

CAPITOLO 4

DINAMICA DEI FLUIDI NON VISCOSI

4.1. GENERALITÀ

Lo studio degli effetti delle forze sul moto dei fluidi viene chiamato **fluidodinamica** e può essere suddiviso in due parti: **idrodinamica**, o dinamica dei fluidi incompressibili, e **gasdinamica**, o dinamica dei fluidi compressibili. L'idrodinamica, quindi, si occupa del moto dei liquidi oppure degli aeriformi quando siano lontani da trasformazioni di stato e quando non intervengano sensibili variazioni di pressione e conseguentemente di massa volumica. Essa ha rappresentato un importante capitolo della meccanica dei fluidi, perché il suo studio è storicamente il più antico, sia per la maggiore semplicità della trattazione matematica derivante dall'ipotesi della incompressibilità, sia per il notevole interesse, anche pratico, che il moto dei liquidi ha sempre avuto.

Le basi concettuali dell'idrodinamica moderna sono state poste, nel XVIII secolo, specialmente da L. Eulero che se ne può considerare il fondatore; nello stesso secolo contributi importanti diedero D. Bernoulli, J. D'Alembert, P. S. de Laplace e anche J. L. Lagrange. Tutti questi studiosi si occuparono esclusivamente di un **fluido ideale**, il quale per definizione, oltre ad essere incompressibile, è anche privo di viscosità e quindi non suscettibile di sforzi tangenziali.

E' facile comprendere come questa schematizzazione semplifichi l'indagine matematica, ma è anche ovvio che essa debba portare a risultati che non sempre rispecchiano il comportamento dei fluidi **reali**. Tuttavia questi risultati sono spesso accettati come approssimazioni sufficienti in alcune applicazioni pratiche: questo si verifica, come si è già visto, per tutte le situazioni in cui il moto del liquido non comporti sensibili dissipazioni di energia.

L'idrodinamica dei liquidi viscosi nacque solo nel XIX secolo, con H. Navier, G. G. Stokes, J. Reynolds, J. W. Rayleigh, L. Prandtl e, benché abbia fatto progressi notevoli, non si può ancora affermare che ogni questione sia risolta.

4.2. EQUAZIONE DI EULERO

Nel capitolo 3 si è detto che il moto dei fluidi avviene con il rispetto delle condizioni riassunte dalle equazioni del moto e che la prima equazione da soddisfare è quella di bilancio della massa (vedi § 3.4), chiamata anche equazione di conservazione della massa o equazione di continuità.

La seconda equazione del moto è l'**equazione di bilancio della quantità di moto**; in un approccio di tipo euleriano essa enuncia il fatto che: "la differenza fra la quantità di moto del fluido che, in un tempo infinitesimo, entra in un volume infinitesimo fisso nello spazio e la quantità di moto che ne esce più le forze agenti sul volume infinitesimo e sulla sua superficie esterna è rappresentata dalla quantità di moto che, nello stesso tempo, si accumula nello stesso volume infinitesimo". Poiché il bilancio è assicurato se sono in equilibrio le componenti secondo i tre assi coordinati, l'equazione è vettoriale e risulta essere composta da tre equazioni scalari.

La quantità di moto infinitesima $d\bar{Q}$ relativa al volume infinitesimo dV fisso nello spazio è il vettore

$$d\bar{Q} = dm \bar{u} ,$$

dove dm è la massa infinitesima del fluido nel volume dV , di componenti

$$dQ_x = dm u \quad dQ_y = dm v \quad dQ_z = dm w ,$$

mentre la portata di quantità di moto infinitesima $d\dot{\bar{Q}}$ è un vettore

$$d\dot{\bar{Q}} = \frac{d\bar{Q}}{dt} = \frac{dm}{dt} \bar{u} = dG_m \bar{u}$$

di componenti

$$d\dot{Q}_x = \frac{dQ_x}{dt} = dG_m u \quad d\dot{Q}_y = \frac{dQ_y}{dt} = dG_m v \quad d\dot{Q}_z = \frac{dQ_z}{dt} = dG_m w$$

dove dG_m è la portata massica infinitesima. Poiché nel concetto di portata massica si inserisce la velocità (3.4.1), il vettore portata quantità di moto diventa un tensore

$$d\dot{Q}_{xx} = dG_{mx} u = u \rho u dy dz$$

$$d\dot{Q}_{yx} = dG_{my} u = v \rho u dz dx$$

$$d\dot{Q}_{zx} = dG_{mz} u = w \rho u dx dy$$

$$d\dot{Q}_{xy} = dG_{mx} v = u \rho v dy dz$$

$$d\dot{Q}_{yy} = dG_{my} v = v \rho v dz dx$$

$$d\dot{Q}_{zy} = dG_{mz} v = w \rho v dx dy$$

$$d\dot{Q}_{xz} = dG_{mx} w = u \rho w dy dz$$

$$d\dot{Q}_{yz} = dG_{my} w = v \rho w dz dx$$

$$d\dot{Q}_{zz} = dG_{mz} w = w \rho w dx dy$$

dove di ogni quantità $d\dot{Q}_{ij}$ il primo pedice i rappresenta la componente della portata di massa e il secondo pedice j rappresenta la componente della velocità.

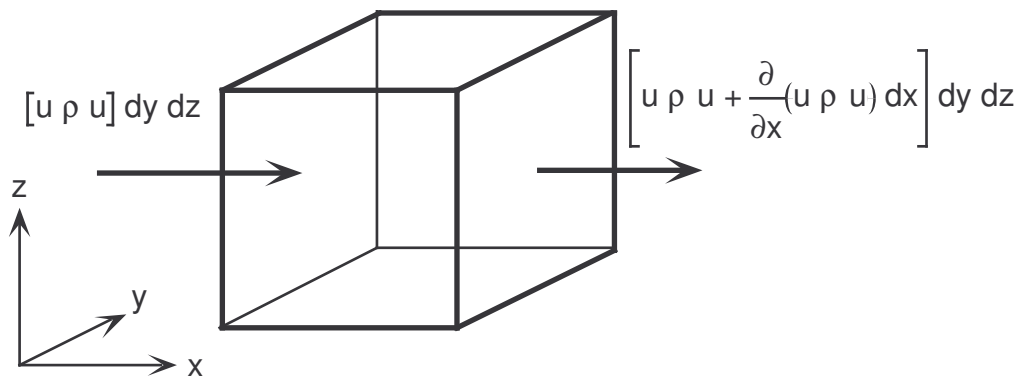


Fig. 4.1.- Portata di quantità di moto passante in direzione x.-

Facendo riferimento al cubetto infinitesimo rappresentato in fig. 4.1, dove i versi positivi degli spostamenti coincidono con quelli degli assi coordinati, si osserva che la portata di quantità di moto in x entrante in direzione x e la portata di quantità di moto in x uscente in direzione x sono date rispettivamente da

$$d\dot{Q}_{xx}(\text{entrante}) = [u \rho u] dy dz \quad d\dot{Q}_{xx}(\text{uscente}) = \left[u \rho u + \frac{\partial}{\partial x}(u \rho u) dx \right] dy dz$$

dove il termine $\frac{\partial}{\partial x}(u \rho u) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ è l'incremento della portata di quantità di moto in x per la portata massica lungo la x, in quanto il regime del moto non è permanente, ma variabile.

Poiché espressioni simili dell'incremento della portata di quantità di moto in x possono essere trovate per le portate massiche lungo le altre due direzioni y e z

$$\begin{aligned} d\dot{Q}_{yx}(\text{entrante}) &= [v \rho u] dz dx & d\dot{Q}_{yx}(\text{uscente}) &= \left[v \rho u + \frac{\partial}{\partial y}(v \rho u) dy \right] dz dx \\ d\dot{Q}_{zx}(\text{entrante}) &= [w \rho u] dx dy & d\dot{Q}_{zx}(\text{uscente}) &= \left[w \rho u + \frac{\partial}{\partial z}(w \rho u) dz \right] dx dy, \end{aligned}$$

dopo le dovute semplificazioni, risulta che la differenza fra le portate della quantità di moto in direzione x è data da

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(u \rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(v \rho u) + \frac{\partial}{\partial z}(w \rho u) \right] dV = -[\text{div}(\bar{u} \rho u)] dV. \quad (4.2.1)$$

Trattandosi di fluido non viscoso, le forze esterne agenti sul volume infinitesimo sono dovute solo a quelle normali di pressione (quelle tangenziali sono per definizione assenti) e alle eventuali forze di massa.

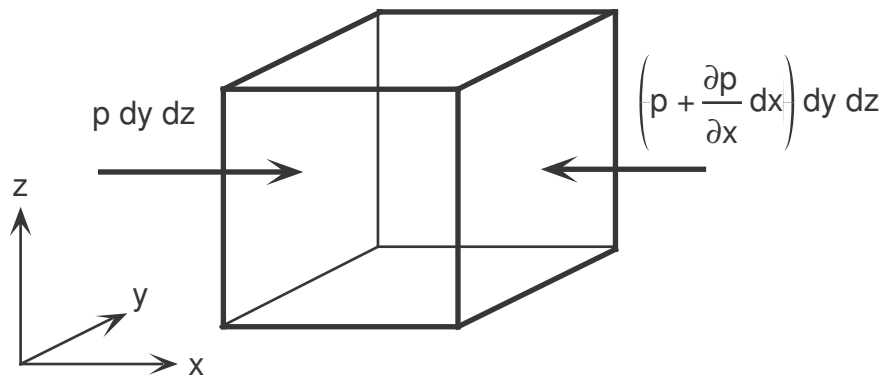


Fig. 4.2.- Forze di pressione lungo l'asse x.-

Facendo riferimento al cubetto infinitesimo rappresentato in fig. 4.2, dove i versi positivi delle pressioni agiscono dall'esterno verso l'interno (bisogna infatti ricordare che per definizione è positiva la pressione che crea sul fluido un'azione di compressione), le forze di pressione in direzione x valgono ($\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx$ è l'incremento della pressione lungo x)

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV$$

mentre l'eventuale forza di massa applicata dall'esterno sull'elemento infinitesimo in direzione x vale

$$F_x = \rho F_{mx} dV$$

dove con F_{mx} viene indicata la forza per unità di massa. Un esempio di forza unitaria di massa può essere l'intensità del campo gravitazionale.

La quantità di moto nella direzione x accumulatasi nel tempo infinitesimo nel volume infinitesimo fisso nello spazio è data da

$$\frac{\partial}{\partial t}(dQ_x) = \frac{\partial}{\partial t}(dm u) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho dV u) = \frac{\partial}{\partial t}(u \rho) dV + (u \rho) \frac{\partial}{\partial t}(dV) = \frac{\partial}{\partial t}(u \rho) dV$$

in quanto la derivata del volume infinitesimo dV rispetto al tempo è nulla.

In definitiva, riunendo le varie quantità calcolate e semplificando il volume infinitesimo dV , si ottiene la relazione che rappresenta l'**equazione di Eulero** nella direzione x

$$\frac{\partial}{\partial t}(u \rho) = -\text{div}(\bar{u} \rho u) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho F_{mx} ; \quad (4.2.2.a)$$

equazioni simili possono essere scritte nelle altre due direzioni y e z

$$\frac{\partial}{\partial t}(v \rho) = -\text{div}(\bar{u} \rho v) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho F_{my} \quad (4.2.2.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(w \rho) = -\text{div}(\bar{u} \rho w) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho F_{mz} . \quad (4.2.2.c)$$

In forma vettoriale l'equazione di Eulero diventa

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u} \rho) + \nabla \bullet (\bar{u} \rho \bar{u}) = -\text{grad}(p) + \rho \bar{F}_m \quad (4.2.3)$$

dove il vettore $\bar{u}$ è composto dalle tre componenti (u, v, w) e il vettore $\bar{F}_m$ dalle tre componenti (F_{mx} , F_{my} , F_{mz}), mentre il significato fisico del simbolo $\nabla \bullet$ è analogo a quello della divergenza, ma tiene conto del fatto che la quantità $\bar{u} \cdot \rho \cdot \bar{u}$ è un tensore del secondo ordine

$$\nabla \bullet (\bar{u} \rho \bar{u}) = \frac{\partial(u_j \rho u_i)}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} u \rho u & v \rho u & w \rho u \\ u \rho v & v \rho v & w \rho v \\ u \rho w & v \rho w & w \rho w \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\} = [\bar{u} \rho \bar{u}]^T \{\partial\} = \{\partial\}^T [\bar{u} \rho \bar{u}]^T$$

dove $\{\partial\}$ è il vettore dell'operatore divergenza.

L'equazione (4.2.3) descrive la variazione nel tempo della quantità di moto per unità di volume, in un punto fissato dello spazio, dovuta alla variazione del tensore della portata della quantità di moto $[\bar{u} \cdot \rho \cdot \bar{u}]$ e alle forze esterne applicate.

Senza darne la dimostrazione, usando la definizione di derivata sostanziale di un vettore (vedi § 3.4) e l'equazione di continuità (3.4.3), si ottiene

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\bar{u} \rho) + \nabla \bullet (\bar{u} \rho \bar{u}) ;$$

l'equazione (4.2.3) diventa allora

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\text{grad}(p) + \rho \bar{F}_m \quad (4.2.4)$$

o in forma estesa (vedi definizione di derivata sostanziale di un vettore nel § 3.4)

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho F_{mx} \quad (4.2.5.a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho F_{my} \quad (4.2.5.b)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho F_{mz} . \quad (4.2.5.c)$$

In coordinate cilindriche le (4.2.5) diventano

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho F_{mr} \quad (4.2.6.a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u v}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho F_{m\theta} \quad (4.2.6.b)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho F_{mz} \quad (4.2.6.c)$$

dove u, v, w sono le componenti della velocità rispettivamente lungo r, θ, z.

L'equazione del moto nelle forme (4.2.5) e (4.2.6) descrive la variazione nel tempo della quantità di moto per unità di volume, come sarebbe vista da un osservatore che si muove assieme al fluido, in conseguenza delle forze esterne applicate. Poiché questa legge si può anche interpretare come l'accelerazione subita da un elemento fluido, in moto con il fluido stesso, in conseguenza delle forze applicate su di esso, si trova la seconda legge della dinamica; in altre parole il bilancio della quantità di moto è perfettamente equivalente alla seconda legge della dinamica

$$\rho \bar{a} = -\text{grad}(p) + \rho \bar{F}_m . \quad (4.2.7)$$

Un incremento positivo della pressione esterna nel verso positivo degli assi coordinati determina un gradiente positivo della pressione e quindi, per l'equilibrio in assenza di forze di volume, un'accelerazione negativa. E' un evento naturale, infatti, che un fluido tenda a spostarsi da una zona a maggior pressione verso una zona in cui la pressione è minore.

4.2.1. EQUAZIONE DI EULERO LUNGO UNA LINEA DI CORRENTE

Si prendano, come assi di riferimento di un volume infinitesimo di fluido dV, la tangente s alla linea di corrente con il verso positivo corrispondente a quello della velocità $\bar{u}$ del fluido e la normale n con il verso positivo corrispondente a quello del raggio di curvatura (vedi fig. 4.3); se il moto è stazionario (u_s costante nel tempo e $\partial u_s / \partial t = 0$), come detto nel § 3.2, le linee di corrente coincidono con le linee di percorso (traiettorie) delle particelle e quindi la velocità normale alla traiettoria per definizione

si annulla ($u_n = 0$).

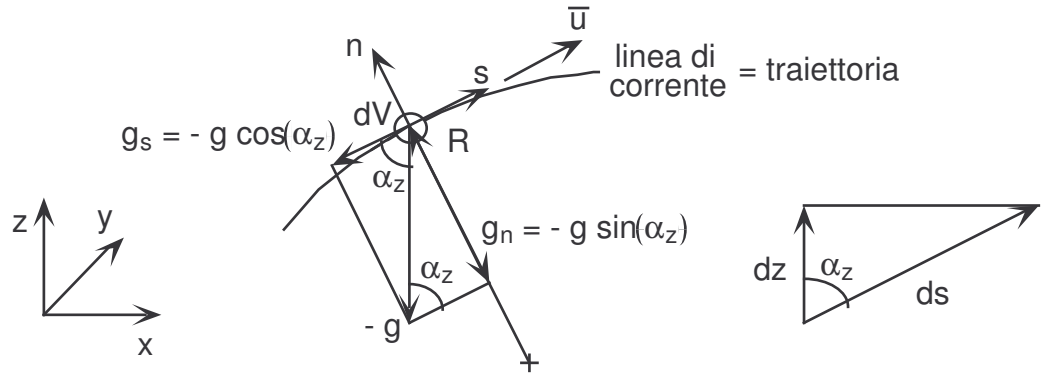


Fig. 4.3.- Particella di fluido in moto lungo una linea di corrente.-

Se la forza per unità di massa è data dall'accelerazione di gravità $\bar{F}_m = (0, 0, -g)$, le equazioni (4.2.5.a) e (4.2.5.b) nelle direzioni $x \rightarrow s$ e $y \rightarrow n$ diventano

$$\rho \frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \rho \frac{\partial u_s}{\partial s} + u_n \rho \frac{\partial u_s}{\partial n} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho F_{ms} \rightarrow u_s \rho \frac{\partial u_s}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g \cos \alpha_z \quad (4.2.1.1.a)$$

$$\rho \frac{\partial u_n}{\partial t} + u_s \rho \frac{\partial u_n}{\partial s} + u_n \rho \frac{\partial u_n}{\partial n} = -\frac{\partial p}{\partial n} + \rho F_{mn} \rightarrow \rho \frac{\partial u_n}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial n} + \rho g \sin \alpha_z \quad (4.2.1.1.b)$$

Trascurando la forza peso ($g = 0$) e poiché per definizione l'accelerazione centripeta a_n vale

$$a_n = \frac{\partial u_n}{\partial t} = -\frac{u_s^2}{R}$$

dove R è il raggio di curvatura della linea di corrente, le relazioni (4.2.1.1) diventano

$$u_s \rho \frac{\partial u_s}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} \quad (4.2.1.2.a)$$

$$\rho \frac{u_s^2}{R} = \frac{\partial p}{\partial n} \quad (4.2.1.2.b)$$

La (4.2.1.2.b) indica che la pressione cresce nel verso uscente rispetto alla posizione del centro di curvatura e che, nelle zone dove le linee di corrente sono rettilinee e quindi dove il raggio di curvatura R è infinito, la pressione rimane costante in direzione normale alle traiettoria.

4.3. TEOREMA DI BERNOULLI

Se la relazione (4.2.1.1.a), che rappresenta l'equazione di Eulero (4.2.4) proiettata lungo una linea di corrente s , oppure lungo una traiettoria quando il moto è stazionario (vedi fig. 4.3), è integrata da una posizione iniziale 1 ad una posizione finale 2, dopo aver diviso per la massa volumica, dà

$$\int_1^2 u_s \frac{du_s}{ds} ds + \int_1^2 \frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} ds + \int_1^2 g \cos \alpha_z ds = 0$$

dove si è trasformato il simbolo di derivata parziale in quello di derivata totale in quanto il moto dipende solo dalla coordinata s ; dato che il prodotto $\cos(\alpha_z) \cdot ds$ rappresenta la proiezione del segmento ds lungo la verticale dz

$$dz = ds \cos \alpha_z ,$$

indicando con u la velocità generica del fluido lungo la linea di corrente ($u = u_s$), dalla relazione precedente si ottiene

$$\int_1^2 \frac{1}{2} du^2 + \int_1^2 \frac{1}{\rho} dp + \int_1^2 g dz = 0 .$$

Alla fine si ha

$$\frac{1}{2} u_2^2 - \frac{1}{2} u_1^2 + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g z_2 - g z_1 = 0 . \quad (4.3.1)$$

4.3.1. FLUIDO INCOMPRESSIBILE

Se il fluido è incompressibile ($\rho = \text{cost}$) dalla relazione (4.3.1), portando fuori da integrale la massa volumica, si ottiene

$$\frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 + \rho g z_2 \quad (4.3.1.1)$$

oppure

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + p + \rho g z = \text{cost} \quad \rightarrow \quad \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{cost} , \quad (4.3.1.2)$$

la prima espressa in [$\text{J/m}^3 = \text{N/m}^2$] e la seconda in [m].

La relazione (4.3.1.2), che passa sotto il nome di **teorema di Bernoulli** perché fu divulgato nel 1738 all'interno del suo "Trattato di idrodinamica" (il primo ad essere apparso su tale scienza), può essere considerata come una forma particolare del principio di conservazione dell'energia. Infatti, nel moto permanente di un fluido ideale ma pesante, lungo ogni traiettoria è costante la somma delle energie per unità di volume: **cinetica** $\rho \cdot u^2/2$, **di pressione** p e **potenziale** $\rho \cdot g \cdot z$. Una interessante rappresentazione grafica di questo teorema è illustrata nella fig. 4.4, dove vengono messe in evidenza le altezze: **cinetica** $u^2/(2g)$, **piezometrica** $p/(\rho \cdot g)$ e **geometrica** z .

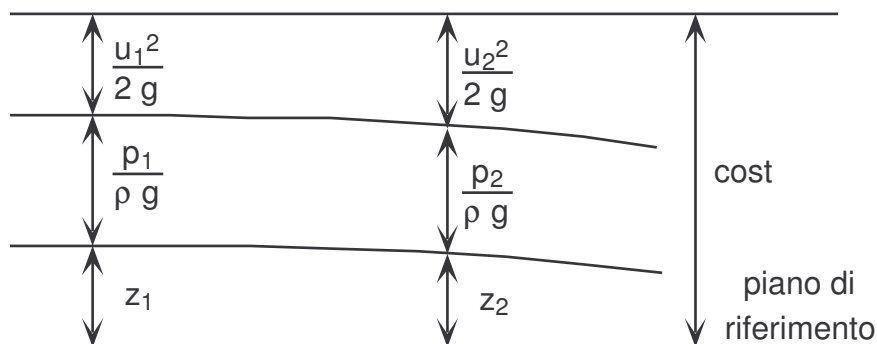


Fig. 4.4.- Rappresentazione grafica del teorema di Bernoulli per un fluido ideale.-

L'equazione (3.3.2) scritta per un fluido incompressibile nella forma seguente

$$G_{v1} = G_{v2} \quad \rightarrow \quad u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad (4.3.1.3)$$

consente di trovare una ulteriore relazione che mette la velocità u_1 in funzione della la velocità u_2 e, insieme all'equazione (4.3.1.1), permette di risolvere problemi elementari di fluidodinamica con fluidi incompressibili.

4.3.2. FLUIDO COMPRESSIBILE

L'equazione (4.3.1), invece, passa sotto il nome di equazione compressibile di Bernoulli e il secondo termine può essere integrato solo se si conosce la relazione esistente fra la pressione p e la massa volumica ρ , relazione che a sua volta dipende dalle condizioni termodinamiche secondo le quali il fluido si trasforma.

TRASFORMAZIONE ISOTERMA

Se la trasformazione è **isoterma**, e di conseguenza se tra condizione iniziale e condizione generica si verifica (vedi § 1.12) che

$$p_1 v_1 = p v = R T \quad \rightarrow \quad \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p}{\rho} = R T \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{p_1}{\rho_1} \frac{1}{p} = \frac{R T}{p},$$

si ottiene

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \int_1^2 R T \frac{dp}{p} = R T [\ln(p_2) - \ln(p_1)] = R T \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{p_1}{\rho_1} \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

e la relazione (4.3.1) si trasforma nella

$$\frac{1}{2} u_2^2 - \frac{1}{2} u_1^2 + R T \ln(p_2) - R T \ln(p_1) + g z_2 - g z_1 = 0. \quad (4.3.2.1)$$

Per di più l'equazione (3.3.2), qui riportata

$$G_{m1} = G_{m2} \quad \rightarrow \quad u_1 \rho_1 S_1 = u_2 \rho_2 S_2, \quad (4.3.2.2)$$

consente di trovare una ulteriore relazione che mette la velocità u_1 in funzione della la velocità u_2 e, con l'equazione (4.3.2.1), permette di risolvere problemi elementari di fluidodinamica con fluidi compressibili sottoposti a trasformazioni isoterme.

TRASFORMAZIONE ADIABATICA

Se la trasformazione è invece **adiabatica**, e di conseguenza se tra condizione iniziale e condizione generica si verifica (vedi § 1.12) che

$$p_1 v_1^\gamma = p v^\gamma \quad \rightarrow \quad \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1} = \frac{p^{1/\gamma}}{\rho} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1} \frac{1}{p^{1/\gamma}},$$

si ottiene

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \int_1^2 \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1} \frac{dp}{p^{1/\gamma}} = \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1} \left(\frac{1}{1-1/\gamma} \right) (p_2^{1-1/\gamma} - p_1^{1-1/\gamma}) = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]$$

e la relazione (4.3.1) si trasforma nelle

$$\frac{1}{2} u_2^2 - \frac{1}{2} u_1^2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right] + g z_2 - g z_1 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} u_1^2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1} p_1^{(\gamma-1)/\gamma} + g z_1 = \frac{1}{2} u_2^2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1} p_2^{(\gamma-1)/\gamma} + g z_2 .$$

(4.3.2.3)

Per di più l'equazione (4.3.2.2) consente di trovare una ulteriore relazione che mette la velocità u_1 in funzione della la velocità u_2 e, insieme all'equazione (4.3.2.3), permette di risolvere problemi elementari di fluidodinamica con fluidi compressibili sottoposti a trasformazioni adiabatiche.

4.4. APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI BERNOULLI

Il teorema di Bernoulli è stato trovato nella espressione più generica (4.3.1) con le ipotesi seguenti:

- moto stazionario,
- fluido non viscoso,
- flusso lungo una linea di corrente,

e nella espressione (4.3.1.1) anche con l'ipotesi aggiuntiva seguente:

- fluido incompressibile.

Queste ipotesi limitano notevolmente il suo impiego (se ne discuterà in modo più approfondito nel § 4.5), tuttavia esso è importante nell'idraulica pratica poiché sono molti i casi in cui le dissipazioni di energia risultano piccole rispetto alle energie trasformate. Può così essere applicato a tutti i processi di efflusso per determinare la velocità di uscita e ad alcuni apparecchi di misura della portata e della pressione.

4.4.1. VELOCITÀ DI EFFLUSSO - TEOREMA DI TORRICELLI

Nella fig. 4.5 è illustrato un serbatoio contenente un liquido fino ad un'altezza Δz sopra un foro di sezione piccola rispetto a quella del serbatoio; il liquido esce attraverso il foro per effetto del battente Δz .

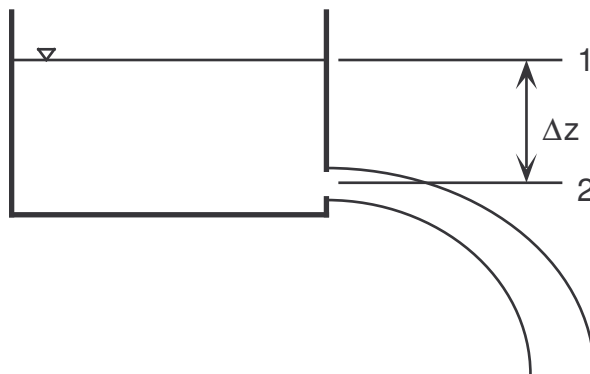


Fig. 4.5.- Esperienza di Torricelli.-

Se viene applicato il teorema di Bernoulli (4.3.1.1) alla posizione 1 corrispondente al pelo libero del serbatoio e alla posizione 2 in corrispondenza del foro e se si stabilisce che $u_1 = 0$, in quanto il liquido è fermo sulla superficie libera, e che $p_1 = p_2 = p_{atm}$, si ottiene

$$\rho g z_1 = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + \rho g z_2 \rightarrow \frac{1}{2} u_2^2 = g(z_1 - z_2) \rightarrow u_2 = \sqrt{2 g \Delta z} \quad (4.4.1.1)$$

cioè la velocità d'efflusso è proporzionale alla radice quadrata dell'altezza geometrica e non dipende dalla massa volumica del liquido.

Questo risultato fu ottenuto da **Torricelli**, un secolo prima che fosse pubblicato il trattato di Bernoulli, in base all'analogia fra la velocità di efflusso e quella che acquista un grave cadendo dalla stessa altezza (vedi § 6.2.1). La sua spiegazione risiede nel fatto che le variazioni energetiche dipendono solo dallo stato iniziale e dallo stato finale; infatti la fuoriuscita di un volume infinitesimo dV dal foro provoca un abbassamento del pelo libero di una quantità dz legata a dV tramite la sezione del serbatoio e da un punto di vista energetico è la stessa cosa che il volume dV sia estratto dalle vicinanze del foro oppure venga portato all'altezza del foro dal pelo libero per una via qualunque, per esempio in caduta libera: il risultato è sempre un abbassamento dz del livello.

Il teorema di Torricelli vale, quindi, qualunque sia la posizione del foro rispetto al serbatoio (di fianco, di sotto, ecc.) e qualunque ne sia la forma, purché la sezione sia abbastanza piccola rispetto a quella del recipiente.

4.4.2. MISURA DELLA PORTATA - TUBO DI VENTURI

Si abbia un tubo orizzontale, dalle sezioni indicate in fig. 4.6.a, percorso da una corrente fluida formata da un fluido ideale (incompressibile e non viscoso).

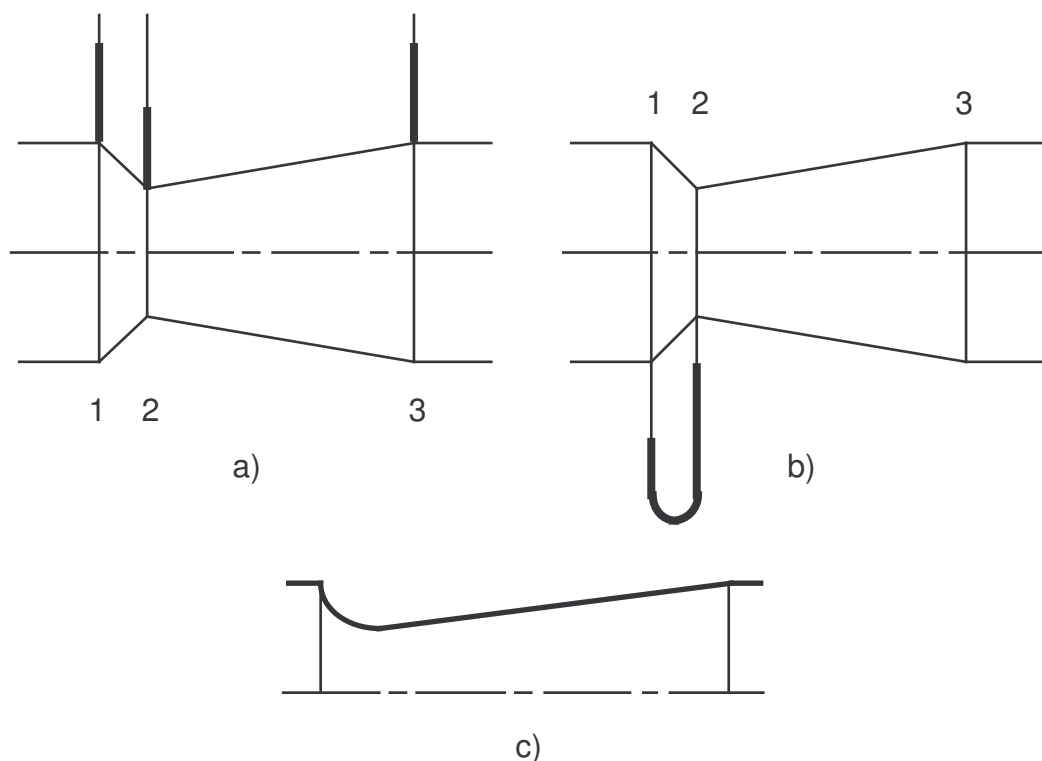


Fig. 4.6.- Tubo di Venturi: a) con prese; b) con manometro differenziale; c) con forma raccordata.-

L'applicazione del teorema di Bernoulli (4.3.1.1) alle sezioni 1, 2 e 3, dato che $z_1 = z_2 = z_3$, porta alla seguente relazione

$$\frac{1}{2} \rho u_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho u_2^2 + p_2 = \frac{1}{2} \rho u_3^2 + p_3 . \quad (4.4.2.1)$$

Nel § 3.3 si è già visto che, per il principio di conservazione della massa, la velocità media u_2 è maggiore delle velocità medie u_1 e u_3 e che per di più esiste numericamente un rapporto di proporzionalità lineare inversa con le aree delle sezioni

$$u_2 = \frac{S_1}{S_2} u_1 = \frac{S_3}{S_2} u_3 . \quad (4.4.2.2)$$

Ciò significa che, per compensare l'aumento dell'energia cinetica, quella di pressione deve diminuire; infatti i tubi piezometrici applicati nelle sezioni 1, 2 e 3 mostrano che la pressione nella sezione strozzata è più piccola delle sezioni maggiori.

Questa proprietà viene applicata comunemente nella misura delle velocità e delle portate delle correnti fluide mediante il **tubo di Venturi** o **venturimetro**, rappresentato in fig. 4.6.b, che riproduce in sostanza la disposizione della fig. 4.6.a e che viene inserito nella condotta interessata: la sua forma deve essere fatta in modo da non modificare sensibilmente la portata. Dalla differenza della pressione fra le sezioni 1 e 2, misurata col manometro differenziale raffigurato, si risale mediante la (4.4.2.1) e la (4.4.2.2) alla velocità u_2

$$\frac{1}{2} \rho u_2^2 = (p_1 - p_2) + \frac{1}{2} \rho u_2^2 \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \rightarrow u_2 = \frac{\sqrt{2(p_1 - p_2)}}{\sqrt{\rho \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]}} \quad (4.4.2.3)$$

e quindi alla portata massica G_m

$$G_m = u_2 \rho S_2 = \sqrt{\frac{2 \rho (p_1 - p_2) S_1^2 S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}} . \quad (4.4.2.4)$$

La differenza di pressione $p_1 - p_2$ delle relazioni (4.4.2.3) e (4.4.2.4) è determinata in funzione della differenza di altezza del fluido manometrico Δz mediante la legge (2.3.1) del manometro differenziale

$$p_1 - p_2 = (\rho_M - \rho) g \Delta z \quad (4.4.2.5)$$

dove ρ_M è la massa volumica del fluido manometrico e quindi alla fine si ricava

$$u_2 = \frac{\sqrt{2(\rho_M - \rho) g \Delta z}}{\sqrt{\rho \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]}} \quad G_m = \sqrt{\frac{2 \rho (\rho_M - \rho) g \Delta z S_1^2 S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}} .$$

Il fluido, che circola all'interno di un tubo di Venturi per la misura della velocità o della portata, è reale e quindi presenta perdite di tipo continuo e di tipo accidentale (vedi § 5.7). Per ridurre tali perdite fra le sezioni di misura 1 e 2 e quindi per avere valori quanto più precisi possibile, a meno di prendere in considerazione anche le perdite che si verificano, si raccorda con una curva continua il tratto di ingresso per evitare ricircoli e si costruisce il tratto di uscita con un angolo totale di conicità inferiore a $7 \div 8^\circ$ per evitare distacchi di vena dalla parete (vedi fig. 4.6.c).

Su questo principio funzionano anche molte applicazioni industriali: fra esse si può ricordare per esempio il carburatore di un motore a combustione interna, il becco a gas di Bunsen, l'eiettore per creare una depressione, ecc.

4.4.3. MISURA DELLA PRESSIONE - TUBO DI PITOT

La pressione p dell'equazione di Bernoulli (4.3.1.2) è la **pressione termodinamica**, comunemente chiamata anche **pressione statica**, e può essere misurata da uno strumento che si muova con il fluido (per togliere l'influenza della energia cinetica $\rho \cdot u^2/2$) su un piano equipotenziale (per togliere l'influenza della energia potenziale $\rho \cdot g \cdot z$). Nel § 4.2.1 si è però visto che in direzione normale alle linee di corrente rettilinee non si verifica alcuna variazione di pressione; questo fatto rende possibile la misura della pressione statica in un fluido in moto mediante l'uso di una "presa" di pressione su una parete rettilinea dove anche le linee di corrente sono rettilinee (vedi fig. 4.7.a). La presa è un piccolo foro che, per avere misure precise, deve essere eseguito sulla parete con molta accuratezza facendo attenzione che le sue pareti siano prive di bave. Essa è poi connessa ad uno strumento di misura della pressione (manometro).

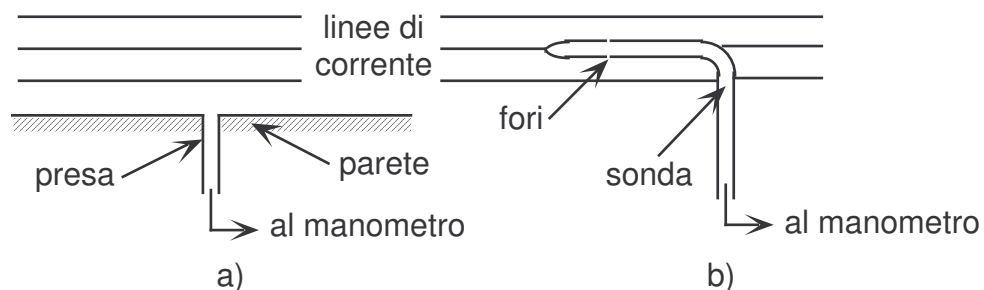


Fig. 4.7.- Misura della pressione statica: a) presa; b) sonda.-

Su una linea di corrente lontana dalla parete o dove le linee di corrente sono curve misure accurate di pressione statica possono essere fatte da una "sonda statica" del tipo rappresentato in fig. 4.7.b. Essa è formata da un tubicino di diametro piccolo rispetto alla lunghezza e trascurabile rispetto alla sezione della corrente, chiuso nella parte terminale, fornito di piccoli fori situati sul mantello laterale e collegato ad un manometro; la sonda, se è posizionata in modo tale che la sua sezione di misura con i fori sia allineata con la direzione locale del flusso, simula la presa esaminata in precedenza perché la superficie laterale della sonda prende il posto della parete rettilinea e i forellini si trovano in posizione perpendicolare alle linee di corrente. L'apparecchiatura passa sotto il nome di **tubo di Pitot**, perché fu utilizzata per la prima volta dal Pitot.

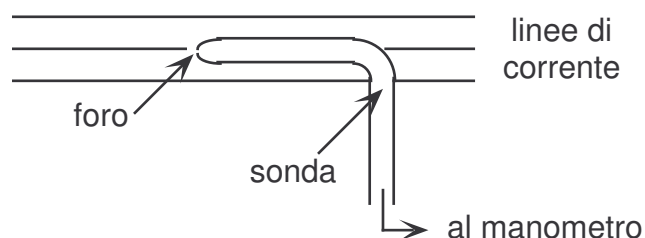


Fig. 4.8.- Misura della pressione di ristagno.-

La teoria dell'equazione di Bernoulli si basa su un fluido ideale, ma le misure sono

fatte su un fluido reale viscoso. Affinché la presenza del cilindretto influenzi meno possibile la lettura, si deve cercare di ridurre le perdite al minimo; ciò avviene se l'estremità è ben arrotondata, se le pareti sono lisce e se i fori sono di diametro molto piccolo.

Se un tubo di Pitot, invece dei forellini laterali, presenta un solo foro nella parte anteriore dove una linea di corrente si estingue (vedi fig. 4.8), la velocità del fluido in questa posizione si annulla con un processo considerato senza attrito: si crea un punto di arresto, detto **punto di ristagno**. Trascurando la differenza di altezza entro cui il fenomeno di arresto si verifica, dall'equazione (4.3.1.1) si ottiene la **pressione di ristagno** p_0

$$\frac{1}{2} \rho u^2 + p = \frac{1}{2} \rho u_0^2 + p_0 \quad \rightarrow \quad p_0 = p + \frac{1}{2} \rho u^2 = p + p_d \quad (4.4.3.1)$$

perché per definizione la velocità u_0 nel punto di ristagno è nulla; i valori senza pedice rappresentano quelli generici del fluido mentre il termine p_d viene chiamato **pressione dinamica**. La pressione di ristagno per un fluido ideale, cioè incompressibile e non viscoso, è quindi data dalla somma della pressione statica e della pressione dinamica.

4.4.4. MISURA DELLA VELOCITÀ - TUBO DI PRANDTL

Dalla relazione (4.4.3.1) si nota che, se si riesce a misurare sia la pressione statica sia la pressione di ristagno, è possibile anche determinare la velocità del fluido; si ha infatti

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad \rightarrow \quad u = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_0 - p)} \quad (4.4.4.1)$$

La situazione sperimentale è riportata in fig. 4.9.a. La stessa lettura può però essere fatta anche mediante un solo strumento, chiamato **tubo di Prandtl**, che misura direttamente la differenza fra le due pressioni (vedi fig. 4.9.b).

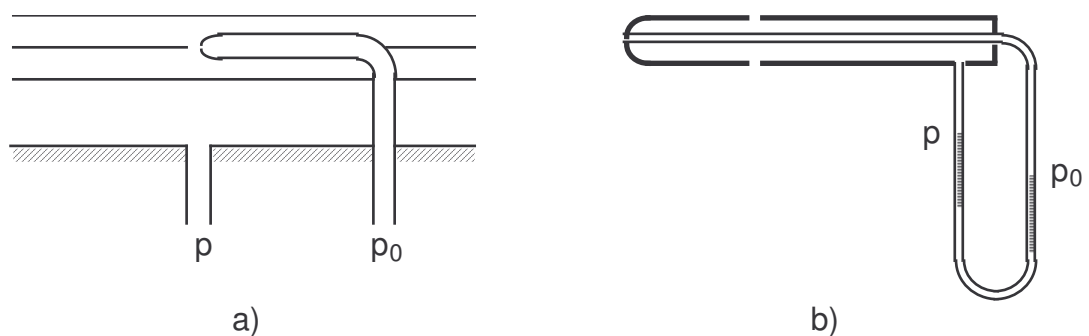


Fig. 4.9.- Misura della velocità: a) doppia misura; b) tubo di Prandtl.-

Collegando il foro anteriore e i fori laterali ad un manometro differenziale, dalla (4.4.2.5) e dalla (4.4.4.1) alla fine si ottiene

$$u = \sqrt{2 \frac{\rho_M - \rho}{\rho} g \Delta z} \quad (4.4.4.2)$$

Questo apparecchio, dovuto al Prandtl, fornisce risultati attendibili nella misura della velocità di fluidi sia liquidi che aeriformi, dovunque si possa ammettere che il valore della velocità sia costante su un'estensione notevole rispetto alle dimensioni del tu-

bo.

4.5.- CAUTELE NELL'USO DEL TEOREMA DI BERNOULLI

Nel paragrafo precedente si sono viste alcune applicazioni del teorema di Bernoulli in cui le limitazioni da esso imposte portavano comunque ad un modello idrodinamico attendibile. Si verificano però alcune situazioni in cui le limitazioni sono clamorosamente violate dal fenomeno studiato e quindi il modello creato diventa del tutto inattendibile.

In particolare per gli aeriformi deve essere verificata la limitazione riguardante la incompressibilità e quindi deve essere posta molta attenzione all'utilizzo del teorema nella forma (4.3.1.1). Le variazioni della massa volumica causate dalla pressione dinamica del moto possono essere trascurate nelle applicazioni di tipo ingegneristico in cui il numero di Mach locale non supera il 30 % ($M < 0.3$). Infatti la massa volumica, considerata costante nel calcolo della pressione dinamica, nel caso di un numero di Mach locale pari a circa 0.3 varia a seconda del tipo di trasformazione intorno a valori del 5 % e del 6 %, che possono essere considerati limitati.

Bisogna fare attenzione anche al fatto che, pur in flussi a bassa velocità, variazioni di temperatura possono creare negli aeriformi variazioni elevate della massa volumica; il teorema di Bernoulli non può quindi essere usato nello studio dei flussi di aria attraverso elementi scaldanti, come per esempio gli asciugacapelli, dove si verificano elevate variazioni di temperatura. Infatti la massa volumica nel caso di un aumento della temperatura da 0 °C a 100 °C varia intorno a valori del 12 % che non possono essere considerati limitati. Per risolvere questi tipi di problemi bisogna, poi, anche introdurre un'equazione di tipo energetico.

Il flusso lungo l'ugello convergente può essere ben modellato dal teorema di Bernoulli, perché il gradiente negativo della pressione nella direzione del moto non crea separazione del fluido dalla parete e perché l'influenza trascurabile dell'attrito mantiene sottile lo strato limite vicino alla parete. Il flusso può essere considerato monodimensionale e le velocità in ogni sezione possono essere calcolate in base alla portata e alla sezione. Differente è invece il flusso lungo un ugello divergente in cui il gradiente positivo della pressione nella direzione del moto provoca forti ispessimenti dello strato limite vicino alla parete con molte probabilità di innesco della separazione del fluido dalla parete stessa. Il modello monodimensionale in questo caso non è attendibile perché, a causa dello strozzamento provocato dall'elevato spessore dello strato limite, l'aumento di pressione effettiva nei diffusori è più piccola di quella prevista dal modello monodimensionale con fluido ideale.

Il flusso lungo un sifone può essere ben modellato dal teorema di Bernoulli, perché si considera l'imbocco ben arrotondato, le curve ampie, la lunghezza totale della tubazione esigua e le perdite all'uscita assenti. Nella realtà invece si verificano perdite di attrito lungo la tubazione (§ 10.2.1) e separazioni negli imbocchi e nelle curve nonché contrazioni di vena allo scarico (§ 10.2.2); il modello monodimensionale, se le perdite sono elevate rispetto alle energie in gioco, non è quindi più attendibile.

Il problema dell'alimentazione di un canale mediante il sollevamento di una paratia rappresenta un flusso a pelo libero analogo a quello del flusso interno riguardante l'ugello convergente e il teorema di Bernoulli riesce a descrivere in modo adeguato il fenomeno. Invece il flusso a pelo libero costituito da un salto idraulico per il funzionamento di una turbina idraulica è fortemente turbolento tanto che è impossibile definire le linee di corrente e quindi applicare il teorema di Bernoulli.

Risulta ugualmente impossibile definire linee di corrente attraverso una macchina come un'elica, una pompa, una turbina o un compressore. In questi casi il fenomeno può essere studiato o da un punto di vista complessivo mediante le equazioni in forma integrale del capitolo 10 applicate ad un volume di controllo che comprende tutta la macchina o da un punto di vista puntuale mediante le equazioni in forma differenziale dei capitoli 3, 4, 5 e 6 applicate a tutto il campo fluido.