera è una linea a pressione costante ($dp = 0$), si ha

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho \omega^2 r dr - \rho g dz = 0$$

di conseguenza l'equazione della superficie libera è data dal paraboloide

$$dz = \frac{\omega^2}{g} r dr \quad \rightarrow \quad \int_{z_0}^z dz = \frac{\omega^2}{g} \int_0^r r dr \quad \rightarrow \quad z - z_0 = \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

che nell'intersezione del piano (r, z) diventa una parabola.

Il volume del fluido V_d nella configurazione di equilibrio dinamico vale

$$V_d = \int_0^R \int_{z_0}^z 2\pi r dr dz = \int_0^R 2\pi r \left(\frac{\omega^2}{2g} r^2 \right) dr = \pi \frac{\omega^2}{g} \int_0^R r^3 dr = \pi \frac{\omega^2}{4g} R^4$$

dove l'altezza generica z è tratta dalla legge della superficie libera e dove R è il raggio esterno del contenitore; in corrispondenza dell'altezza Z si ha

$$Z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} R^2 \quad \rightarrow \quad z_0 = Z - \frac{\omega^2}{2g} R^2$$

e rispettivamente

$$V_d = \pi z_0 R^2 + \frac{\pi \omega^2}{4g} R^4 = \pi Z R^2 - \frac{\pi \omega^2}{2g} R^4 + \frac{\pi \omega^2}{4g} R^4 = \pi Z R^2 - \frac{\pi \omega^2}{4g} R^4$$

Invece il volume del fluido V_s nella configurazione di equilibrio statico prima del movimento vale

$$V_s = \pi Z_s R^2 = \pi \frac{Z}{2} R^2$$

Infine, uguagliando i due volumi, si ha

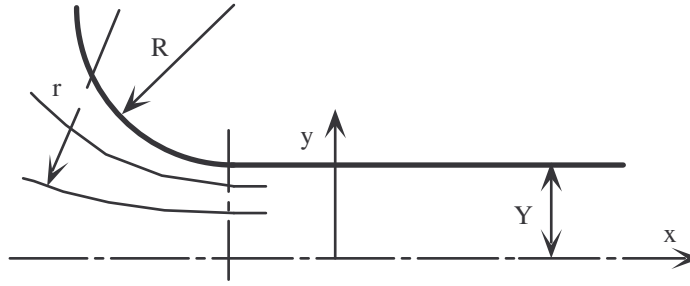
$$V_d = V_s \quad \rightarrow \quad \pi Z R^2 - \frac{\pi \omega^2}{4g} R^4 = \pi \frac{Z}{2} R^2 \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \frac{2gZ}{R^2} \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2gZ}{R^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 9.80665 \times 0.5}{0.25^2}} = 12.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Esercizio 4.1.11

Per facilitare l'ingresso dell'aria, considerata come fluido ideale, in una condotta larga $2Y = 500$ mm viene creato un imbocco di raggio $R = 1$ m. Le linee di corrente si dispongono su un raggio di curvatura pari a

$$r = \frac{Y}{y} R$$

dove y è la distanza dall'asse della condotta, e la velocità delle particelle vale $u = 10$ m/s su tutte le linee di corrente. Calcolare la differenza di pressione Δp fra la parete e l'asse della condotta.



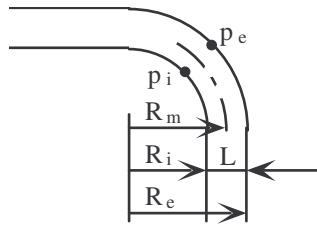
Dall'equazione di Eulero (4.3.d) lungo la direzione normale alla linea di corrente esaminata, e dalla tab. T.1, in cui viene letto il valore della massa volumica ρ dell'aria, sulla sezione fra imbocco e condotta si ha

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \frac{u^2}{r} = \rho \frac{u^2}{Y R} y \quad \rightarrow \quad \int_{p_0}^{p_Y} dp = \rho \frac{u^2}{Y R} \int_0^Y y dy \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \Delta p = p_{y=Y} - p_{y=0} = \rho \frac{u^2}{Y R} \frac{Y^2}{2} = \rho \frac{u^2}{R} \frac{Y}{2} = 1.294 \times \frac{10^2}{1} \times \frac{0.25}{2} = 16.2 \text{ Pa} .$$

Esercizio 4.1.12

Una condotta a sezione rettangolare larga $L = 0.2 \text{ m}$ e alta $H = 0.5 \text{ m}$ presenta un tratto curvo con raggio di curvatura medio pari a $R_m = 0.5 \text{ m}$. La differenza di pressione fra la superficie esterna e quella interna della curva corrisponde ad una altezza $\Delta z = 50 \text{ mm}$ di colonna d'acqua e il profilo della velocità viene considerato uniforme. L'aria è in condizioni normali ed è considerata come fluido ideale. Calcolare la portata volumetrica G_v .



Dall'equazione di Eulero (4.3.d) si ha

$$-\rho \frac{u^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial n} \quad \rightarrow \quad dp = \rho u^2 \frac{dr}{r}$$

e, integrando fra il raggio interno e quello esterno (sono posti fuori d'integrale la velocità lungo la traiettoria perché considerata uniforme e la massa volumica perché il fluido viene considerato incompressibile), si ha

$$\int_{p_i}^{p_e} dp = \rho u^2 \int_{R_i}^{R_e} \frac{dr}{r} \quad \rightarrow \quad \Delta p = p_e - p_i = \rho u^2 \ln \left(\frac{R_e}{R_i} \right) = \rho u^2 \ln \left(\frac{R_m + L/2}{R_m - L/2} \right) ;$$

dalla legge di Stevin (2.7) si ha poi

$$\Delta p = \rho_{\text{acqua}} g \Delta z .$$

Quindi, dall'uguaglianza della differenza di pressione e dalla tab. T.1 in cui viene letto il valore della massa volumica ρ dell'aria in condizioni normali, si ha

$$\rho_{\text{acqua}} g \Delta z = \rho u^2 \ln \left(\frac{R_m + L/2}{R_m - L/2} \right) \quad \rightarrow \quad u = \sqrt{\frac{\rho_{\text{acqua}} g \Delta z}{\rho \ln \left(\frac{R_m + L/2}{R_m - L/2} \right)}} = \sqrt{\frac{1000 \times 9.80665 \times 0.050}{1.294 \times \ln \left(\frac{0.5 + 0.1}{0.5 - 0.1} \right)}} = 30.57 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

La portata volumetrica vale quindi

$$G = u S = u L H = 30.57 \times 0.2 \times 0.5 = 3.06 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} .$$

4.2.- EQUAZIONE DI BERNOULLI

Esercizio 4.2.1

Acqua, considerata come fluido ideale, scorre lungo un tubo con velocità $u = 7.2$ m/s. Esprimere questa velocità in mCA e in kN/m^2 .

Dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) espressa in unità di misura corrispondenti alle altezze si ha

$$\frac{1}{2} \frac{u^2}{g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{cost} \quad [\text{m}] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{u^2}{g} = \frac{1}{2} \times \frac{7.2^2}{9.80665} = 2.64 \text{ mCA}$$

ed espressa in unità di misura corrispondenti alle pressioni si ha

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g z = \text{cost} \quad [\text{Pa}] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \rho u^2 = \frac{1}{2} \times 1000 \times 7.2^2 = 25900 \text{ Pa} = 25.9 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} .$$

Esercizio 4.2.2

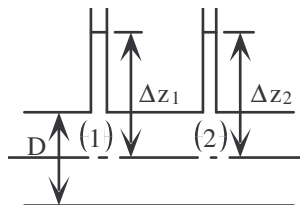
Acqua, considerata come fluido ideale, si trova in un tubo ad un'altezza $z = 36$ m sopra il livello del mare, alla pressione $p = 410 \text{ kN/m}^2$ e alla velocità $u = 4.8$ m/s. Calcolare la sua energia totale per unità di peso.

Dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) espressa in unità di misura corrispondenti alle altezze, che sono uguali alle energie per unità di peso, si ha

$$\frac{1}{2} \frac{u^2}{g} + \frac{p}{\rho g} + z = \frac{1}{2} \times \frac{4.8^2}{9.80665} + \frac{410 \times 10^3}{1000 \times 9.80665} + 36 = 1.175 + 4.181 + 36 = 41.4 \frac{\text{J}}{\text{N}} = 41.4 \text{ m} .$$

Esercizio 4.2.3

In un tubo orizzontale di diametro D costante scorre acqua considerata come fluido ideale. Nel punto (1) la pressione vale $p_1 = 0.5$ bar. Calcolare: a) la pressione p_2 nel punto (2); b) le differenze di altezza Δz_1 e Δz_2 fra i peli liberi dei tubicini piezometrici inseriti nei punti (1) e (2) e l'asse del tubo.



a) Poiché il tubo è orizzontale, le altezze dei due punti sono uguali $z = z_1 = z_2$ e, poiché il diametro rimane costante, la velocità nei due punti è uguale $u = u_1 = u_2$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + p_1 + \rho g z = \frac{1}{2} \rho u^2 + p_2 + \rho g z \quad \rightarrow \quad p = p_2 = p_1 = 0.5 \text{ bar} .$$

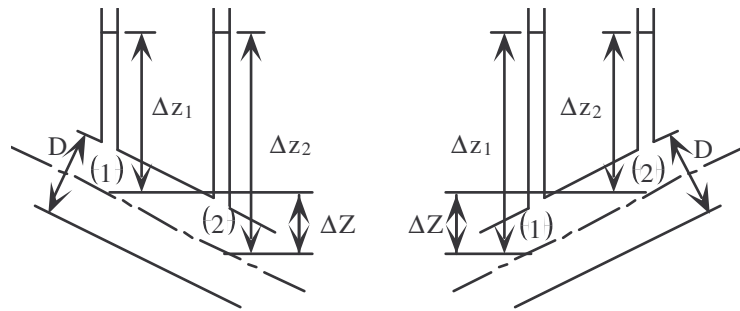
b) Dalla legge di Stevin (2.7) o dai termini delle altezze piezometrica e geometrica dell'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\Delta z = \Delta z_1 = \Delta z_2 = \frac{p}{\rho g} = \frac{0.5 \times 10^5}{1000 \times 9.80665} = 5.10 \text{ m} .$$

Quindi, i peli liberi nei due tubicini piezometrici raggiungono la stessa altezza.

Esercizio 4.2.4

In un tubo inclinato di diametro D costante scorre acqua considerata come fluido ideale. La differenza di quota dell'asse fra i punti (1) e (2) vale $\Delta Z = z_1 - z_2 = 1$ m per il tubo che sale e $\Delta Z = z_1 - z_2 = -1$ m per il tubo che scende; nel punto (1) la pressione vale $p_1 = 0.5$ bar. Calcolare: a) la pressione p_2 nel punto (2); b) le differenze di altezza Δz_1 e Δz_2 fra i peli liberi dei tubicini piezometrici inseriti nei punti (1) e (2) e l'asse del tubo.



a) Poiché il tubo è inclinato, le altezze dei due punti hanno fra loro la relazione $z_1 = z_2 + \Delta Z$ e, poiché il diametro rimane costante, la velocità nei due punti è uguale $u = u_1 = u_2$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + p_1 + \rho g (z_2 + \Delta Z) = \frac{1}{2} \rho u^2 + p_2 + \rho g z_2 \quad \rightarrow \quad p_2 = p_1 + \rho g \Delta Z :$$

-- per il tubo discendente

$$p_2 = p_1 + \rho g \Delta Z = 0.5 \times 10^5 + 1000 \times 9.80665 \times (+1) = 50000 + 9807 = 59800 \text{ Pa} ;$$

-- per il tubo ascendente

$$p_2 = p_1 + \rho g \Delta Z = 0.5 \times 10^5 + 1000 \times 9.80665 \times (-1) = 50000 - 9807 = 40200 \text{ Pa} .$$

b) Dalla legge di Stevin (2.7) o dai termini delle altezze piezometrica e geometrica dell'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\Delta z_1 = \frac{p_1}{\rho g} = \frac{0.5 \times 10^5}{1000 \times 9.80665} = 5.099 \text{ m}$$

$$\Delta z_2 = \frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_1 + \rho g \Delta Z}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + \Delta Z = \Delta z_1 + \Delta Z :$$

-- per il tubo discendente

$$\Delta z_2 = \Delta z_1 + \Delta Z = 5.099 + 1 = 6.10 \text{ m} ;$$

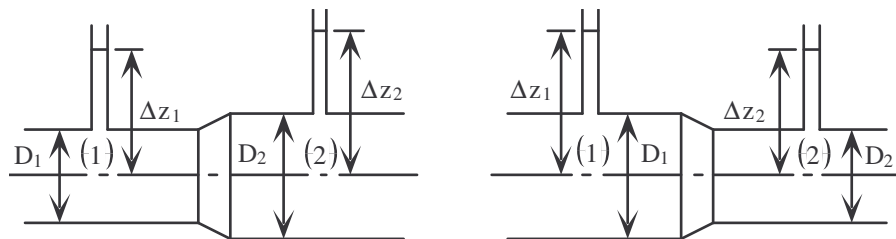
-- per il tubo ascendente

$$\Delta z_2 = \Delta z_1 + \Delta Z = 5.099 - 1 = 4.10 \text{ m} .$$

Quindi, i peli liberi nei due tubicini piezometrici raggiungono la stessa altezza sia nel caso di tubo discendente, perché l'aumento della pressione compensa la posizione più bassa della sezione, sia nel caso di tubo ascendente perché il calo della pressione compensa la posizione più alta della sezione.

Esercizio 4.2.5

In un tubo orizzontale, in cui il diametro $D_1 = 50 \text{ cm}$ si allarga a $D_2 = 70.71 \text{ cm}$ oppure si restringe a $D_2 = 35.36 \text{ cm}$, scorre acqua considerata come fluido ideale. Nel punto (1) la pressione vale $p_1 = 0.5 \text{ bar}$ e la velocità vale $u_1 = 2 \text{ m/s}$. Calcolare: a) la pressione p_2 nel punto (2); b) le differenze di altezza Δz_1 e Δz_2 fra i peli liberi dei tubicini piezometrici inseriti nei punti (1) e (2) e l'asse del tubo.



Dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$G_v = u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad u_2 = u_1 \frac{S_1}{S_2} = u_1 \frac{D_1^2}{D_2^2} :$$

-- per il tubo che si allarga

$$u_2 = u_1 \frac{D_1^2}{D_2^2} = 2 \times \frac{50^2}{70.71^2} = 1.0 \frac{\text{m}}{\text{s}} ;$$

-- per il tubo che restringe

$$u_2 = u_1 \frac{D_1^2}{D_2^2} = 2 \times \frac{50^2}{35.36^2} = 4.0 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

a) Poiché il tubo è orizzontale, le altezze dei due punti sono uguali $z = z_1 = z_2$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 + \rho g z = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 + \rho g z \quad \rightarrow \quad p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2) :$$

-- per il tubo che si allarga

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2) = 0.5 \times 10^5 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (2^2 - 1.0^2) = 50000 + 1500 = 51500 \text{ Pa} ;$$

per il tubo che restringe

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2) = 0.5 \times 10^5 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (2^2 - 4.0^2) = 50000 - 6900 = 44000 \text{ Pa} .$$

b) Dalla legge di Stevin (2.7) o dai termini delle altezze piezometrica e geometrica dell'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\Delta z_1 = \frac{p_1}{\rho g} = \frac{0.5 \times 10^5}{1000 \times 9.80665} = 5.099 \text{ m}$$

$$\Delta z_2 = \frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_1 + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2)}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{u_1^2 - u_2^2}{g} = \Delta z_1 + \frac{1}{2} \frac{u_1^2 - u_2^2}{g} :$$

-- per il tubo che si allarga

$$\Delta z_2 = \Delta z_1 + \frac{1}{2} \frac{u_1^2 - u_2^2}{g} = 5.099 + \frac{1}{2} \times \frac{2^2 - 1.0^2}{9.80665} = 5.099 + 0.1530 = 5.25 \text{ m} ;$$

-- per il tubo che restringe

$$\Delta z_2 = \Delta z_1 + \frac{1}{2} \frac{u_1^2 - u_2^2}{g} = 5.099 + \frac{1}{2} \times \frac{2^2 - 4.0^2}{9.80665} = 5.099 - 0.6118 = 4.49 \text{ m} .$$

Quindi, il pelo libero nel tubicino piezometrico a valle raggiunge un'altezza maggiore nel tubo che si allarga perché la velocità diminuisce e la pressione aumenta, mentre raggiunge un'altezza minore nel tubo che si restringe perché la velocità aumenta e la pressione diminuisce.

Esercizio 4.2.6

Una pompa preleva acqua, considerata come fluido ideale, da un serbatoio aperto all'atmosfera mediante un tubo di aspirazione che sale di $\Delta Z = 1 \text{ m}$ su una lunghezza $\Delta L = 5 \text{ m}$. L'acqua ha la velocità $u_2 = 1.8 \text{ m/s}$ e l'aria in essa disciolta si libera quando la pressione scende sotto quella atmosferica di $\Delta p = 70 \text{ kN/m}^2$. Calcolare la lunghezza massima L del tubo che non consente questo fenomeno.

Nel serbatoio di aspirazione la velocità è nulla $u_1 = 0$ e la pressione è uguale alla pressione atmosferica $p_1 = p_{\text{atm}}$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + z_1 = \frac{1}{2} \frac{u_2^2}{g} + \frac{p_{\text{atm}} - \Delta p}{\rho g} + z_2 \quad \rightarrow \quad z_2 - z_1 = \frac{\Delta p}{\rho g} - \frac{1}{2} \frac{u_2^2}{g} = \frac{70 \times 10^3}{1000 \times 9.80665} - \frac{1}{2} \times \frac{1.8^2}{9.80665} = 6.973 \text{ m} .$$

Il tubo quindi non deve essere più lungo di

$$L = \frac{\Delta L}{\Delta Z} (z_2 - z_1) = \frac{5}{1} \times 6.973 = 34.9 \text{ m} .$$

Esercizio 4.2.7

Il diametro di un tubo varia gradualmente da $D_1 = 150 \text{ mm}$ nel punto (1), alto $z_1 = 6 \text{ m}$, a $D_2 = 75 \text{ mm}$ nel punto 2, alto $z_2 = 3 \text{ m}$. La pressione in (1) è $p_1 = 1 \text{ bar}$ e la velocità è $u_1 = 3.6 \text{ m/s}$. Calcolare la pressione p_2 dell'acqua, considerata come fluido ideale, passante per il punto (2).

Dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$G_v = u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad u_2 = u_1 \frac{S_1}{S_2} = u_1 \frac{D_1^2}{D_2^2} = 3.6 \times \frac{150^2}{75^2} = 14.40 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 + \rho g z_1 &= \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 + \rho g z_2 \quad \rightarrow \quad p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2) + \rho g (z_1 - z_2) = \\ &= 1 \times 10^5 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (3.6^2 - 14.40^2) + 1000 \times 9.80665 \times (6 - 3) = 32200 \text{ Pa} . \end{aligned}$$

Esercizio 4.2.8

Un primo tubo di diametro $D_1 = 150 \text{ mm}$ trasporta una portata d'acqua, considerata come fluido ideale, $G_v = 7500 \text{ dm}^3/\text{min}$ alla pressione $p_1 = 820 \text{ kN/m}^2$. Esso è collegato ad un secondo tubo di diametro $D_2 = 300 \text{ mm}$, che si trova ad un'altezza $\Delta z = z_2 - z_1 = 3 \text{ m}$ sopra il primo, mediante un terzo tubo conico. Calcolare la pressione p_2 nel secondo tubo.

La portata volumetrica in unità fondamentali vale

$$G_v = 7500 \frac{\text{dm}^3}{\text{min}} = 7500 \times \frac{10^{-3}}{60} = 0.125 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

e dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$u_1 = \frac{G_v}{S_1} = \frac{4 G_v}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 0.125}{\pi \times (150 \times 10^{-3})^2} = 7.074 \frac{\text{m}}{\text{s}} , \quad u_2 = \frac{G_v}{S_2} = \frac{4 G_v}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 0.125}{\pi \times (300 \times 10^{-3})^2} = 1.768 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 + \rho g z_1 &= \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 + \rho g z_2 \quad \rightarrow \quad p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2) + \rho g (-\Delta z) = \\ &= 820 \times 10^3 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (7.074^2 - 1.768^2) + 1000 \times 9.80665 \times (-3) = 767000 \text{ Pa} = 767 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} . \end{aligned}$$

Esercizio 4.2.9

Acqua, considerata come fluido ideale, scorre in un tubo T da un serbatoio aperto all'atmosfera A ad un altro serbatoio chiuso B in cui la pressione è $\Delta p = 70000 \text{ Pa}$ sotto quella atmosferica; il livello dell'acqua nel serbatoio A è $\Delta z = z_A - z_B = 6 \text{ m}$ sopra il livello del serbatoio B. Calcolare la velocità u_T dell'acqua nel tubo T.

La differenza di energia totale ΔE fra i due serbatoi A e B si trasforma in energia di velocità all'interno del tubo T. Nei due serbatoi la velocità in corrispondenza dei peli liberi è nulla $u_A = u_B = 0$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\Delta E = E_A - E_B = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + g z_A - \frac{p_{\text{atm}} - \Delta p}{\rho} - g z_B = \frac{\Delta p}{\rho} + g \Delta z = \frac{70000}{1000} + 9.80665 \times 6 = 128.8 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

e quindi

$$\Delta E = \frac{1}{2} u_T^2 \quad \rightarrow \quad u_T = \sqrt{2 \Delta E} = \sqrt{2 \times 128.8} = 16.0 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Esercizio 4.2.10

Un tubo lungo $L = 300$ m passa da un diametro $D_1 = 1.2$ m ad un diametro $D_2 = 0.6$ m e scende di $\Delta Z = 1$ m ogni $\Delta L = 100$ m. La portata d'acqua, considerata come fluido ideale, è $G_v = 1$ m³/s e la pressione all'estremità superiore è $p_1 = 69$ kN/m². Calcolare la pressione all'estremità inferiore p_2 .

Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$u_1 = \frac{G_v}{S_1} = \frac{4 G_v}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 1}{\pi \times 1.2^2} = 0.8842 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad u_2 = \frac{G_v}{S_2} = \frac{4 G_v}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 1}{\pi \times 0.6^2} = 3.537 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

La differenza di altezza fra le due sezioni di riferimento vale

$$\Delta z = z_1 - z_2 = -\frac{\Delta Z}{\Delta L} L = -\frac{1}{100} \times 300 = -3 \text{ m}$$

e dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 + \rho g z_1 &= \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 + \rho g z_2 \quad \rightarrow \quad p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2) + \rho g \Delta z = \\ &= 69 \times 10^3 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (0.8842^2 - 3.537^2) + 1000 \times 9.80665 \times (-3) = 92600 \text{ Pa} . \end{aligned}$$

Esercizio 4.2.11

Nel punto (1) di una tubazione, in cui circola con moto stazionario acqua considerata come fluido ideale, il diametro è $D_1 = 0.5$ m, la pressione statica relativa all'atmosfera è $p_1 = 2$ bar, la velocità è $u_1 = 2$ m/s e l'altezza rispetto ad un piano di riferimento è $z_1 = 8$ m; nel punto (2), a valle del punto (1), il diametro del tubo è $D_2 = 0.4$ m e l'altezza è $z_2 = 1.5$ m. Calcolare: a) la differenza di pressione Δp fra i due punti; b) la pressione assoluta p_2 nel punto (2).

a) Dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$u_2 = \frac{S_1}{S_2} u_1 = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 u_1 = \left(\frac{0.5}{0.4} \right)^2 \times 2 = 3.125 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 + \rho g z_1 &= \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 + \rho g z_2 \quad \rightarrow \quad \Delta p = p_2 - p_1 = \rho \left[\frac{1}{2} (u_1^2 - u_2^2) + g (z_1 - z_2) \right] = \\ &= 1000 \times \left[\frac{1}{2} \times (2.0^2 - 3.125^2) + 9.80665 \times (8.0 - 1.50) \right] = 1000 \times (-2.883 + 63.74) = 60860 \text{ Pa} . \end{aligned}$$

b) La pressione assoluta nel punto (2) è data da

$$p_2 = (p_1 + p_{\text{atm}}) + \Delta p = (2 \times 10^5 + 101325) + 60860 = 362000 \text{ Pa} = 3.62 \text{ bar} .$$

Esercizio 4.2.12

In un tubo orizzontale ($z_1 = z_2$) scorre acqua considerata come fluido ideale. Nel punto (1) la velocità è $u_1 = 90$ m/min e la pressione è $p_1 = 138$ kN/m². Il tubo gradualmente si riduce da $D_1 = 150$ mm a $D_2 = 100$ mm. Calcolare: a) la pressione p_2 nel punto (2). Se la pressione nel punto (2) si riduce di $\Delta p = 100$ kN/m², calcolare: b) il nuovo diametro del tubo D_2' .

La velocità in unità fondamentali vale

$$u_1 = 90 \frac{\text{m}}{\text{min}} = \frac{90}{60} = 1.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$G_v = u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad u_2 = u_1 \frac{S_1}{S_2} = u_1 \frac{D_1^2}{D_2^2} = 1.5 \times \frac{150^2}{100^2} = 3.375 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

a) Dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 \quad \rightarrow \quad p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2) = 138 \times 10^3 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (1.5^2 - 3.375^2) = 133400 \text{ Pa} .$$

b) Dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha anche

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_1^2 + \frac{p_1}{\rho} &= \frac{1}{2} u_2'^2 + \frac{p_2 - \Delta p}{\rho} \quad \rightarrow \quad u_2'^2 = u_1^2 + 2 \frac{p_1 - p_2 + \Delta p}{\rho} \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad u_2' &= \sqrt{u_1^2 + 2 \frac{p_1 - p_2 + \Delta p}{\rho}} = \sqrt{1.5^2 + 2 \frac{138 \times 10^3 - 133400 + 100 \times 10^3}{1000}} = 14.54 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

e dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$G_v = u_1 S_1 = u_2' S_2' \quad \rightarrow \quad S_2' = S_1 \frac{u_1}{u_2'} \quad \rightarrow \quad D_2' = \sqrt{D_1^2 \frac{u_1}{u_2'}} = \sqrt{(150 \times 10^{-3})^2 \frac{1.5}{14.54}} = 0.0482 \text{ m} = 48.2 \text{ mm} .$$

Esercizio 4.2.13

L'ugello verticale di una fontanella trasforma la differenza di pressione $\Delta p = 0.2 \text{ bar}$ in velocità. Calcolare l'altezza verticale Z verso l'alto raggiunta dal getto trascurando la velocità dell'acqua nella tubazione di alimentazione e la lunghezza dell'ugello e considerando il fluido come ideale.

Dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

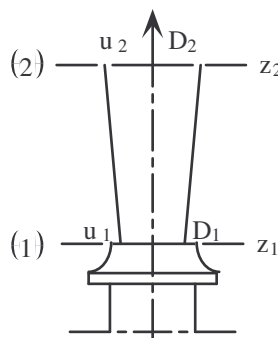
$$\frac{1}{2} u^2 = \frac{\Delta p}{\rho} \quad \rightarrow \quad u = \sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho}} = \sqrt{2 \times \frac{20000}{1000}} = 6.325 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e dalle leggi della cinematica si ha

$$\begin{aligned} 0 &= u + g t & t &= \frac{u}{g} = \frac{6.325}{9.80665} = 0.6450 \text{ s} \\ Z &= u t - \frac{1}{2} g t^2 & \rightarrow & \\ Z &= u t - \frac{1}{2} g t^2 = 6.325 \times 0.6450 - \frac{1}{2} \times 9.80665 \times 0.6450^2 = 2.04 \text{ m} . \end{aligned}$$

Esercizio 4.2.14

Un getto d'acqua, considerata come fluido ideale, è diretto verticalmente verso l'alto ed esce da un ugello di diametro $D_1 = 25 \text{ mm}$ con la velocità $u_1 = 12 \text{ m/s}$. Calcolare il diametro D_2 del getto in un punto $\Delta z = z_2 - z_1 = 4.5 \text{ m}$ sopra l'ugello. Si assume che la sezione del getto rimanga circolare.



Con riferimento alla figura, siano u_1 , D_1 e z_1 la velocità, il diametro e la altezza del getto, mentre siano u_2 , D_2 e z_2 i corrispondenti valori del livello superiore. In entrambe le sezioni l'acqua si trova alla pressione atmosferica $p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\frac{1}{2} u_1^2 + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + g z_1 = \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + g z_2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow u_2 = \sqrt{u_1^2 + 2g(z_1 - z_2)} = \sqrt{12^2 + 2 \times 9.80665 \times (-4.5)} = 7.466 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad u_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = u_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \quad \rightarrow \quad D_2 = D_1 \sqrt{\frac{u_1}{u_2}} = 25 \times \sqrt{\frac{12}{7.466}} = 31.7 \text{ mm} .$$

Esercizio 4.2.15

Un getto d'acqua, considerata come fluido ideale, è diretto verticalmente verso l'alto e nel punto (1) ha un diametro $D_1 = 75 \text{ mm}$ e una velocità $u_1 = 9 \text{ m/s}$. Calcolare il diametro D_2 nel punto (2) che si trova sopra il punto (1) di $\Delta z = z_2 - z_1 = 3 \text{ m}$. Si assume che la sezione del getto rimanga circolare.

In entrambe le sezioni l'acqua si trova alla pressione atmosferica $p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\frac{1}{2} u_1^2 + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + g z_1 = \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + g z_2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow u_2 = \sqrt{u_1^2 + 2g(z_1 - z_2)} = \sqrt{9^2 + 2 \times 9.80665 \times (-3)} = 4.707 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad u_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = u_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \quad \rightarrow \quad D_2 = D_1 \sqrt{\frac{u_1}{u_2}} = 75 \times \sqrt{\frac{9}{4.707}} = 104 \text{ mm} .$$

Esercizio 4.2.16

Un getto d'acqua, considerata come fluido ideale, di diametro $D_1 = 75 \text{ mm}$ alla sua base ($z_1 = 0$) sale verticalmente fino ad un'altezza $Z = 18 \text{ m}$. Determinare la relazione del suo diametro in funzione dell'altezza. Calcolare il diametro del getto a $z = 12 \text{ m}$ rispetto alla base. Si assume che la sezione del getto rimanga circolare.

Dalle leggi della cinematica si ha

$$0 = u_1 - g t \quad \rightarrow \quad u_1 = g t = 9.80665 \times 1.916 = 18.79 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Z = \frac{1}{2} g t^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2Z}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 18}{9.80665}} = 1.916 \text{ s}$$

Nella sezione di base e nella sezione generica l'acqua si trova alla pressione atmosferica $p_1 = p = p_{\text{atm}}$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\frac{1}{2} u_1^2 + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho} = \frac{1}{2} u^2 + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + g z \quad \rightarrow \quad u = \sqrt{u_1^2 - 2g z} .$$

Dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$u_1 S_1 = u S \quad \rightarrow \quad u_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = u \frac{\pi D^2}{4} \quad \rightarrow \quad D = D_1 \sqrt{\frac{u_1}{u}} = D_1 \sqrt{\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 - 2g z}}} .$$

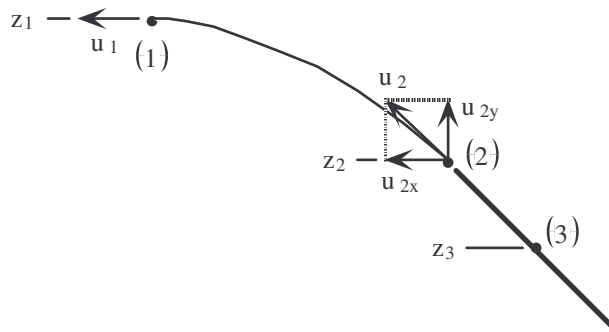
Per l'altezza richiesta, $z = 12 \text{ m}$, si ha

$$D = D_1 \sqrt{\frac{u_1}{u}} = D_1 \sqrt{\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 - 2g z}}} = 75 \times \sqrt{\frac{18.79}{\sqrt{18.79^2 - 2 \times 9.80665 \times 12}}} = 98.7 \text{ mm} .$$

Esercizio 4.2.17

Un getto d'acqua, considerata come fluido ideale, esce da un ugello inclinato, avente diametro $D_2 = 75 \text{ mm}$ e altezza $z_2 = 0.5 \text{ m}$, di un tubo, avente diametro $D_3 = 200 \text{ mm}$ e altezza $z_3 = 0$, e sale fino all'altezza $z_1 = 21.5 \text{ m}$

dove raggiunge la velocità $u_1 = 18 \text{ m/s}$. Si trascurano anche le perdite che il getto d'acqua incontra nell'aria. Calcolare: a) le velocità u_2 e u_3 e la portata G_v ; b) la pressione p_3 .



a) Nel punto (1) la velocità è orizzontale $u_{1x} = u_1$ e la componente verticale è nulla $u_{1y} = 0$, mentre nel punto (2), in base alle leggi della cinematica, la componente orizzontale è uguale a quella del punto (1) $u_{2x} = u_{1x}$, mentre per la componente verticale si ha

$$z_1 - z_2 = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \frac{u_{2y}^2}{g} \quad \rightarrow \quad u_{2y} = \sqrt{2 g (z_1 - z_2)} = \sqrt{2 \times 9.80665 \times (21.5 - 0.5)} = 20.29 \frac{\text{m}}{\text{s}} ;$$

$$0 = u_{2y} - g t \quad \rightarrow \quad t = \frac{u_{2y}}{g} \quad \rightarrow \quad t = \frac{20.29}{9.80665} = 2.07 \text{ s}$$

quindi, per la velocità del punto (2) si ha

$$u_2 = \sqrt{u_{2x}^2 + u_{2y}^2} = \sqrt{18.0^2 + 20.29^2} = 27.12 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Poi, dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$G_v = u_2 S_2 = u_3 S_3 \quad \rightarrow \quad u_3 = u_2 \frac{S_2}{S_3} = u_2 \frac{D_2^2}{D_3^2} = 27.12 \times \frac{75^2}{200^2} = 3.814 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

b) Nel punto (2) l'altezza è nulla $z_2 = 0$ e la pressione è uguale a quella atmosferica $p_2 = p_{\text{atm}}$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_{\text{atm}} + \rho g z_2 = \frac{1}{2} \rho u_3^2 + p_3 + \rho g z_3 \quad \rightarrow \quad p_3 = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho (u_2^2 - u_3^2) + \rho g (z_2 - z_3) =$$

$$= 101325 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (27.12^2 - 3.814^2) + 1000 \times 9.80665 \times (21.5 - 0.5) = 668 \times 10^3 \text{ Pa} .$$

Esercizio 4.2.18

Un tubo, entro cui circola la portata massica $G_m = 1 \text{ kg/s}$ di olio considerato come fluido ideale e avente massa volumica $\rho = 880 \text{ kg/m}^3$, subisce una riduzione del diametro da $D_1 = 50 \text{ mm}$ a $D_2 = 25 \text{ mm}$. Nel punto (1), più alto di $\Delta z = z_1 - z_2 = 2.5 \text{ m}$ rispetto al punto (2), vige la pressione $p_1 = 2 \text{ bar}$. Calcolare la pressione p_2 nel punto (2).

Dalla relazione fra portata massica e portata volumetrica (3.3) si ha

$$G_v = \frac{G_m}{\rho} = \frac{1}{880} = 0.001136 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

e dalla definizione di velocità media (3.5) si ha

$$u_1 = \frac{G_v}{S_1} = \frac{G_v}{\frac{\pi D_1^2}{4}} = \frac{0.001136}{\frac{\pi \times 0.050^2}{4}} = 0.579 \frac{\text{m}}{\text{s}} , \quad u_2 = \frac{G_v}{S_2} = \frac{G_v}{\frac{\pi D_2^2}{4}} = \frac{0.001136}{\frac{\pi \times 0.025^2}{4}} = 2.314 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5), in energie per unità di volume, si ha

$$\frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 + \rho g z_2 \quad \rightarrow \quad p_2 = p_1 + \rho \left[\frac{1}{2} (u_1^2 - u_2^2) + g \Delta z \right] =$$

$$= 2 \times 10^5 + 880 \times \left[\frac{1}{2} \times (0.579^2 - 2.314^2) + 9.80665 \times 2.5 \right] = 200000 - 2209 + 21570 = 219000 \text{ Pa}$$

e, in altezze, si ha

$$\frac{1}{2} \frac{u_1^2}{g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{1}{2} \frac{u_2^2}{g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \quad \rightarrow \quad \frac{p_2}{\rho g} = \frac{1}{g} \left[\frac{1}{2} (u_1^2 - u_2^2) + \frac{p_1}{\rho} \right] + \Delta z =$$

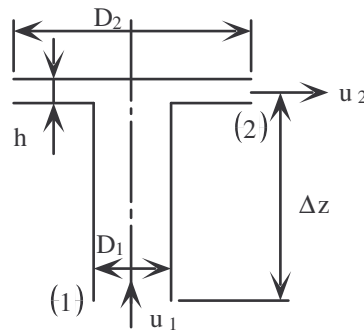
$$= \frac{1}{9.80665} \left[\frac{1}{2} \times (0.579^2 - 2.314^2) + \frac{2 \times 10^5}{880} \right] = -0.2559 + 23.19 + 2.5 = 25.4 \text{ m} .$$

Nelle normali applicazioni il termine piezometrico è di solito superiore a quelli cinetico e potenziale (o geometrico).

Poiché il teorema di Bernoulli è riferito ad un fluido ideale, nei calcoli non sono state considerate le perdite che nella realtà si verificano per attrito viscoso fra i punti (1) e (2).

Esercizio 4.2.19

Acqua, considerata come fluido ideale, sale lungo un tubo verticale, di diametro $D_1 = 0.2 \text{ m}$, ed entra in una camera anulare, di diametro massimo $D_2 = 0.6 \text{ m}$ e di altezza $h = 0.01 \text{ m}$, dove si muove di moto radiale dal centro verso la periferia. La pressione relativa nel punto (1) vale $p_1' = 70000 \text{ Pa}$ e la altezza del punto (2) rispetto al punto (1) vale $\Delta z = z_2 - z_1 = 1.5 \text{ m}$. Calcolare le velocità u_1 e u_2 nei punti (1) e (2) e la portata volumetrica G_v .



Dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad u_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = u_2 \pi D_2 h \quad \rightarrow \quad u_2 = u_1 \frac{D_1^2}{4 D_2 h} .$$

Nel punto (2) la pressione è uguale a quella atmosferica $p_2 = p_{atm}$; allora, sostituendo la relazione precedente nell'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5), si ha

$$\frac{1}{2} u_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 = \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{p_{atm}}{\rho} + g z_2 \quad \rightarrow \quad u_1^2 - u_1^2 \left(\frac{D_1^2}{4 D_2 h} \right)^2 = 2 \left(g \Delta z - \frac{p_1 - p_{atm}}{\rho} \right) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad u_1 = \frac{\sqrt{2 \left(g \Delta z - \frac{p_1}{\rho} \right)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{D_1^2}{4 D_2 h} \right)^2}} = \frac{\sqrt{2 \times \left(9.80665 \times 1.5 - \frac{70000}{1000} \right)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.2^2}{4 \times 0.6 \times 0.01} \right)^2}} = 7.887 \frac{\text{m}}{\text{s}} ;$$

inoltre si ha

$$u_2 = u_1 \frac{D_1^2}{4 D_2 h} = 7.887 \times \frac{0.2^2}{4 \times 0.6 \times 0.01} = 13.15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

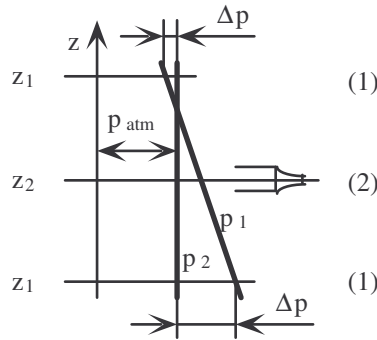
e quindi

$$G_v = u_1 S_1 = u_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = 7.887 \times \frac{\pi \times 0.2^2}{4} = 0.248 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$G_v = u_2 S_2 = u_2 \pi D_2 h = 13.15 \times \pi \times 0.6 \times 0.01 = 0.248 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Esercizio 4.2.20

Acqua, considerata come fluido ideale, esce alla velocità $u_2 = 10 \text{ m/s}$ da un ugello di diametro $D_2 = 10 \text{ mm}$ alimentato da un tubo di diametro $D_1 = 20 \text{ mm}$. Calcolare la differenza di pressione fra la posizione dell'ugello e quella di due possibili tubi di alimentazione: il primo, posto a $z_1 - z_2 = +5 \text{ m}$, proveniente dall'alto e il secondo, posto a $z_1 - z_2 = -5 \text{ m}$, proveniente dal basso.



Dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$u_1 = \frac{S_2}{S_1} u_2 = \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 u_2 = \left(\frac{0.1}{0.2} \right)^2 \times 10 = 2.50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 + \rho g z_1 &= \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 + \rho g z_2 \quad \rightarrow \quad \Delta p = p_2 - p_1 = \rho \left[\frac{1}{2} (u_1^2 - u_2^2) + g (z_1 - z_2) \right] = \\ &= 1000 \times \left[\frac{1}{2} \times (2.50^2 - 10^2) + 9.80665 \times (+5) \right] = 1000 \times (-46.88 + 49.03) = +2150 \text{ Pa} \\ &= 1000 \times \left[\frac{1}{2} \times (2.50^2 - 10^2) + 9.80665 \times (-5) \right] = 1000 \times (-46.88 - 49.03) = -95910 \text{ Pa} \end{aligned}$$

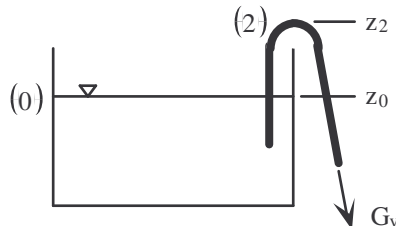
La pressione p_1 all'interno del tubo, calcolata rispetto alla posizione dell'ugello ($p_2 = p_{\text{atm}}$, $z_2 = 0$), vale

$$p_1 = p_2 - \Delta p = p_{\text{atm}} + \rho \left[\frac{1}{2} (u_2^2 - u_1^2) - g z_1 \right];$$

quindi essa va diminuendo se il tubo di alimentazione viene dall'alto, mentre va aumentando se il tubo viene dal basso.

Esercizio 4.2.21

Una portata volumetrica d'acqua, considerata come fluido ideale, pari a $G_v = 25 \text{ litri/s}$ scorre alla temperatura $T_2 = 60^\circ \text{C}$ in un sifone avente un diametro $D = 100 \text{ mm}$ senza alterare l'altezza del fluido nel serbatoio. Calcolare l'altezza z_2 , riferita al pelo libero z_0 , che fa raggiungere al fluido la pressione di evaporazione e quindi la rottura del flusso nel sifone.



Nel punto (0) la velocità è nulla $u_0 = 0$, la pressione è uguale a quella atmosferica $p_0 = p_{\text{atm}}$ e l'altezza è nulla $z_0 = 0$, mentre per la posizione (2) dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

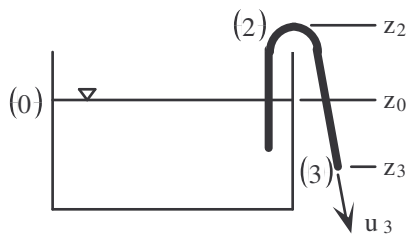
$$u_2 = \frac{G_v}{S_2} = \frac{4 G_v}{\pi D^2} = \frac{4 \times 25 \times 10^{-3}}{\pi \times (100 \times 10^{-3})^2} = 3.183 \frac{\text{m}}{\text{s}} ;$$

allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) e dalla tab. T.10, in cui viene letto il valore della tensione di vapore p_2 alla temperatura T_2 , si ha

$$\begin{aligned} \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} = \frac{1}{2} \frac{u_2^2}{g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \quad \rightarrow \quad z_2 = \frac{1}{g} \left(-\frac{1}{2} u_2^2 + \frac{p_{\text{atm}} - p_2}{\rho} \right) = \\ = \frac{1}{9.80665} \times \left(-\frac{1}{2} \times 3.183^2 + \frac{101325 - 20310}{1000} \right) = 7.74 \text{ m} . \end{aligned}$$

Esercizio 4.2.22

Un sifone ha un diametro uniforme $D = 75 \text{ mm}$ e consiste di un tubo curvo che ha la sommità ad un'altezza $z_2 = 1.8 \text{ m}$ sopra il pelo libero e che scarica nell'atmosfera acqua, considerata come fluido ideale, alla temperatura $T = 70^\circ \text{C}$ e all'altezza $z_3 = -3.6 \text{ m}$ sotto il pelo libero. Calcolare: a) la velocità di efflusso u_3 ; b) la portata G_v ; c) la pressione assoluta p_2 nel punto più elevato (2).



a) Con riferimento alla figura la pressione nei punti (0) e (3) è uguale a quella atmosferica $p_0 = p_3 = p_{\text{atm}}$ e la velocità nel punto (0) è nulla $u_0 = 0$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + g z_0 = \frac{1}{2} u_3^2 + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + g z_3 \quad \rightarrow \quad u_3 = \sqrt{2 g (z_0 - z_3)} = \sqrt{2 \times 9.80665 \times 3.6} = 8.403 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

b) Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_v = u_3 S = u_3 \frac{\pi D^2}{4} = 8.403 \times \frac{\pi \times (75 \times 10^{-3})^2}{4} = 0.0371 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 2230 \frac{\text{litri}}{\text{min}} .$$

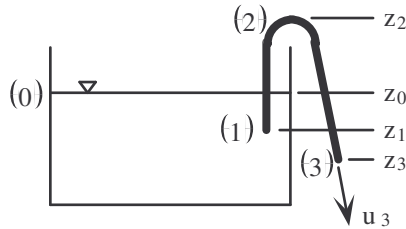
c) Nel punto (0) la velocità è nulla $u_0 = 0$, mentre nel punto (2) la velocità è uguale a quella di efflusso $u_2 = u_3$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\begin{aligned} p_{\text{atm}} + \rho g z_0 = \frac{1}{2} \rho u_3^2 + p_2 + \rho g z_2 \quad \rightarrow \quad p_2 = -\frac{1}{2} \rho u_3^2 + p_{\text{atm}} - \rho g (z_2 - z_0) = \\ = -\frac{1}{2} \times 1000 \times 8.403^2 + 101325 - 1000 \times 9.80665 \times 1.8 = 48400 \text{ Pa} . \end{aligned}$$

Nella tab. T.10 si legge che alla temperatura $T = 70^\circ \text{C}$ la tensione di vapore vale $p = 30700 \text{ Pa}$; di conseguenza l'acqua nel punto (2) non si trasforma in vapore e il deflusso nel sifone non si spezza.

Esercizio 4.2.23

Acqua, considerata come fluido ideale, è estratta alla temperatura $T = 70^\circ \text{C}$ da un serbatoio attraverso un sifone formato da un tubo curvo di diametro $D = 25 \text{ mm}$. Prendendo come piano di riferimento il fondo del serbatoio, l'acqua nel serbatoio è alta $z_0 = 1.5 \text{ m}$ e l'estremità di aspirazione del sifone si trova a $z_1 = 0.3 \text{ m}$. Il tratto ascendente del sifone è verticale e lungo $L = 6.2 \text{ m}$, mentre quello discendente è inclinato e scarica ad un'altezza $z_3 = -3 \text{ m}$. Calcolare: a) la velocità di efflusso u_3 ; b) la portata G_v circolante; c) la pressione p_2 nel punto più alto del sifone.



a) Con riferimento alla figura la pressione nei punti (0) e (3) è uguale a quella atmosferica $p_0 = p_3 = p_{atm}$ e la velocità nel punto (0) è nulla $u_0 = 0$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + g z_0 = \frac{1}{2} u_3^2 + \frac{p_{atm}}{\rho} + g z_3 \quad \rightarrow \quad u_3 = \sqrt{2 g (z_0 - z_3)} = \sqrt{2 \times 9.80665 \times (1.5 + 3)} = 9.395 \frac{m}{s} .$$

b) Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_v = u_3 S = u_3 \frac{\pi D^2}{4} = 9.395 \times \frac{\pi \times (25 \times 10^{-3})^2}{4} = 0.00461 \frac{m^3}{s} = 277 \frac{litri}{min} .$$

c) Per il punto (2) l'altezza è data da

$$z_2 = z_1 + L = 0.3 + 6.2 = 6.5 \text{ m}$$

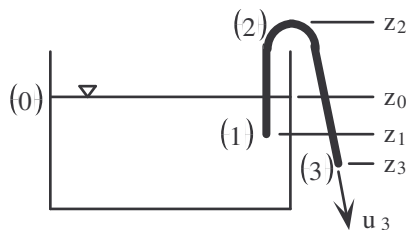
e la velocità è uguale a quella di efflusso $u_2 = u_3$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\begin{aligned} p_{atm} + \rho g z_0 &= \frac{1}{2} \rho u_3^2 + p_2 + \rho g z_2 \quad \rightarrow \quad p_2 = -\frac{1}{2} \rho u_3^2 + p_{atm} - \rho g (z_2 - z_0) = \\ &= -\frac{1}{2} \times 1000 \times 9.395^2 + 101325 - 1000 \times 9.80665 \times (6.5 - 1.5) = 8160 \text{ Pa} . \end{aligned}$$

Nella tab. T.10 si legge che alla temperatura $T = 70^\circ \text{C}$ la tensione di vapore vale $p = 30700 \text{ Pa}$; di conseguenza l'acqua, prima di arrivare nel punto (2), si trasforma in vapore e il deflusso nel sifone si spezza.

Esercizio 4.2.24

Acqua, considerata come fluido ideale, è estratta da un serbatoio attraverso un sifone formato da un tubo curvo di diametro $D = 25 \text{ mm}$. Prendendo come piano di riferimento il fondo del serbatoio, l'estremità di aspirazione del sifone si trova a $z_1 = 150 \text{ mm}$. Il tratto ascendente del sifone è verticale e quello discendente è inclinato e scarica ad una altezza $z_3 = -1.5 \text{ m}$. Assumendo che nel punto più alto (2) del sifone il flusso si interrompa quando la pressione assoluta equivale a $Z = 1.8 \text{ mCA}$, calcolare: a) la posizione limite z_2 del punto più alto (2) e la lunghezza limite L del tratto ascendente del sifone; b) la pressione p_1 nel punto (1) di aspirazione del sifone; c) la relazione fra la velocità limite u_3 dell'acqua nel sifone e l'altezza limite z_0 dell'acqua nel serbatoio.



a) Dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) espressa in unità di misura corrispondenti alle pressioni si ha

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g z = \text{cost} \quad [\text{Pa}] \quad \rightarrow \quad p_2 = \rho g Z = 1000 \times 9.80665 \times 1.8 = 17650 \text{ Pa} .$$

Nel punto (2) la velocità è uguale a quella di efflusso $u_2 = u_3$ e la pressione nel punto (3) è uguale a quella atmosferica $p_3 = p_{atm}$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\frac{1}{2} \frac{u_2^2}{g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = \frac{1}{2} \frac{u_3^2}{g} + \frac{p_{atm}}{\rho g} + z_3 \quad \rightarrow \quad z_2 = \frac{p_{atm} - p_2}{\rho g} + z_3 = \frac{101325 - 17650}{1000 \times 9.80665} - 1.5 = 7.032 \text{ m}$$

e la lunghezza limite del tubo ascendente del sifone è data da

$$L = z_2 + z_1 = 7.032 - 150 \times 10^{-3} = 6.88 \text{ m} .$$

b) Nel punto (1) la velocità è uguale a quella di efflusso $u_1 = u_3$ e la pressione nel punto (3) è uguale a quella atmosferica $p_3 = p_{\text{atm}}$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2} \rho u_3^2 + p_{\text{atm}} + \rho g z_3 \quad \rightarrow \quad p_1 = p_{\text{atm}} + \rho g (z_3 - z_1) =$$

$$= 101325 + 1000 \times 9.80665 \times (-1.5 - 150 \times 10^{-3}) = 85140 \text{ Pa} .$$

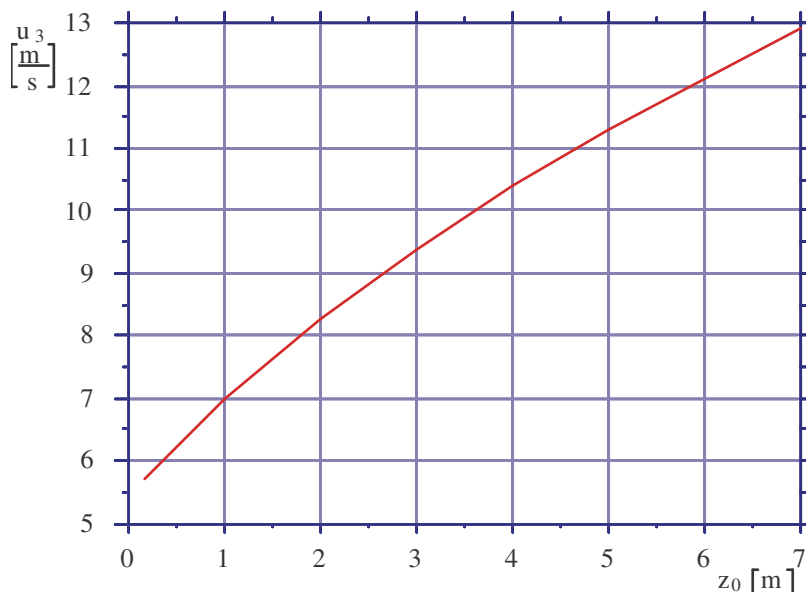
c) La velocità limite di efflusso u_3 dipende solo dall'altezza limite z_0 dell'acqua nel serbatoio e non altera la distribuzione delle pressioni trovate. La pressione nei punti (0) e (3) è uguale a quella atmosferica $p_0 = p_3 = p_{\text{atm}}$ e la velocità nel punto (0) è nulla $u_0 = 0$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si hanno i valori minimo e massimo della velocità in corrispondenza delle altezze minima ($z_0 = z_3$) e massima ($z_0 = z_2$) che il livello del fluido può assumere nel serbatoio

$$\frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + g z_0 = \frac{1}{2} u_3^2 + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + g z_3 \quad \rightarrow \quad u_3 = \sqrt{2 g (z_0 - z_3)} \quad \rightarrow$$

$$u_{3\text{min}} = \sqrt{2 \times 9.80665 \times (150 \times 10^{-3} + 1.5)} = 5.69 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

$$\rightarrow u_{3\text{max}} = \sqrt{2 \times 9.80665 \times (7.032 + 1.5)} = 12.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nel diagramma seguente è riportata la legge di variazione della velocità di efflusso u_3 in funzione dell'altezza del serbatoio z_0 variabile fra i valori possibili minimo z_3 e massimo z_2 .



Esercizio 4.2.25

La sezione di una condotta orizzontale, attraverso cui defluisce con moto stazionario una portata massica d'aria, considerata come fluido ideale, pari a $G_m = 0.5 \text{ kg/s}$ alla pressione $p = 2.5 \text{ bar}$ e alla temperatura $T = 20^\circ \text{C}$, subisce una diminuzione da $S_1 = 700 \text{ cm}^2$ a $S_2 = 250 \text{ cm}^2$. Calcolare la variazione di pressione nel tratto in cui si verifica la riduzione di sezione.

Dalla equazione di stato dei gas (1.10) e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica R , si ha

$$\rho = \frac{p}{R T} = \frac{2.5 \times 10^5}{287 \times 293} = 2.973 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ,$$

dalla relazione fra portata massica e portata volumetrica (3.3) e dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$G_v = \frac{G_m}{\rho} = \frac{0.5}{2.973} = 0.1682 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} u_1 &= \frac{G_v}{S_1} = \frac{0.1682}{700 \times 10^{-4}} = 2.403 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ u_2 &= \frac{G_v}{S_2} = \frac{0.1682}{250 \times 10^{-4}} = 6.728 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

e dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 + \rho g z_1 &= \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 + \rho g z_2 \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad \Delta p &= p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2) = \times 2.97 \times (2.40^2 - 6.72^2) = -58.7 \text{ Pa} . \end{aligned}$$

Poiché la velocità e quindi l'energia cinetica aumentano, l'energia di pressione e quindi la pressione diminuiscono.

Esercizio 4.2.26

Un flusso di ossigeno, considerato come fluido compressibile ma non viscoso, percorre un tubo orizzontale alla temperatura costante $T = 15^\circ\text{C} = 288 \text{ K}$ passando da un tratto con diametro $D_1 = 50 \text{ mm}$, in cui la pressione è $p_1 = 1.5 \text{ bar}$, ad un tratto con diametro $D_2 = 40 \text{ mm}$, in cui la pressione è $p_2 = 1.2 \text{ bar}$. Calcolare le velocità nei due tratti di tubo in condizioni di compressibilità isoterma.

Dalla legge di conservazione della massa (3.8) per un fluido compressibile si ha

$$u_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{S_2}{S_1} u_2 ;$$

sostituendo la relazione precedente nell'equazione di Bernoulli in condizioni di compressibilità isoterma (4.6) e ricordando che $z_1 = z_2$, si ha

$$\frac{1}{2} u_2^2 - \frac{1}{2} u_1^2 = \frac{1}{2} u_2^2 \left[1 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right] = R T \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \quad \rightarrow \quad u_2 = \sqrt{\frac{2 R T \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right)}{1 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{S_2}{S_1} \right)^2}} .$$

Dalla legge della trasformazione isoterma (1.15) si ha

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1.2}{1.5} = 0.8$$

e, poiché le aree delle superfici circolari sono invece direttamente proporzionali ai quadrati dei diametri, si ha

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 = \left(\frac{40}{50} \right)^2 = 0.64 .$$

Dall'equazione di Bernoulli prima trovata e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica dei gas R, si ha

$$u_2 = \sqrt{\frac{2 R T \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right)}{1 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{S_2}{S_1} \right)^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 262 \times 288 \ln \left(\frac{1.5}{1.2} \right)}{1 - (0.8 \times 0.64)^2}} = 213.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e quindi

$$u_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{S_2}{S_1} u_2 = 0.8 \times 0.64 \times 213.6 = 109.4 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Esercizio 4.2.27

In un serbatoio alla pressione di $p_1 = 1.5 \text{ bar}$ e alla temperatura di $T_1 = 15^\circ\text{C} = 288 \text{ K}$ si trova anidride car-

bonica, considerata come fluido compressibile ma non viscoso, che si scarica verso l'atmosfera attraverso una piccola apertura della parete del serbatoio. Calcolare la velocità di efflusso in condizioni di incompressibilità e di compressibilità adiabatica.

Dall'equazione di stato dei gas perfetti (1.10) e dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica dei gas R , si ha

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R T_1} = \frac{1.5 \times 10^5}{189 \times 288} = 2.756 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} .$$

La velocità nel serbatoio è nulla $u_1 = 0$, le altezze all'entrata e all'uscita dell'apertura sono uguali $z_1 = z_2$ e la pressione di scarico è uguale a quella atmosferica $p_2 = p_{\text{atm}}$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\frac{p_2}{\rho_1} = \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{p_2}{\rho_1} \quad \rightarrow \quad u_2 = \sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{\rho_1}} = \sqrt{2 \times \frac{1.5 \times 10^5 - 101325}{2.756}} = 187.9 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Dalla equazione di Bernoulli in condizioni di compressibilità adiabatica (4.7) e dalla tab. T.4, in cui viene letto l'esponente della trasformazione adiabatica γ , si ha

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1} p_1^{(\gamma-1)/\gamma} &= \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1} p_2^{(\gamma-1)/\gamma} \quad \rightarrow \quad u_2 = \sqrt{2 \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1} \left[p_1^{(\gamma-1)/\gamma} + p_2^{(\gamma-1)/\gamma} \right]} = \\ &= \sqrt{2 \times \frac{1.299}{1.299-1} \frac{(1.5 \times 10^5)^{1/1.299}}{2.756} \left[(1.5 \times 10^5)^{(1.299-1)/1.299} + 101325^{(1.299-1)/1.299} \right]} = 202.1 \frac{\text{m}}{\text{s}} . \end{aligned}$$

Dalla legge della trasformazione politropica (1.17) con $n = \gamma$ si ha

$$\rho_2 = \rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\gamma} = 2.756 \times \left(\frac{101325}{150000} \right)^{1/1.299} = 2.038 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} .$$

In condizioni di incompressibilità, quindi, si sottostima il valore della velocità di una quantità pari a

$$\frac{187.9 - 202.1}{202.1} = -7.0 \%$$

e si sovrastima il valore della massa volumica di una quantità pari a

$$\frac{2.756 - 2.038}{2.038} = +35.2 \%$$

4.3.- APPLICAZIONI DELL'EQUAZIONE DI BERNOULLI

Esercizio 4.3.1

Una portata volumetrica $G_v = 0.01 \text{ m}^3/\text{s}$ d'acqua, considerata come fluido ideale, entra in un contenitore cilindrico che sul fondo presenta un foro di diametro $D = 40 \text{ mm}$ dal quale esce acqua per gravità. Calcolare l'altezza Δz di equilibrio che consente di far uscire dal foro posto in basso la portata d'acqua entrante dall'alto.

La portata volumetrica entrante nel contenitore deve essere uguale a quella uscente dal foro; dalla legge della portata volumetrica (3.4) e dal teorema di Torricelli (4.8) si ha

$$G_v = u S = \sqrt{2 g \Delta z} \frac{\pi D^2}{4} \quad \rightarrow \quad \Delta z = \frac{8}{g} \left(\frac{G_v}{\pi D^2} \right)^2 = \frac{8}{9.80665} \times \left[\frac{0.01}{\pi \times (40 \times 10^{-3})^2} \right]^2 = 3.23 \text{ m} .$$

Esercizio 4.3.2

Calcolare le portate teoriche volumetrica e massica dell'acqua, considerata come fluido ideale, che defluiscono attraverso una bocca di diametro $D = 10 \text{ cm}$ sotto un battente $\Delta z = 10 \text{ m}$.

Dal teorema di Torricelli (4.8) si ha

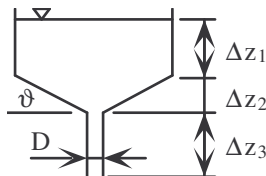
$$u = \sqrt{2 g \Delta z} = \sqrt{2 \times 9.80665 \times 10} = 14.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e dalla relazione fra portata massica e volumetrica (3.3) e dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_v = u S = u \frac{\pi D^2}{4} = 14.0 \times \frac{\pi \times 0.1^2}{4} = 0.1100 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} , \quad G_m = \rho G_v = 1000 \times 0.1100 = 110 \frac{\text{kg}}{\text{s}} .$$

Esercizio 4.3.3

Nel serbatoio riportato in figura le misure sono $\Delta z_1 = 2 \text{ m}$, $\Delta z_2 = 0.5 \text{ m}$, $\Delta z_3 = 4 \text{ m}$, $\vartheta = 30^\circ$ e $D = 100 \text{ mm}$. Calcolare la velocità u e la portata volumetrica G_v dell'acqua, considerata come fluido ideale, che esce dall'ugello del tubo verticale.



Dal teorema di Torricelli (4.8) si ha

$$u = \sqrt{2 g \Delta z} = \sqrt{2 g (\Delta z_1 + \Delta z_2 + \Delta z_3)} = \sqrt{2 \times 9.80665 \times (2 + 0.5 + 4)} = 11.29 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Da notare che la velocità di efflusso dipende solo dal battente fra pelo libero e posizione dell'ugello e non dalla geometria del sistema, come dimensioni del serbatoio e orientazione dell'ugello, ecc.

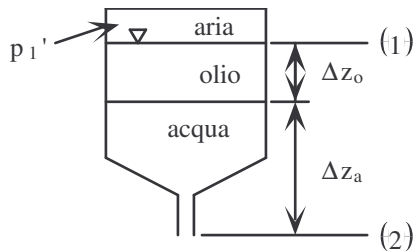
Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_v = u S = u \frac{\pi D^2}{4} = 11.29 \times \frac{\pi \times (100 \times 10^{-3})^2}{4} = 0.0887 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} .$$

Da notare che la portata non dipende dall'orientazione dell'ugello, ma solo dalla sezione di passaggio del fluido.

Esercizio 4.3.4

Un serbatoio contiene aria, su cui grava la pressione relativa $p_1' = 35 \text{ kPa}$, olio, di massa volumica $\rho_o = 800 \text{ kg/m}^3$ e di altezza $\Delta z_o = 1 \text{ m}$, e acqua, di altezza $\Delta z_a = 3 \text{ m}$. Tutti i fluidi sono considerati ideali. Calcolare: a) la velocità u_2 di scarico dell'acqua; b) l'energia cinetica e_c per unità di massa allo scarico.



a) In corrispondenza del pelo libero la velocità vale $u_1 = 0$, la pressione assoluta vale $p_1 = p_1' + p_{atm}$ e l'energia potenziale in base all'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) espressa in unità di pressione vale $\rho \cdot g \cdot z_1 = \rho_o \cdot g \cdot \Delta z_o + \rho_a \cdot g \cdot \Delta z_a$, mentre allo scarico l'energia potenziale espressa in unità di pressione vale $\rho \cdot g \cdot z_2 = 0$ e la pressione assoluta è uguale a quella atmosferica $p_2 = p_{atm}$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$p_1' + p_{atm} + \rho_o g \Delta z_o + \rho_a g \Delta z_a = \frac{1}{2} \rho_a u_2^2 + p_{atm} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \rho_a u_2^2 = p_1' + g (\rho_o \Delta z_o + \rho_a \Delta z_a) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow u_2 = \sqrt{2 \left[\frac{p_1'}{\rho_a} + g \times \left(\frac{\rho_o}{\rho_a} \Delta z_o + \Delta z_a \right) \right]} = \sqrt{2 \times \left[\frac{35 \times 10^3}{1000} + 9.80665 \times \left(\frac{800}{1000} \times 1 + 3 \right) \right]} = 12.0 \frac{m}{s} .$$

Si ottiene lo stesso risultato applicando l'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) a due punti A e B infinitesimamente vicini, A appena all'interno e B appena all'esterno del tubo di efflusso. Le energie potenziali sono uguali $\rho_a \cdot g \cdot z_A = \rho_a \cdot g \cdot z_B$ e la variazione di energia di pressione Δp si trasforma in variazione di energia di velocità $1/2 \cdot \rho_a \cdot \Delta u^2$

$$\Delta p = p_A - p_B = p_1' + p_{atm} + \rho_o g \Delta z_o + \rho_a g \Delta z_a - p_{atm} = p_1' + \rho_o g \Delta z_o + \rho_a g \Delta z_a$$

$$\frac{1}{2} \rho_a \Delta u^2 = \frac{1}{2} \rho_a (u_B^2 - u_A^2) ;$$

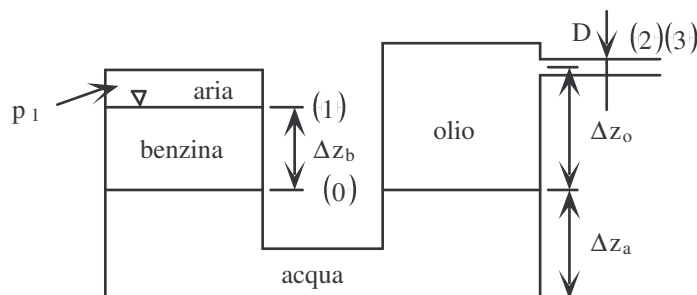
se si prende $u_A = 0$, si ottiene $u_B = u_2$.

b) Dalla definizione di energia cinetica per unità di massa si ha

$$e_c = \frac{1}{2} u_2^2 = \frac{1}{2} \times 12.0^2 = 72.0 \frac{J}{kg} .$$

Esercizio 4.3.5

Due serbatoi collegati fra loro contengono aria, su cui grava la pressione assoluta $p_1 = 150000$ Pa, benzina, di massa volumica $\rho_b = 680$ kg/m³ e di altezza $\Delta z_b = 2$ m, olio, di massa volumica $\rho_o = 800$ kg/m³ e di altezza $\Delta z_o = 3$ m, e acqua di altezza $\Delta z_a = 2$ m. Il diametro del tubo di scarico è $D = 20$ mm. Tutti i fluidi sono considerati ideali. Calcolare la portata volumetrica G_v di scarico dell'olio.



I due serbatoi, collegati nella parte inferiore, si comportano come un manometro differenziale; allora in corrispondenza del livello (0), al di sotto del quale si trova solo acqua, la pressione p_{0s} nel serbatoio di sinistra è uguale alla pressione p_{0d} nel serbatoio di destra

$$p_{0s} = p_{0d} \quad \rightarrow \quad p_1 + \rho_b g \Delta z_b = p_2 + \rho_o g \Delta z_o \quad \rightarrow \quad p_2 = p_1 + g (\rho_b \Delta z_b - \rho_o \Delta z_o)$$

dove il punto (2) si trova all'interno del tubo di scarico in una posizione infinitesimamente vicina al bordo di uscita. Il punto (3), invece, si trova all'esterno del tubo di scarico in una posizione infinitesimamente vicina al bordo di uscita; allora le energie potenziali dei punti (2) e (3) sono uguali $\rho_a \cdot g \cdot z_2 = \rho_a \cdot g \cdot z_3$ e la variazione di e-

nergia di pressione Δp fra interno ed esterno del tubo si trasforma in variazione di energia di velocità $1/2 \cdot \rho_a \cdot \Delta u^2$ dell'acqua. Nel punto (3) la pressione è uguale a quella atmosferica $p_3 = p_{atm}$ e, ponendo $u_2 = 0$, dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

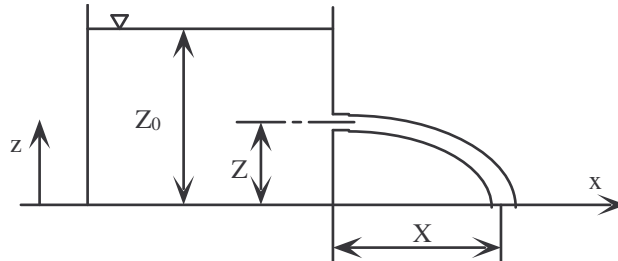
$$\begin{aligned} \frac{p_2}{\rho_0} = \frac{1}{2} u_3^2 + \frac{p_{atm}}{\rho_0} &\rightarrow \frac{1}{2} u_3^2 = \frac{p_1}{\rho_0} + g \left(\frac{\rho_b}{\rho_0} \Delta z_b + \Delta z_0 \right) - \frac{p_{atm}}{\rho_0} \rightarrow \\ &\rightarrow u_3 = \sqrt{2 \left[\frac{p_1 - p_{atm}}{\rho_0} + g \left(\frac{\rho_b}{\rho_0} \Delta z_b + \Delta z_0 \right) \right]} = \\ &= \sqrt{2 \times \left[\frac{150000 - 101325}{800} + 9.80665 \times \left(\frac{680}{800} \times 2 + 3 \right) \right]} = 9.808 \frac{m}{s} . \end{aligned}$$

Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_v = u_3 S = u_3 \frac{\pi D^2}{4} = 9.808 \times \frac{\pi \times (20 \times 10^{-3})^2}{4} = 0.00308 \frac{m^3}{s} = 185 \frac{litri}{min} .$$

Esercizio 4.3.6

Un serbatoio riempito d'acqua, considerata come fluido ideale, con pelo libero ad altezza costante Z_0 presenta all'altezza Z un foro di scarico. Calcolare l'altezza Z del foro che consente al getto di raggiungere la massima distanza X dal serbatoio.



Dal teorema di Torricelli (4.8) si ha

$$u = \sqrt{2 g (Z_0 - Z)}$$

e il tempo impiegato dal getto nel percorrere la distanza X con la velocità di uscita u è uguale al tempo di caduta libera dall'altezza Z

$$t = \sqrt{\frac{2 Z}{g}} .$$

La distanza X diventa allora

$$X = u t = \sqrt{2 g (Z_0 - Z)} \sqrt{\frac{2 Z}{g}} = \sqrt{4 (Z_0 Z - Z^2)}$$

e, uguagliando a zero la derivata di X rispetto a Z

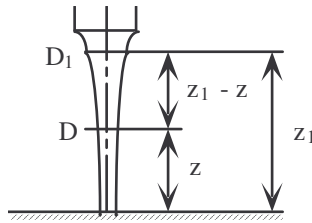
$$\frac{dX}{dZ} = \frac{d}{dZ} \left[\sqrt{4 (Z_0 Z - Z^2)} \right] = \frac{1}{2} \frac{Z_0 - 2 Z}{\sqrt{4 (Z_0 Z - Z^2)}} = 0 ,$$

si ottiene il massimo della funzione $X = X(Z)$

$$\frac{dX}{dZ} = 0 \rightarrow Z_0 - 2 Z = 0 \rightarrow Z = \frac{Z_0}{2} .$$

Esercizio 4.3.7

Da un ugello di diametro D_1 posto all'altezza z_1 esce un getto di acqua, considerata come fluido ideale, verso il basso alla velocità u_1 . Trovare la legge di variazione del diametro del getto D in funzione dell'altezza z .



Se il fluido è ideale e se il flusso avviene a bassa velocità, si può supporre che il getto rimanga compatto; allora dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$G_v = u_1 \frac{\pi D_1^2}{4} = u \frac{\pi D^2}{4} \quad \rightarrow \quad u_1 D_1^2 = u D^2$$

dove la velocità u all'altezza generica z è incrementata, rispetto alla velocità u_1 , di una quantità calcolabile mediante il teorema di Torricelli (4.8)

$$u = u_1 + \sqrt{2 g (z_1 - z)} ;$$

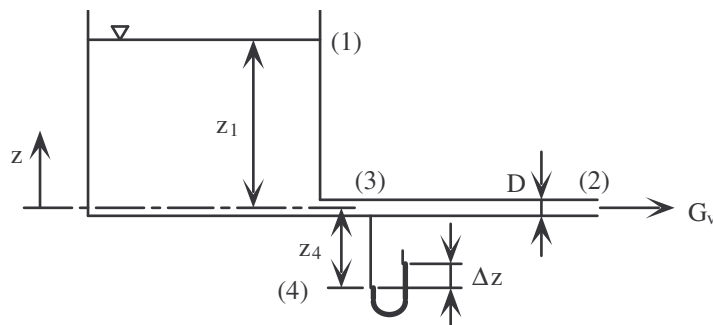
sostituendo quest'ultima relazione in quella precedente si ha

$$u_1 D_1^2 = u D^2 \quad \rightarrow \quad u_1 D_1^2 = [u_1 + \sqrt{2 g (z_1 - z)}] D^2 \quad \rightarrow \quad D = D_1 \sqrt{\frac{u_1}{u_1 + \sqrt{2 g (z_1 - z)}}} .$$

Teoricamente, quindi, la velocità tende progressivamente ad aumentare con legge direttamente proporzionale alla radice quadrata dell'altezza, mentre il diametro del getto tende progressivamente a restringersi con legge inversamente proporzionale alla radice quadrata dell'altezza.

Esercizio 4.3.8

Un serbatoio riempito d'acqua, considerata come fluido ideale, ha il pelo libero ad altezza costante $z_1 = 4$ m e presenta all'altezza $z_3 = z_2 = 0$ un tubo di scarico di diametro $D = 10$ mm; nel punto (3) è inserito fra acqua e aria atmosferica un manometro differenziale a mercurio il cui pelo libero (4) fra acqua e mercurio si trova alla altezza $z_4 = -0.5$ m. Calcolare: a) la velocità nei punti (2) e (3) $u_2 = u_3$; b) la portata volumetrica G_v ; c) la differenza di altezza Δz nel manometro differenziale.



- a) Dal teorema di Torricelli (4.8) si ha

$$u_2 = u_3 = \sqrt{2 g z_1} = \sqrt{2 \times 9.80665 \times 4} = 8.857 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

- b) Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_v = u_2 S = u_2 \frac{\pi D^2}{4} = 8.857 \times \frac{\pi \times (10 \times 10^{-3})^2}{4} = 0.000696 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \approx 0.7 \frac{\text{litri}}{\text{s}} .$$

- c) Il tubo è orizzontale ($z_3 = z_2$) e le velocità sono uguali ($u_2 = u_3$); allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$p_3 = p_2 = p_{\text{atm}} .$$

Dalla legge di Stevin per un fluido incompressibile (2.7) nel ramo di sinistra del manometro differenziale si ha

$$p_4 = p_3 + \rho g (z_3 - z_4) = p_{\text{atm}} - \rho g z_4$$

e nel ramo di destra del manometro differenziale si ha

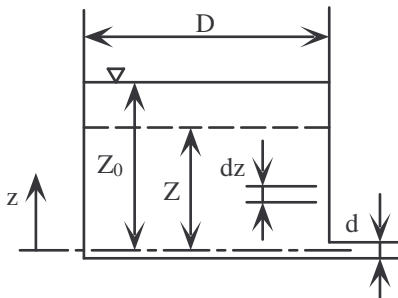
$$p_4 = p_{\text{atm}} + \rho_M g \Delta z ;$$

infine, dall'uguaglianza delle due relazioni e dalla tab. T.1 in cui viene letto il valore della massa volumica ρ_M del mercurio, si ha

$$p_{\text{atm}} - \rho g z_4 = p_{\text{atm}} + \rho_M g \Delta z \quad \rightarrow \quad \Delta z = -\frac{\rho z_4}{\rho_M} = -\frac{1000 \times (-0.5)}{13595} = 0.0368 \text{ m} = 36.8 \text{ mm} .$$

Esercizio 4.3.9

Un serbatoio di diametro $D = 70$ cm riempito d'acqua, considerata come fluido ideale, con pelo libero ad altezza $Z_0 = 0.61$ m presenta a $z = 0$ un tubo di scarico di diametro $d = 2$ mm. Calcolare: a) la legge dell'altezza Z del pelo libero in funzione del tempo t trascorso; b) il tempo t di svuotamento del recipiente.



La portata volumetrica di acqua uscente dal foro deve essere uguale a quella corrispondente al calo di livello nel recipiente

$$G_v = u \frac{\pi d^2}{4} = w \frac{\pi D^2}{4} \quad \rightarrow \quad u d^2 = w D^2$$

dove u è la velocità di efflusso e w è la velocità di abbassamento del pelo libero.

a) Dalla relazione precedente e dal teorema di Torricelli (4.8) si ha

$$\sqrt{2gz} d^2 = w D^2 \quad \rightarrow \quad w = \sqrt{2gz} \frac{d^2}{D^2} \quad \rightarrow \quad dz = w dt = \sqrt{2gz} \frac{d^2}{D^2} dt ;$$

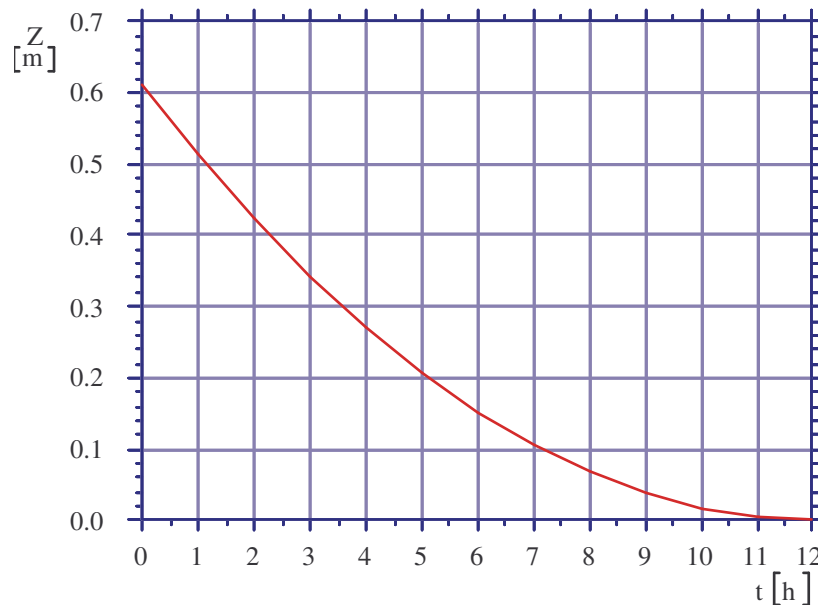
separando le variabili e integrando nell'altezza fra Z_0 e Z e nel tempo da 0 a t , si ha

$$\int_{Z_0}^Z \frac{dz}{\sqrt{2gz}} = \int_0^t \frac{d^2}{D^2} dt \quad \rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{2g}} \left[\sqrt{z} \right]_{Z_0}^Z = \frac{d^2}{D^2} [t]_0^t \quad \rightarrow \quad \sqrt{\frac{2}{g}} Z = \sqrt{\frac{2}{g}} Z_0 - \frac{d^2}{D^2} t \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad Z = \left[\sqrt{\frac{2}{g}} \left(\sqrt{\frac{2}{g}} Z_0 - \frac{d^2}{D^2} t \right) \right]^2 = \left(\sqrt{Z_0} - \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{d^2}{D^2} t \right)^2 .$$

Dalla relazione precedente si hanno la tabella e il grafico seguenti.

tempo [h]	altezza [m]
0	0.6100
1	0.5126
2	0.4236
3	0.3432
4	0.2712
5	0.2076
6	0.1526
7	0.1060
8	0.0678
9	0.0382
10	0.0170
11	0.0043
12	0.0000



b) L'altezza Z si annulla quando il tempo vale

$$\sqrt{Z_0} - \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{d^2}{D^2} t = 0 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2Z_0}{g}} \frac{D^2}{d^2} = \sqrt{\frac{2 \times 0.610}{9.80665}} \times \frac{(70 \times 10^{-2})^2}{(2 \times 10^{-3})^2} = 43200 \text{ s} = 12 \text{ h} .$$

Da notare che il tempo di svuotamento del contenitore non è infinito, perché la legge dell'altezza in funzione del tempo è quadratica e non esponenziale.

Esercizio 4.3.10

Nell'antico Egitto recipienti circolari riempiti d'acqua con un foro sul fondo erano usati come orologi; l'acqua uscendo dal foro abbassava il livello del pelo libero di una quantità rapportabile al tempo trascorso. Considerando l'acqua come fluido ideale, trovare: a) la legge del diametro del recipiente D in funzione del livello z e della velocità w del suo abbassamento. Il foro ha il diametro d = 2 mm e il recipiente ha il diametro D = 70 cm. Calcolare: b) il volume d'acqua necessario a far operare l'orologio per n = 12 ore; c) la posizione delle tacche nelle 12 ore.

a) La portata volumetrica di acqua uscente dal foro deve essere uguale a quella corrispondente al calo di livello nel recipiente

$$G_v = u \frac{\pi d^2}{4} = w \frac{\pi D^2}{4} \quad \rightarrow \quad u d^2 = w D^2$$

dove u è la velocità di efflusso dal recipiente e w è la velocità di abbassamento del pelo libero. Dalla relazione precedente e dal teorema di Torricelli (4.8) si ha

$$\sqrt{2gz} d^2 = w D^2 \quad \rightarrow \quad D = \sqrt{\sqrt{2gz} \frac{d^2}{w}} .$$

b) Con la stessa procedura si ha anche

$$\sqrt{2gz} d^2 = w D^2 \quad \rightarrow \quad w = \sqrt{2gz} \frac{d^2}{D^2} \quad \rightarrow \quad dz = w dt = \sqrt{2gz} \frac{d^2}{D^2} dt$$

per cui, separando le variabili e integrando nell'altezza fra 0 e Z e nel tempo da 0 a 3600 n, si ha

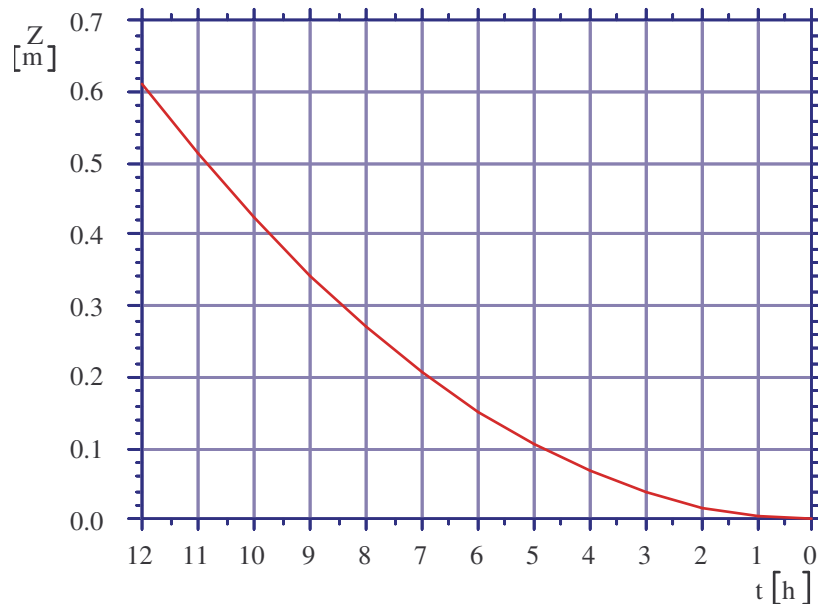
$$\begin{aligned} \int_0^Z \frac{dz}{\sqrt{2gz}} &= \int_0^{3600n} \frac{d^2}{D^2} dt \quad \rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{2g}} [\sqrt{z}]_0^Z = \frac{d^2}{D^2} [t]_0^{3600n} \quad \rightarrow \quad \sqrt{Z} = \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{d^2}{D^2} 3600n \quad \rightarrow \\ &\rightarrow \quad Z = \left(\sqrt{\frac{g}{2}} \frac{d^2}{D^2} 3600n \right)^2 = \left[\sqrt{\frac{9.80665}{2}} \times \frac{(2 \times 10^{-3})^2}{(70 \times 10^{-2})^2} 3600 \times 12 \right]^2 = 0.610 \text{ m} \end{aligned}$$

dove Z è l'altezza totale del fluido nel serbatoio. Il volume d'acqua è quindi uguale a

$$V = \frac{\pi D^2}{4} Z = \frac{\pi \times (70 \times 10^{-2})^2}{4} \times 0.610 = 0.235 \text{ m}^3.$$

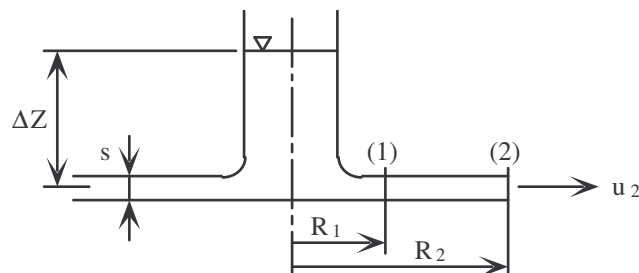
c) Dalla relazione precedente per $n = 12, 11, \dots, 2, 1$ si hanno la tabella e il grafico seguenti. Dalla tabella e dal grafico si nota che le tacche sono posizionate a distanze non costanti perché la velocità w dipende dalla radice quadrata del battente z .

tempo [h]	altezza [m]
0	0.6100
1	0.5126
2	0.4236
3	0.3432
4	0.2712
5	0.2076
6	0.1526
7	0.1060
8	0.0678
9	0.0382
10	0.0170
11	0.0043
12	0.0000



Esercizio 4.3.11

Due dischi orizzontali di raggio $R_2 = 0.25 \text{ m}$ si trovano alla distanza $s = 2 \text{ mm}$ e quello superiore, tramite un foro centrale, è alimentato da un battente costante $\Delta Z = 0.5 \text{ m}$ di acqua considerata come fluido ideale. Calcolare: a) la portata G_v ; b) la velocità u_1 e la pressione p_1 nella posizione (1) di raggio $R_1 = 0.1 \text{ m}$; c) la forza totale F esercitata dal fluido sul disco inferiore fra il raggio R_1 e il raggio R_2 .



a) Dal teorema di Torricelli (4.8) si ha

$$u_2 = \sqrt{2g \Delta Z} = \sqrt{2 \times 9.80665 \times 0.5} = 3.132 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_v = u_2 S_2 = u_2 2\pi R_2 s = 3.132 \times 2 \times \pi \times 0.25 \times 2 \times 10^{-3} = 0.00984 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 9.84 \frac{\text{litri}}{\text{s}} .$$

b) Dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$G_v = u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad u_1 2\pi R_1 s = u_2 2\pi R_2 s \quad \rightarrow \quad u_1 R_1 = u_2 R_2$$

cioè la legge della sorgente esaminata nell'esercizio 4.1.7; di conseguenza si ha

$$u_1 = u_2 \frac{R_2}{R_1} = 3.132 \times \frac{0.25}{0.10} = 7.830 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

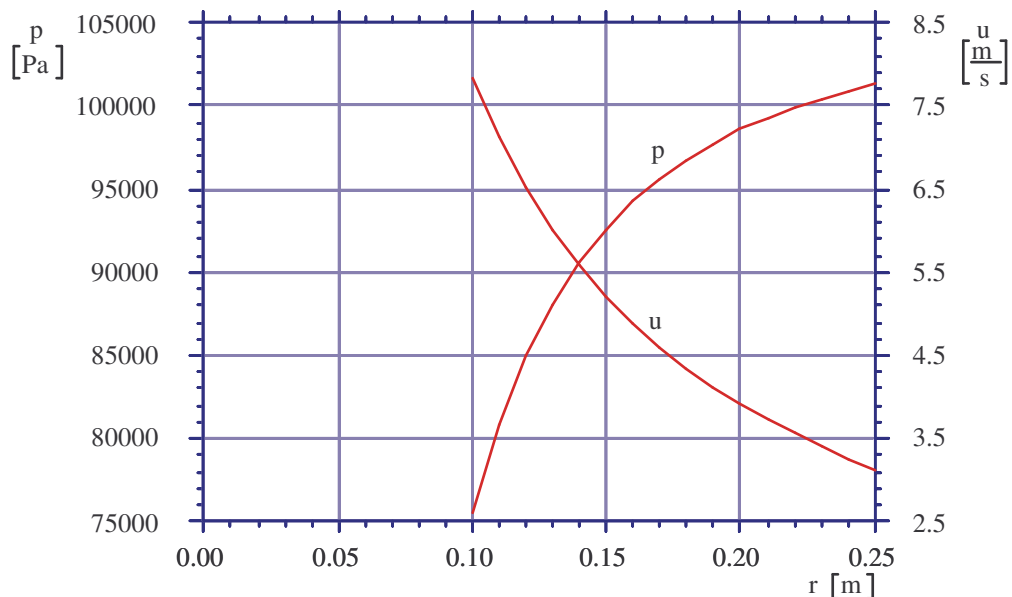
La velocità, partendo dal valore di uscita, aumenta con una legge tendente all'infinito positivo quando il raggio tende a zero.

Si verifica che $z_1 = z_2$ e che $p_2 = p_{\text{atm}}$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) e dalla relazione precedente si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 &= \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_{\text{atm}} \quad \rightarrow \quad p_1 = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho (u_2^2 - u_1^2) = \\ &= p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho u_2^2 \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) = 101325 + \frac{1}{2} \times 1000 \times 3.132^2 \times \left(1 - \frac{0.25^2}{0.10^2} \right) = 75600 \text{ Pa} . \end{aligned}$$

La pressione, partendo dal valore atmosferico, diminuisce con una legge tendente all'infinito negativo quando il raggio tende a zero. Teoricamente quindi esiste un valore del raggio in corrispondenza del quale la pressione diventa nulla e al di sotto del quale diventa negativa; questa seconda condizione però è impossibile che si verifichi da un punto di vista fisico perché il valore minimo della pressione è il vuoto assoluto.

Nel diagramma seguente sono riportati i valori della velocità e della pressione assunti dal fluido all'interno dei due dischi.



c) Se all'esterno grava la pressione atmosferica, la differenza di pressione che crea la forza sul disco inferiore è data dalla relazione vista prima

$$\Delta p = p - p_{\text{atm}} = p - p_2 = \frac{1}{2} \rho u_2^2 \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right)$$

dove $p = p_1$ e $r = R_1$ sono la pressione e il raggio nel punto generico; la forza totale vale quindi

$$F = \int_{R_1}^{R_2} dF = \int_{R_1}^{R_2} \Delta p \, dS = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \rho u_2^2 \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2} \right) 2\pi r \, dr = \rho u_2^2 \pi \left(\int_{R_1}^{R_2} r \, dr - R_2^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \right) =$$

$$= \rho u_2^2 \pi \left[\frac{1}{2} (R_2^2 - R_1^2) - R_2^2 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \right] = 1000 \times 3.132^2 \times \pi \times \left[\frac{1}{2} (0.25^2 - 0.10^2) - 0.25^2 \ln \left(\frac{0.25}{0.10} \right) \right] = -956 \, \text{N}$$

ed è diretta sul disco inferiore in modo da avvicinarlo a quello superiore.

Esercizio 4.3.12

In un tubo verticale scorre un liquido, considerato come fluido ideale, di massa volumica $\rho = 830 \, \text{kg/m}^3$. Il tubo si contrae da un diametro $D_1 = 105 \, \text{mm}$ a un diametro $D_2 = 35 \, \text{mm}$ e un manometro differenziale ad acqua, collegato a due punti del tubo verticale che comprendono al loro interno il tratto conico, registra una differenza di altezza del liquido manometrico pari a $\Delta z = 0.43 \, \text{m}$. Calcolare la portata G_v circolante.

Dalla legge della portata volumetrica (3.4) e dalla legge della velocità nel tubo di Venturi (4.9) si ha

$$G_v = u S = \sqrt{\frac{2(\rho_M - \rho) g \Delta z D_1^2}{\rho(D_1^2 - D_2^2)}} \frac{\pi D_2^2}{4} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times (1000 - 830) \times 9.80665 \times 0.43 \times (105 \times 10^{-3})^2}{830 \times [(105 \times 10^{-3})^2 - (35 \times 10^{-3})^2]}} \frac{\pi \times (35 \times 10^{-3})^2}{4} = 0.00134 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 80.5 \frac{\text{litri}}{\text{min}}.$$

Esercizio 4.3.13

In una tubazione di diametro $D_1 = 500 \, \text{mm}$, all'interno della quale scorre acqua considerata come fluido ideale, è inserito un venturimetro con sezione minima di diametro $D_2 = 400 \, \text{mm}$. Il manometro differenziale a mercurio, accoppiato al venturimetro, segna un dislivello $\Delta z = 20 \, \text{mm}$. Calcolare: a) la velocità u_2 nella sezione minima del venturimetro; b) la portata massica G_m dell'acqua circolante.

a) Dalla legge della velocità di un venturimetro (4.9) nella sezione minima e dalla tab. T.1, in cui viene letto il valore della massa volumica ρ_M del mercurio, si ha

$$u_2 = \sqrt{\frac{2(\rho_M - \rho) g \Delta z S_1^2}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}} = \sqrt{\frac{2(\rho_M - \rho) g \Delta z D_1^4}{\rho(D_1^4 - D_2^4)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times (13595 - 1000) \times 9.80665 \times 20 \times 10^{-3} \times (500 \times 10^{-3})^2}{1000 \times [(500 \times 10^{-3})^4 - (400 \times 10^{-3})^4]}} = 2.893 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Dalla legge della portata massica (3.2) si ha

$$G_m = \rho u_2 S_2 = \rho u_2 \frac{\pi D_2^2}{4} = 1000 \times 2.893 \times \frac{\pi \times (400 \times 10^{-3})^2}{4} = 364 \frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

Esercizio 4.3.14

In una tubazione di diametro $D_1 = 500 \, \text{mm}$, all'interno della quale scorre aria considerata come fluido ideale, è inserito un venturimetro con sezione minima di diametro $D_2 = 400 \, \text{mm}$. Il manometro differenziale ad acqua, accoppiato al venturimetro, segna un dislivello $\Delta z = 20 \, \text{mm}$. La temperatura dell'aria è di $20 \, ^\circ\text{C}$. Calcolare: a) la portata massica G_m dell'aria; b) la velocità u_2 nella sezione ristretta.

a) Dalla legge della portata massica di un venturimetro (4.10) e dalla tab. T.2, in cui viene letta la massa volumica ρ dell'aria, si ha

$$G_m = \sqrt{\frac{2\rho(\rho_M - \rho) g \Delta z S_1^2 S_2^2}{(S_1^2 - S_2^2)}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \rho(\rho_M - \rho) g \Delta z D_1^4 D_2^4}{8(D_1^4 - D_2^4)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi^2 \times 1.206 \times (1000 - 1.206) \times 9.80665 \times 20 \times 10^{-3} (500 \times 10^{-3})^4 (400 \times 10^{-3})^4}{8 \left[(500 \times 10^{-3})^4 - (400 \times 10^{-3})^4 \right]}} = 3.555 \frac{\text{kg}}{\text{s}} .$$

b) Dalla legge della portata massica (3.2) si ha

$$u_2 = \frac{G_m}{\rho S_2} = \frac{4 G_m}{\pi \rho D_2^2} = \frac{4 \times 3.555}{\pi \times 1.206 \times (400 \times 10^{-3})^2} = 23.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Esercizio 4.3.15

All'interno di una tubazione sta scorrendo acqua, considerata come fluido ideale, alla velocità $u = 2 \text{ m/s}$. Con un tubo di Pitot si misura una pressione di ristagno $p_0 = 36000 \text{ Pa}$. Calcolare la pressione statica p del fluido in quel punto.

Dalla legge del tubo di Pitot (4.11) si ha

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad \rightarrow \quad p = p_0 - \frac{1}{2} \rho u^2 = 36000 - \frac{1}{2} \times 1000 \times 2^2 = 34000 \text{ Pa} .$$

Esercizio 4.3.16

In un manometro differenziale a mercurio, collegato ad un tubo di Prandtl inserito in aria, considerata come fluido ideale, alla temperatura $T = -20^\circ \text{C}$, si legge una differenza $\Delta z = 80 \text{ mm}$. Calcolare la velocità u dell'aria.

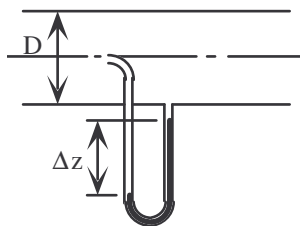
Dalla legge del tubo di Prandtl (4.12), dalla tab. T.1, in cui viene letto il valore della massa volumica ρ_M del mercurio, e dalla tab. T.2, in cui viene letto il valore della massa volumica ρ dell'aria, si ha

$$u = \sqrt{\frac{2(\rho_M - \rho) g \Delta z}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \times (13595 - 1.392) \times 9.80665 \times 0.080}{1.392}} = 87.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 315 \frac{\text{km}}{\text{h}} .$$

Se l'apparecchiatura è montata a bordo di un velivolo, la velocità così calcolata corrisponde, per effetto del moto relativo, a quella dell'aeroplano stesso rispetto all'aria.

Esercizio 4.3.17

In un tubo orizzontale di diametro $D = 20 \text{ cm}$ scorre acqua considerata come fluido ideale. Un manometro differenziale a mercurio, inserito nel tubo, ha un'estremità orientata contro la corrente, mentre ha l'altra estremità orientata perpendicolarmente alla corrente; il manometro si comporta come un tubo di Prandtl. La lettura del manometro è $\Delta z = 5 \text{ cm}$. Calcolare: a) la velocità u dell'acqua; b) la portata G_v dell'acqua; c) la pressione dinamica p_d .



a) Dalla legge del tubo di Prandtl (4.12) e dalla tab. T.1, in cui viene letto il valore della massa volumica ρ_M del mercurio, si ha

$$u = \sqrt{\frac{2(\rho_M - \rho) g \Delta z}{\rho}} = \sqrt{2 \times \frac{(13595 - 1000)}{1000} \times 9.80665 \times 5 \times 10^{-2}} = 3.514 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

b) Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_v = u S = u \frac{\pi D^2}{4} = 3.514 \times \frac{\pi \times (20 \times 10^{-2})^2}{4} = 0.1104 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} .$$

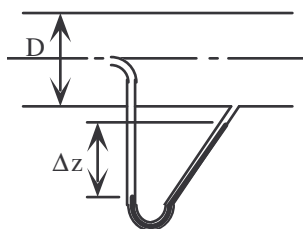
c) Dalla legge del tubo di Prandtl (4.12) e dalla definizione di pressione dinamica ricavabile dalla legge

del tubo di Pitot (4.11) si ha

$$p_d = p_0 - p = \frac{1}{2} \rho u^2 = \frac{1}{2} 1000 \times 3.514^2 = 6170 \text{ Pa} .$$

Esercizio 4.3.18

In un tubo orizzontale di diametro $D = 20 \text{ cm}$ scorre acqua considerata come fluido ideale. Un manometro differenziale a mercurio, inserito nel tubo, ha un'estremità orientata contro la corrente, mentre ha l'altra estremità orientata con l'angolo α rispetto alla corrente; il manometro si comporta come un tubo di Prandtl. La lettura del manometro è $\Delta z = 5 \text{ cm}$. Calcolare l'errore percentuale che si commetterebbe nel calcolo della velocità se, invece del manometro differenziale si mettessero due manometri che leggono separatamente la pressione di ristagno p_0 e la pressione statica p .



Se le linee di corrente sono rettilinee, l'angolo di inclinazione α della presa del manometro a valle non altera la lettura della pressione statica p . Allora dalla legge del tubo di Prandtl (4.12) e dalla tab. T.1, in cui viene letto il valore della massa volumica ρ_M del mercurio, si ha

$$u = \sqrt{2 \frac{(\rho_M - \rho)}{\rho} g \Delta z} = \sqrt{2 \times \frac{(13595 - 1000)}{1000} \times 9.80665 \times 5 \times 10^{-2}} = 3.514 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Nel caso di due manometri la differenza fra le loro letture prenderebbe in considerazione anche la differenza di altezza, corrispondente al raggio del tubo, fra le due prese; allora dalla legge del manometro differenziale (2.10), modificata per quanto detto, si ha

$$p_0 - p = (\rho_M - \rho) g \Delta z + \rho g \frac{D}{2} = (13595 - 1000) \times 9.80665 \times 5 \times 10^{-2} + 1000 \times 9.80665 \times \frac{20 \times 10^{-2}}{2} = 7156 \text{ Pa}$$

e dalla legge del tubo di Prandtl (4.12) si ha

$$u' = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_0 - p)} = \sqrt{\frac{2}{1000} \times 7156} = 3.783 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

L'errore percentuale è diventa allora

$$e = \frac{u' - u}{u} = \frac{3.783 - 3.514}{3.514} = 0.0766 = 7.66\% .$$

Esercizio 4.3.19

La pressione in un accumulatore idraulico vale $p = 1250 \text{ kN/m}^2$ e un volume $V = 225 \text{ m}^3$ di acqua, considerata come fluido ideale, sono pompati al suo interno in un tempo $t = 5 \text{ min}$. Calcolare: a) il lavoro L fatto dalla pompa; b) la potenza P richiesta.

- a) Dall'equazione del lavoro (4.13) si ha

$$L = p V = 1250 \times 10^3 \times 225 = 281.3 \times 10^6 \text{ J} = 281.3 \text{ MJ} .$$

- b) Dalla definizione di potenza si ha

$$P = \frac{L}{t} = \frac{281.3 \times 10^6}{5 \times 60} = 938 \times 10^3 \text{ W} = 938 \text{ kW} .$$

Esercizio 4.3.20

Una pompa centrifuga, che trasporta acqua considerata come fluido ideale, sviluppa una potenza $P = 35 \text{ kW}$. Essa aspira da un tubo di diametro $D_1 = 20 \text{ cm}$ alla pressione $p_1 = 69000 \text{ Pa}$ e manda in un tubo di diametro D_2

= 10 cm alla pressione $p_2 = 200000$ Pa. Calcolare: la portata volumetrica G_v ; b) le velocità nei tubi di aspirazione u_1 e di mandata u_2 .

a) Dall'equazione della potenza (4.14) si ha

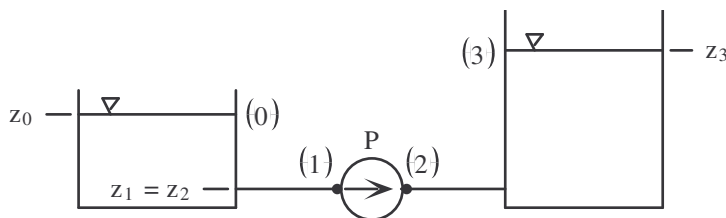
$$P = p G_v \quad \rightarrow \quad G_v = \frac{P}{p_2 - p_1} = \frac{35 \times 10^3}{200000 - 69000} = 0.2672 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} .$$

b) Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$u_1 = \frac{G_v}{S_1} = \frac{4 G_v}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 0.2672}{\pi \times (20 \times 10^{-2})^2} = 8.51 \frac{\text{m}}{\text{s}} , \quad u_2 = \frac{G_v}{S_2} = \frac{4 G_v}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 0.2672}{\pi \times (10 \times 10^{-2})^2} = 34.0 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Esercizio 4.3.21

La pompa P preleva acqua, considerata come fluido ideale, da un serbatoio tramite il tubo di aspirazione di diametro $D_1 = 150$ mm e la spinge tramite il tubo di mandata di diametro $D_2 = 100$ mm in un secondo serbatoio. Prendendo come riferimento il pelo libero del primo serbatoio ($z_0 = 0$), si sa che il pelo libero del secondo serbatoio è alto $z_3 = 72$ m, che la pompa è situata a $z_1 = z_2 = -6$ m e che la portata circolante è $G_v = 1.2$ m³/min. Calcolare: a) le pressioni di aspirazione p_1 e di mandata p_2 della pompa; b) la potenza P della pompa.



La portata volumetrica in unità fondamentali vale

$$G_v = 1.2 \frac{\text{m}^3}{\text{min}} = \frac{1.2}{60} = 0.020 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

e dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$u_1 = \frac{G_v}{S_1} = \frac{4 G_v}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 0.020}{\pi \times (150 \times 10^{-3})^2} = 1.132 \frac{\text{m}}{\text{s}} , \quad u_2 = \frac{G_v}{S_2} = \frac{4 G_v}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 0.020}{\pi \times (100 \times 10^{-3})^2} = 2.546 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

a) In corrispondenza dei peli liberi (0) e (3) le velocità sono nulle $u_0 = u_3 = 0$ e le pressioni sono uguali a quella atmosferica $p_0 = p_3 = p_{\text{atm}}$. Dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5), applicata prima ai punti (0) e (3), si ha

$$p_{\text{atm}} = \frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 + \rho g z_1 \quad \rightarrow \quad p_1 = p_{\text{atm}} - \frac{1}{2} \rho u_1^2 - \rho g z_1 =$$

$$= 101325 - \frac{1}{2} \times 1000 \times 1.132^2 - 1000 \times 9.80665 \times (-6) = 159500 \text{ Pa} = 159.5 \text{ bar}$$

e, applicata poi ai punti (2) e (3), si ha

$$\frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 + \rho g z_2 = p_{\text{atm}} + \rho g z_3 \quad \rightarrow \quad p_2 = p_{\text{atm}} - \frac{1}{2} \rho u_2^2 + \rho g (z_3 - z_2) =$$

$$= 101325 - \frac{1}{2} \times 1000 \times 2.546^2 + 1000 \times 9.80665 \times (72 + 6) = 863000 \text{ Pa} = 8.630 \text{ bar} .$$

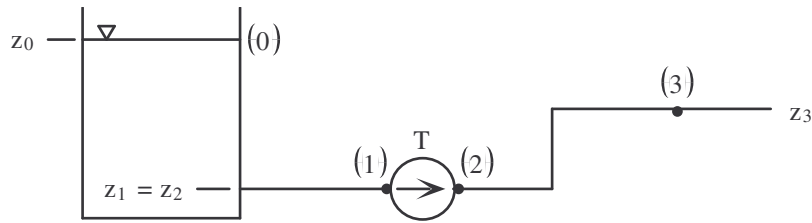
b) Dall'equazione della potenza (4.14) si ha

$$P = p G_v = (p_2 - p_1) G_v = (863000 - 159500) \times 0.020 = 14.1 \times 10^3 \text{ W} = 14.1 \text{ kW} .$$

Esercizio 4.3.22

Acqua, considerata come fluido ideale, esce da un serbatoio con battente costante $z_0 = 35$ m ed entra nella turbina T presa come riferimento delle altezze $z_1 = z_2 = 0$. Il tubo di alimentazione (1) e di scarico (2) della turbina ha diametro $D_1 = D_2 = D = 50$ cm, mentre nel punto (3) il tubo ha diametro $D_3 = 30$ cm. Nello stesso punto

(3), alto $z_3 = 1.5$ m, gli strumenti misurano la pressione $p_3 = 1.1$ bar e la velocità $u_3 = 9.15$ m/s. Calcolare la potenza P sviluppata dalla turbina.



Dalla legge della portata volumetrica (3.4) nel punto (3) si ha

$$G_v = u_3 S_3 = u_3 \frac{\pi D_3^2}{4} = 9.15 \times \frac{\pi \times (30 \times 10^{-2})^2}{4} = 0.6468 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

e nei punti (1) e (2), dove le velocità sono uguali $u_1 = u_2 = u$, si ha anche

$$u = \frac{G_v}{S} = \frac{4 G_v}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.6468}{\pi \times (50 \times 10^{-2})^2} = 3.294 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nel punto (0) la velocità è nulla $u_0 = 0$ e la pressione è uguale a quella atmosferica $p_0 = p_{\text{atm}}$, mentre nei punti (1) e (2), oltre ad essere uguali le velocità, sono anche nulle le altezze $z_1 = z_2 = 0$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) per il punto (1) si ha

$$p_{\text{atm}} + \rho g z_0 = \frac{1}{2} \rho u^2 + p_1 \quad \rightarrow \quad p_1 = p_{\text{atm}} - \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g z_0 =$$

$$= 101325 - \frac{1}{2} \times 1000 \times 3.294^2 + 1000 \times 9.80665 \times 35 = 439100 \text{ Pa}$$

e per il punto (2) si ha

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + p_2 = \frac{1}{2} \rho u_3^2 + p_3 + \rho g z_3 \quad \rightarrow \quad p_2 = p_3 + \frac{1}{2} \rho (u_3^2 - u^2) + \rho g z_3 =$$

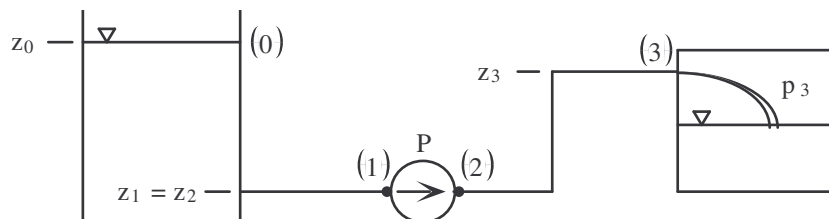
$$= 1.1 \times 10^5 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (9.15^2 - 3.294^2) + 1000 \times 9.80665 \times 1.5 = 161100 \text{ Pa}$$

Dall'equazione della potenza (4.14) si ha

$$P = (p_1 - p_2) G_v = (439100 - 161100) \times 0.6468 = 180000 \text{ W} = 180 \text{ kW}$$

Esercizio 4.3.23

La portata volumetrica $G_v = 0.3$ m³/s di acqua, considerata come fluido ideale, esce da un serbatoio con battente costante $z_0 = 46$ m ed alimenta la pompa P presa come riferimento delle altezze $z_1 = z_2 = 0$. Il tubo di aspirazione (1) e di mandata (2) della pompa hanno diametro $D_1 = D_2 = D = 30$ cm, mentre nel punto (3) il tubo ha un ugello di diametro $D_3 = 7.5$ cm. Nello stesso punto (3), alto $z_3 = 15$ m e all'interno del serbatoio di mandata, gli strumenti misurano la pressione $p_3 = 7$ bar. Calcolare la potenza P sviluppata dalla pompa.



Dalla legge della portata volumetrica (3.4) nel punto (3) si ha

$$u_3 = \frac{G_v}{S_3} = \frac{4 G_v}{\pi D_3^2} = \frac{4 \times 0.3}{\pi \times (7.5 \times 10^{-2})^2} = 67.91 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e nei punti (1) e (2), dove le velocità sono uguali $u_1 = u_2 = u$, si ha anche

$$u = \frac{G_v}{S} = \frac{4 G_v}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.3}{\pi \times (30 \times 10^{-2})^2} = 4.244 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Nel punto (0) la velocità è nulla $u_0 = 0$ e la pressione è uguale a quella atmosferica $p_0 = p_{\text{atm}}$, mentre nei punti (1) e (2), oltre ad essere uguali le velocità $u_1 = u_2 = u$, sono anche nulle le altezze $z_1 = z_2 = 0$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) per il punto (1) si ha

$$p_{\text{atm}} + \rho g z_0 = \frac{1}{2} \rho u^2 + p_1 \quad \rightarrow \quad p_1 = p_{\text{atm}} - \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g z_0 =$$

$$= 101325 - \frac{1}{2} \times 1000 \times 4.244^2 + 1000 \times 9.80665 \times 46 = 3.011 \text{ MPa}$$

e per il punto (2) si ha

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + p_2 = \frac{1}{2} \rho u_3^2 + p_3 + \rho g z_3 \quad \rightarrow \quad p_2 = p_3 + \frac{1}{2} \rho (u_3^2 - u^2) + \rho g z_3 =$$

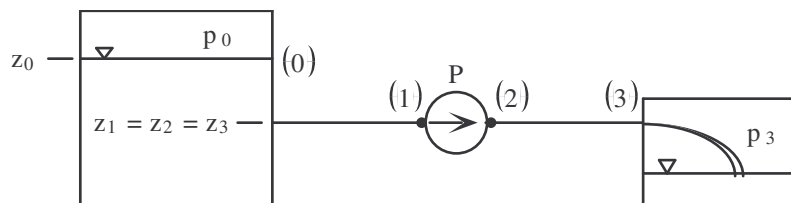
$$= 7 \times 10^5 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (67.91^2 - 4.244^2) + 1000 \times 9.80665 \times 1.5 = 3.011 \text{ MPa} .$$

Dall'equazione della potenza (4.14) si ha

$$P = (p_2 - p_1) G_v = (3.011 - 0.5434) \times 10^6 \times 0.3 = 740000 \text{ W} = 740 \text{ kW} .$$

Esercizio 4.3.24

La portata volumetrica $G_v = 0.85 \text{ m}^3/\text{s}$ di acqua, considerata come fluido ideale, esce da un serbatoio, con battente costante $z_0 = 6 \text{ m}$ e con pressione $p_0 = 0.7 \text{ bar}$, ed alimenta la pompa P presa come riferimento delle altezze $z_1 = z_2 = z_3 = 0$. Il tubo di aspirazione (1) e di mandata (2) della pompa hanno diametro $D_1 = D_2 = D = 50 \text{ cm}$, mentre nel punto (3) il tubo ha un ugello di diametro $D_3 = 25 \text{ cm}$. Nello stesso punto (3), alto $z_3 = 15 \text{ m}$ e all'interno del serbatoio di mandata, gli strumenti misurano la pressione $p_3 = 4 \text{ bar}$. Calcolare la potenza P sviluppata dalla pompa.



Dalla legge della portata volumetrica (3.4) nel punto (3) si ha

$$u_3 = \frac{G_v}{S_3} = \frac{4 G_v}{\pi D_3^2} = \frac{4 \times 0.85}{\pi \times (25 \times 10^{-2})^2} = 17.32 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e nei punti (1) e (2), dove le velocità sono uguali $u_1 = u_2 = u$, si ha anche

$$u = \frac{G_v}{S} = \frac{4 G_v}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.85}{\pi \times (50 \times 10^{-2})^2} = 4.329 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Nel punto (0) la velocità è nulla $u_0 = 0$ e la pressione è uguale a quella atmosferica $p_0 = p_{\text{atm}}$, nei punti (1) e (2) sono uguali le velocità $u_1 = u_2 = u$ e nei punti (1), (2) e (3) sono nulle le altezze $z_1 = z_2 = z_3 = 0$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) per il punto (1) si ha

$$p_{\text{atm}} + \rho g z_0 = \frac{1}{2} \rho u^2 + p_1 \quad \rightarrow \quad p_1 = p_{\text{atm}} - \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g z_0 =$$

$$= 101325 - \frac{1}{2} \times 1000 \times 4.329^2 + 1000 \times 9.80665 \times 6 = 68210 \text{ Pa}$$

e per il punto (2) si ha

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + p_2 = \frac{1}{2} \rho u_3^2 + p_3 \quad \rightarrow \quad p_2 = p_3 + \frac{1}{2} \rho (u_3^2 - u^2) =$$

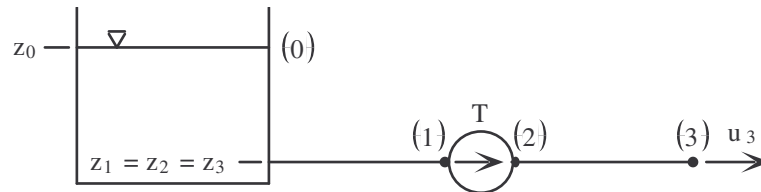
$$= 4 \times 10^5 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (17.32^2 - 4.329^2) = 540600 \text{ Pa} .$$

Dall'equazione della potenza (4.14) si ha

$$P = (p_2 - p_1) G_v = (540600 - 68210) \times 0.3 = 402000 \text{ W} = 402 \text{ kW} .$$

Esercizio 4.3.25

La turbina T di figura è alimentata dall'acqua, considerata come fluido ideale, di un serbatoio avente il pelo libero all'altezza $z_0 = 30 \text{ m}$ e, tramite un tubo di diametro costante $D_1 = D_2 = 150 \text{ mm}$, la getta nell'atmosfera attraverso un ugello di diametro $D_3 = 0.075 \text{ m}$ alla velocità $u_3 = 10 \text{ m/s}$; l'altezza della turbina fa da riferimento $z_1 = z_2 = 0 \text{ m}$. Calcolare la potenza P sviluppata dalla turbina.



Dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_v = u_3 S_3 = u_3 \frac{\pi D_3^2}{4} = 10 \times \frac{\pi \times (75 \times 10^{-3})^2}{4} = 0.04418 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$u_2 = \frac{G_v}{S_2} = \frac{4 G_v}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 0.04418}{\pi \times (150 \times 10^{-3})^2} = 2.50 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Nel punto (0) la velocità è nulla $u_0 = 0$, la pressione è uguale a quella atmosferica $p_0 = p_{\text{atm}}$ e l'altezza è nulla $z_0 = 0$, mentre nel punto (1) la velocità è uguale a quella del punto (2) $u_1 = u_2$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) per il punto (1) si ha

$$p_{\text{atm}} + \rho g z_0 = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_1 \quad \rightarrow \quad p_1 = p_{\text{atm}} - \frac{1}{2} \rho u_2^2 + \rho g z_0 =$$

$$= 101325 - \frac{1}{2} \times 1000 \times 2.50^2 + 1000 \times 9.80665 \times 30 = 392400 \text{ Pa} .$$

Nei punti (2) e (3) le altezze sono uguali $z_2 = z_3$ e nel punto (3) la pressione è uguale a quella atmosferica $p_3 = p_{\text{atm}}$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) per il punto (2) si ha

$$\frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 = \frac{1}{2} \rho u_3^2 + p_{\text{atm}} \quad \rightarrow \quad p_2 = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho (u_3^2 - u_2^2) =$$

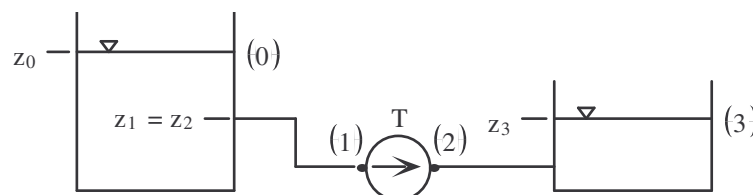
$$= 101325 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (10^2 - 2.50^2) = 148200 \text{ Pa} .$$

Dall'equazione della potenza (4.14) si ha

$$P = (p_1 - p_2) G_v = (392400 - 148200) \times 0.04418 = 10800 \text{ W} = 10.8 \text{ kW} .$$

Esercizio 4.3.26

La turbina T di figura è alimentata da una portata massica $G_m = 500 \text{ kg/s}$ di acqua, considerata come fluido ideale, proveniente da un serbatoio con pelo libero di altezza $z_0 = 30 \text{ m}$ e, tramite un tubo di diametro costante $D = D_1 = D_2 = 0.5 \text{ m}$, la scarica in un serbatoio con pelo libero di altezza $z_3 = 0 \text{ m}$; l'altezza della turbina si trova a $z_1 = z_2 = -20 \text{ m}$. Calcolare la potenza P sviluppata dalla turbina.



Dalla legge della portata massica (3.2) si ha

$$u_1 = u_2 = \frac{G_m}{\rho S} = \frac{4 G_m}{\rho \pi D^2} = \frac{4 \times 500}{1000 \times \pi \times 0.5^2} = 2.546 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Nel punto (0) la velocità è nulla $u_0 = 0$ e la pressione è uguale a quella atmosferica $p_0 = p_{\text{atm}}$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) per il punto (1) si ha

$$\begin{aligned} p_{\text{atm}} + \rho g z_0 &= \frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 + \rho g z_1 \quad \rightarrow \quad p_1 = p_{\text{atm}} - \frac{1}{2} \rho u_1^2 + \rho g (z_0 - z_1) = \\ &= 101325 - \frac{1}{2} \times 1000 \times 2.546^2 + 1000 \times 9.80665 \times (30 + 20) = 588400 \text{ Pa} . \end{aligned}$$

Nel punto (3) la pressione è uguale a quella atmosferica $p_3 = p_{\text{atm}}$ e l'altezza è nulla $z_3 = 0$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) per il punto (2) si ha

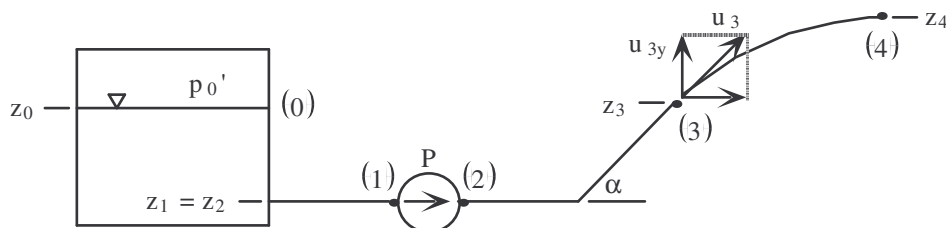
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 + \rho g z_2 &= p_{\text{atm}} \quad \rightarrow \quad p_2 = p_{\text{atm}} - \frac{1}{2} \rho u_2^2 - \rho g z_2 = \\ &= 101325 - \frac{1}{2} \times 1000 \times 2.546^2 - 1000 \times 9.80665 \times (-20) = 294200 \text{ Pa} . \end{aligned}$$

Dall'equazione della potenza (4.14) si ha

$$P = \frac{p_2 - p_1}{\rho} G_m = \frac{588400 - 294200}{1000} \times 500 = 147000 \text{ W} = 147 \text{ kW} .$$

Esercizio 4.3.27

La pompa P di figura è alimentata dall'acqua, considerata come fluido ideale, di un serbatoio chiuso avente il pelo libero all'altezza $z_0 = 15 \text{ m}$ e sul quale grava la pressione relativa $p_0' = 35 \text{ kPa}$ e, tramite un tubo di diametro costante $D_1 = D_2 = 150 \text{ mm}$, la getta nell'atmosfera attraverso un ugello di altezza $z_3 = 1.5 \text{ m}$ e di diametro $D_3 = 0.075 \text{ m}$ con un'inclinazione $\alpha = 45^\circ$; l'altezza della pompa fa da riferimento $z_1 = z_2 = 0 \text{ m}$. Il getto dell'ugello fa giungere l'acqua fino all'altezza $z_4 = 7.5 \text{ m}$. Calcolare la potenza P che la pompa deve sviluppare.



Dalle leggi della cinematica si ha

$$\begin{aligned} z_4 - z_3 &= \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \frac{u_{3y}^2}{g} \quad \rightarrow \quad u_{3y} = \sqrt{2 g (z_4 - z_3)} = \sqrt{2 \times 9.80665 \times (7.5 - 1.5)} = 10.85 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 0 &= u_{3y} - g t \quad \rightarrow \quad t = \frac{u_{3y}}{g} \quad \rightarrow \quad t = \frac{u_{3y}}{g} = \frac{10.85}{9.80665} = 1.11 \text{ s} \end{aligned}$$

e, quindi, per la velocità assoluta di uscita si ha

$$u_3 = \frac{u_{3y}}{\sin \alpha} = \frac{10.85}{\sin(45^\circ)} = 15.34 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$\begin{aligned} G_v &= u_3 S_3 = u_3 \frac{\pi D_3^2}{4} = 15.34 \times \frac{\pi \times (75 \times 10^{-3})^2}{4} = 0.06777 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \\ u_2 &= \frac{G_v}{S_2} = \frac{4 G_v}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 0.06777}{\pi \times (150 \times 10^{-3})^2} = 3.835 \frac{\text{m}}{\text{s}} . \end{aligned}$$

Nel punto (0) la velocità è nulla $u_0 = 0$ e la pressione assoluta vale $p_0 = p_{\text{atm}} + p_0'$, mentre nel punto (1) la veloci-

tà è uguale a quella del punto (2) $u_1 = u_2$ e l'altezza è nulla $z_1 = 0$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) per il punto (1) si ha

$$p_{\text{atm}} + p_0 + \rho g z_0 = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_1 \quad \rightarrow \quad p_1 = p_{\text{atm}} + p_0 - \frac{1}{2} \rho u_2^2 + \rho g z_0 =$$

$$= 101325 + 35000 - \frac{1}{2} \times 1000 \times 3.835^2 + 1000 \times 9.80665 \times 1.5 = 77500 \text{ Pa} .$$

Nel punto (2) l'altezza è nulla $z_2 = 0$ e nel punto (3) la pressione è uguale a quella atmosferica $p_3 = p_{\text{atm}}$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) per il punto (2) si ha

$$\frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 = \frac{1}{2} \rho u_3^2 + p_{\text{atm}} + \rho g z_3 \quad \rightarrow \quad p_2 = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho (u_3^2 - u_2^2) + \rho g z_3 =$$

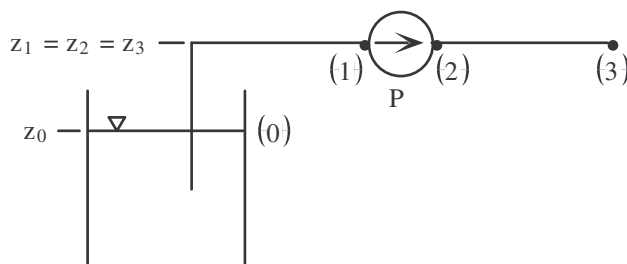
$$= 101325 + \frac{1}{2} \times 1000 \times (15.34^2 - 3.835^2) + 1000 \times 9.80665 \times 1.5 = 226300 \text{ Pa} .$$

Dall'equazione della potenza (4.14) si ha

$$P = (p_1 - p_2) G_v = (226300 - 77500) \times 0.06777 = 10080 \text{ W} \cong 10.1 \text{ kW} .$$

Esercizio 4.3.28

La pompa P di figura preleva acqua, considerata come fluido ideale, da un serbatoio avente il pelo libero all'altezza $z_0 = 0$ e, tramite un tubo di diametro costante $D_1 = D_2$, la getta nell'atmosfera attraverso un ugello di diametro $D_3 = 0.075 \text{ m}$; l'altezza della pompa è $z_1 = z_2 = 1.5 \text{ m}$. Trovare la legge che lega la velocità allo scarico u_3 e la potenza P sviluppata dalla pompa e diagrammare la potenza P con la velocità u_3 che varia da 0 a 10 m/s.



Nei punti (2) e (3) le altezze sono uguali $z_2 = z_3$ e nel punto (3) la pressione è uguale a quella atmosferica $p_3 = p_{\text{atm}}$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) per il punto (2) si ha

$$\frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 = \frac{1}{2} \rho u_3^2 + p_{\text{atm}} \quad \rightarrow \quad p_2 = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho (u_3^2 - u_2^2) .$$

Nel punto (0) la velocità è nulla $u_0 = 0$, la pressione è uguale a quella atmosferica $p_0 = p_{\text{atm}}$ e l'altezza è nulla $z_0 = 0$, mentre nel punto (1) la velocità è uguale a quella del punto (2) $u_1 = u_2$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) per il punto (1) si ha

$$p_{\text{atm}} = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_1 + \rho g z_1 \quad \rightarrow \quad p_1 = p_{\text{atm}} - \frac{1}{2} \rho u_2^2 - \rho g z_1 .$$

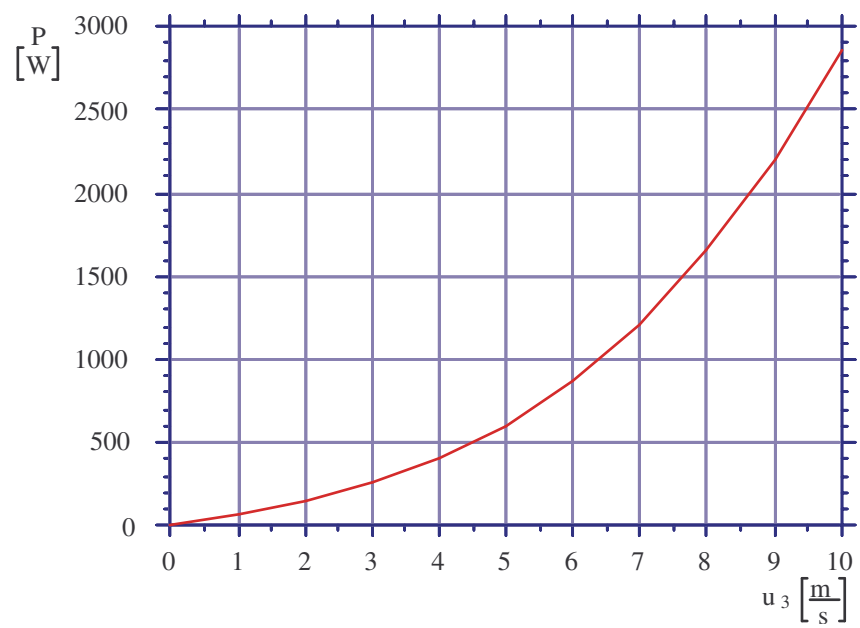
Dall'equazione della potenza (4.14) e dalla legge della portata volumetrica (3.4) si ha

$$P = (p_2 - p_1) G_v = \left[p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho (u_3^2 - u_2^2) - p_{\text{atm}} - \frac{1}{2} \rho u_2^2 - \rho g z_1 \right] u_3 \frac{\pi D_3^2}{4} =$$

$$= \frac{\pi D_3^2}{4} \rho \left(\frac{1}{2} u_3^3 + g z_1 u_3 \right) = 4.418 \times \left(\frac{1}{2} u_3^3 + 14.71 u_3 \right) .$$

Dalla relazione precedente per $u_3 = 1, 2, \dots, 9, 10$ si hanno la tabella e il grafico seguenti.

velocità [m/s]	potenza [W]	velocità [m/s]	potenza [W]
1	0	6	867
2	148	7	1213
3	255	8	1651
4	401	9	2195
5	601	10	2859



4.4.- LIMITI DELL'EQUAZIONE DI BERNOULLI

Esercizio 4.4.1

Aria in condizioni normali ($p = p_{\text{atm}}$ e $T = 0^\circ\text{C}$) e considerata come fluido non viscoso si muove alla velocità $u = 100\text{ m/s}$. Calcolare: a) il numero di Mach locale; b) la pressione dinamica p_d ; c) le variazioni percentuali della pressione p e della massa volumica ρ fra condizioni indisturbate e condizioni di ristagno.

a) Il numero di Mach locale corrisponde al rapporto fra la velocità del fluido in quel punto e la velocità del suono nel fluido in quello stesso punto. Dall'equazione della velocità del suono per una trasformazione adiabatica (1.26), dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica R dell'aria e dalla tab. T.4, in cui viene letto l'esponente della trasformazione adiabatica γ , si ha

$$c = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{1.402 \times 287 \times 273.15} = 331.5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \rightarrow \quad M = \frac{u}{c} = \frac{100}{331.5} = 0.302 .$$

b) Dalla definizione di pressione dinamica (4.11) e dalla tab. 1.2, in cui viene letto il valore della massa volumica ρ , si ha

$$p_d = \frac{1}{2} \rho u^2 = \frac{1}{2} \times 1.294 \times 100^2 = 6470 \text{ Pa} .$$

c) La variazione della pressione dalle condizioni indisturbate p_{atm} a quelle di ristagno p_0 vale

$$\frac{p_0}{p_{\text{atm}}} = \frac{p_{\text{atm}} + p_d}{p_{\text{atm}}} = \frac{101325 + 6470}{101325} = 1.064$$

e corrisponde ad un incremento percentuale del 6.4 %. La variazione della massa volumica dalle condizioni indisturbate ρ_{atm} a quelle di ristagno ρ_0 in conseguenza alla variazione di pressione, nel caso di trasformazione adiabatica, vale invece

$$\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho_{\text{atm}}^\gamma} \quad \rightarrow \quad \frac{\rho_0}{\rho_{\text{atm}}} = \left(\frac{p_0}{p_{\text{atm}}} \right)^{1/\gamma} = 1.064^{1/1.4} = 1.048$$

e corrisponde ad un incremento percentuale del 4.8 %. Le due variazioni percentuali trovate possono essere considerate al limite dei valori accettabili da un punto di vista ingegneristico.

Esercizio 4.4.2

Aria in condizioni normali ($p = p_{\text{atm}}$ e $T = 0^\circ\text{C}$) e considerata come fluido non viscoso viene portata con una trasformazione adiabatica alla temperatura $T_2 = 100^\circ\text{C}$. Calcolare la variazione percentuale della massa volumica.

Dalla legge della trasformazione politropica (1.18) con $n = \gamma$ e dalla tab. T.4, in cui viene letto il valore dell'esponente γ , si ha

$$T_1 \rho_1^{\gamma-1} = T_2 \rho_2^{\gamma-1} \quad \rightarrow \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)} = \left(\frac{273.15 + 100}{273.15} \right)^{1/(1.402-1)} = 2.173$$

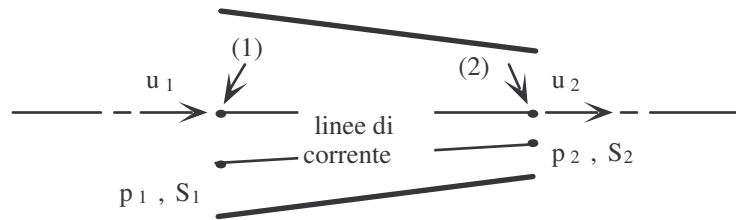
con un aumento percentuale pari a

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 = 2.173 - 1 = 1.173 \cong 117 \% .$$

La variazione percentuale trovata non può essere considerata accettabile da un punto di vista ingegneristico.

Esercizio 4.4.3

Un flusso stazionario e a bassa velocità di aria passa attraverso un ugello orizzontale e si scarica nell'atmosfera. La sezione di ingresso dell'ugello è $S_1 = 0.1\text{ m}^2$, mentre quella di uscita è $S_2 = 0.02\text{ m}^2$. All'uscita si vuole creare una velocità media $u_2 = 50\text{ m/s}$. Calcolare la differenza di pressione Δp fra ingresso e uscita necessaria a mantenere il flusso.



Dall'equazione della velocità del suono per una trasformazione adiabatica (1.26), dalla tab. T.3, in cui viene letto il valore della costante caratteristica R dell'aria e dalla tab. T.4, in cui viene letto l'esponente della trasformazione adiabatica γ , si ha

$$c = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{1.402 \times 287 \times 273.15} = 331.5 \quad \rightarrow \quad M = \frac{u}{c} = \frac{50}{331.5} = 0.151 .$$

Poiché il numero di Mach è inferiore a 0.3, il fluido può essere considerato incompressibile e la portata volumetrica può essere considerata costante; dalla legge di conservazione della massa per un fluido incompressibile (3.9) si ha

$$u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad u_1 = u_2 \frac{S_2}{S_1} = 50 \times \frac{0.02}{0.1} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Considerando trascurabili gli effetti dell'attrito, si può applicare il teorema di Bernoulli sulla linea di corrente corrispondente all'asse dell'ugello, dove le altezze geometriche nelle due sezioni sono uguali $z_1 = z_2$ e dove $p_2 = p_{\text{atm}}$; allora, dalla tab. T.2., in cui viene letto il valore della massa volumica ρ dell'aria, si ha

$$\frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_{\text{atm}} \quad \rightarrow \quad \Delta p = p_1 - p_{\text{atm}} = \frac{1}{2} \rho (u_2^2 - u_1^2) = \frac{1}{2} \times 1.294 \times (50^2 - 10^2) = 1550 \text{ Pa} .$$

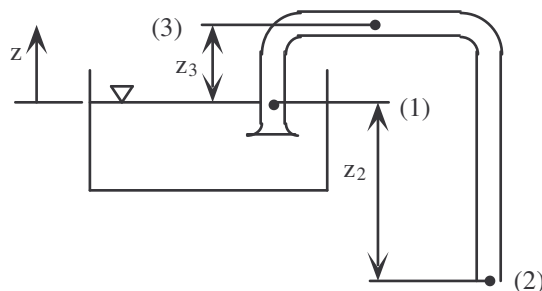
Sui risultati ottenuti è opportuno fare alcune osservazioni:

- a) le linee di corrente sono rettilinee e si restringono dall'ingresso verso l'uscita seguendo la forma dell'ugello;
- b) poiché le linee di corrente sono rettilinee la pressione non varia in direzione a loro perpendicolare e quindi la pressione rimane circa costante su ogni sezione;
- c) se si fosse applicato il teorema di Bernoulli a linee di corrente non orizzontali sarebbe successo che:
 - c1) nel caso in cui si fosse considerata costante la pressione sulle sezioni iniziale e finale, la differenza di altezza avrebbe modificato il campo della velocità accelerando le particelle più alte della mezzera e rallentando quelle più basse;
 - c2) nel caso in cui si fosse considerata costante la velocità sulle sezioni iniziale e finale, la differenza di altezza avrebbe modificato il campo della pressione (in contrasto con il punto b) aumentando quella delle particelle più alte della mezzera e diminuendo quella delle particelle più basse;
- d) solo trascurando l'effetto della gravità il comportamento sarebbe stato uguale su tutte le linee di corrente rendendo il problema monodimensionale.

In conclusione, il teorema di Bernoulli è applicabile solo ad una tubazione considerata monodimensionale e coincidente con il suo asse geometrico; quindi per problemi pluridimensionali il teorema di Bernoulli non è più valido.

Esercizio 4.4.4

Nel sifone, costituito da un tubo a U, il gomito si trova ad un'altezza $z_3 = 1$ m sopra il pelo libero, mentre l'uscita si trova ad un'altezza $z_2 = -7$ m sotto il pelo libero. Calcolare: a) la velocità u_2 del getto d'acqua, considerata come fluido incompressibile, all'uscita; b) la pressione assoluta p_3 del fluido nel gomito.



a) Nel punto (1) si ha $u_1 = 0$, $p_1 = p_{\text{atm}}$, $z_1 = 0$ e nel punto (2) si ha $p_2 = p_{\text{atm}}$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$\frac{p_{\text{atm}}}{\rho} = \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + g z_2 \quad \rightarrow \quad u_2 = \sqrt{2 g (-z_2)} = \sqrt{2 \times 9.80665 \times (-7)} = 11.7 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

b) Nel punto (1) si ha $u_1 = 0$, $p_1 = p_{\text{atm}}$, $z_1 = 0$ e la velocità nel punto (3) è uguale a quella nel punto (2) $u_3 = u_2$; allora dall'equazione di Bernoulli per un fluido incompressibile (4.5) si ha

$$p_{\text{atm}} = \frac{1}{2} \rho u_3^2 + p_3 + \rho g z_3 \quad \rightarrow \quad p_3 = p_{\text{atm}} - \frac{1}{2} \rho u_2^2 - \rho g z_3 =$$

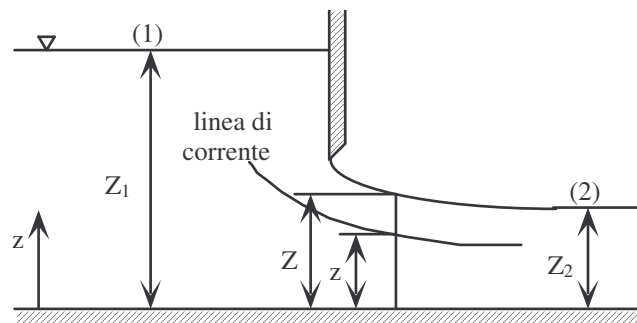
$$= 101325 + \frac{1}{2} 1000 \times 11.72^2 + 1000 \times 9.80665 \times 1 = 22800 \text{ Pa} .$$

Sui risultati ottenuti è opportuno fare alcune osservazioni:

- affinché sia valida l'applicazione dell'equazione di Bernoulli deve avvenire che le perdite siano trascurabili;
- le perdite che si verificano nell'esempio citato sono:
 - continue su tutta la lunghezza della tubazione;
 - localizzate nell'imbocco, nelle curve e nello sbocco;
- se l'imbocco è arrotondato, se le curve sono ampie, se la lunghezza totale della tubazione è esigua e se lo sbocco è fatto all'atmosfera, si possono ritenere le perdite di energia piccole rispetto alle altre energie in gioco e quindi, da un punto di vista ingegneristico, ritenere accettabili i risultati ottenuti;
- però, se si verificano separazioni di vena nell'imbocco e nelle curve, se la lunghezza della tubazione è elevata e se si verificano contrazioni di vena allo sbocco, le perdite di energia diventano confrontabili e, in taluni casi, anche superiori alle altre energie in gioco e quindi possono rendere del tutto inaccettabili i risultati ottenuti.

Esercizio 4.4.5

Un flusso d'acqua, considerata come fluido ideale, scorre sotto una paratia su un letto orizzontale all'ingresso di un canale; prima della paratia il livello dell'acqua è $Z_1 = 45 \text{ cm}$ e la velocità può essere considerata nulla $u_1 = 0 \text{ m/s}$, mentre dopo di essa il livello è $Z_2 = 5 \text{ cm}$. Il flusso è stazionario e in ogni sezione si può considerare che la pressione possieda una distribuzione idrostatica. Calcolare: a) la velocità u_2 del fluido a valle della paratia; b) la portata volumetrica g_v per metro di larghezza ($Y = 1 \text{ m}$) di paratia.



Il fatto che la pressione idrostatica possieda una distribuzione idrostatica significa che in qualsiasi sezione al di sotto del pelo libero è valida la legge di Stevin

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \rightarrow \quad p = p_{\text{atm}} + \rho g (Z - z)$$

dove Z è l'altezza generica della vena e z è l'altezza generica della linea di corrente lungo la quale viene applicata l'equazione di Bernoulli; allora, sostituendo la relazione precedente, si ha

$$\frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 + \rho g z_2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_{\text{atm}} + \rho g (Z_1 - z_1) + \rho g z_1 = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_{\text{atm}} + \rho g (Z_2 - z_2) + \rho g z_2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2} \rho u_1^2 + \rho g Z_1 = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + \rho g Z_2 ;$$

di conseguenza lungo ogni linea di corrente rimane costante la quantità

$$\frac{1}{2} u^2 + g Z = \text{cost} .$$

- a) Poiché è $u_1 = 0$, dalla relazione precedente si ha

$$g Z_1 = \frac{1}{2} u_2^2 + g Z_2 \quad \rightarrow \quad u_2 = \sqrt{2 g (Z_1 - Z_2)} = \sqrt{2 \times 9.80665 \times (45 - 5) \times 10^{-2}} = 2.80 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

- b) Dalla legge della portata volumetrica (3.4) e dalla definizione di portata per unità di larghezza si ha

$$g_v = \frac{G_v}{Y} = \frac{u_2 S_2}{Y} = \frac{u_2 Y Z_2}{Y} = u_2 Z_2 = 2.80 \times 5 \times 10^{-2} = 0.140 \frac{\text{m}^3}{\text{s m}} .$$

Sui risultati ottenuti è opportuno fare alcune osservazioni:

- a) affinché sia valida l'applicazione dell'equazione di Bernoulli deve avvenire che siano perfettamente individuabili le linee di corrente;
- b) le linee di corrente sono ben definite solo nel moto laminare;
- c) però, se il flusso è costituito dal salto di alimentazione di una turbina idraulica o dal passaggio attraverso una macchina idraulica o aerea, il moto è fortemente turbolento e impedisce di definire nella pressione una distribuzione idrostatica.