

CAPITOLO 5

DINAMICA DEI FLUIDI VISCOSI

5.0.- RICHIAMI TEORICI

5.1.- TENSIONI

5.2.- PREVALENZE

5.3.- SALTI

5.4.- POTENZE

5.0.- RICHIAMI TEORICI

Tensioni

In base alla teoria di Stokes, le tensioni all'interno di un fluido incompressibile e viscoso valgono

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -p + \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) & \sigma_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yy} &= -p + \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) & \sigma_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \sigma_{zz} &= -p + \mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) & \sigma_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (5.1)$$

Equazione di Bernoulli

L'equazione di Bernoulli (4.5), nel caso di fluido incompressibile e viscoso, diventa

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 + H = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h \quad (5.2)$$

dove H è l'energia per unità di peso che il fluido riceve dall'ambiente esterno fra le sezioni (1), del serbatoio di aspirazione, e (2), del serbatoio di mandata, mentre h sono le perdite di carico, o energetiche in generale, che si verificano fra le sezioni (1) e (2).

Prevalenze

La prevalenza **totale** H_t di un impianto è l'energia minima necessaria a far scorrere il fluido; essa vale

$$H_t = H_g + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + h_a + h_m \quad (5.3)$$

dove H_g è la prevalenza geodetica (differenza di altezza $z_2 - z_1$ fra la superficie libera del serbatoio di mandata (2) e la superficie libera del serbatoio di aspirazione (1)) e h_a e h_m sono rispettivamente le perdite nella tubazione di aspirazione e di mandata.

La prevalenza di **aspirazione** H_a è il dislivello $z_0 - z_1$ fra la posizione della pompa (0) e la superficie libera del serbatoio di aspirazione (1)

$$H_a = z_0 - z_1 = \frac{p_1 - p_0}{\rho g} - h_a \quad (5.4)$$

La prevalenza di **mandata** H_m è il dislivello $z_2 - z_0$ fra la superficie libera del serbatoio di mandata (2) e la posizione della pompa (0)

$$H_m = z_2 - z_0 = \frac{p_0 - p_2}{\rho g} - h_m \quad (5.5)$$

La prevalenza **manometrica** H_M di una pompa è l'energia che gli organi della macchina cedono effettivamente al fluido; essa vale

$$H_M = \frac{p_m - p_a}{\rho g} + (z_m - z_a) \quad (5.6)$$

dove $z_m - z_a$ è la differenza di altezza fra le sezioni di uscita (m) e di entrata (a) della pompa.

Salti

Il salto **utile** H_u di un impianto è l'energia massima messa dal fluido a disposizione della macchina; esso vale

$$H_u = H_g + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} - h_a - h_s \quad (5.7)$$

dove H_g è il salto geodetico (differenza di altezza $z_2 - z_1$ fra la superficie libera del serbatoio di alimentazione (2) e la superficie libera del serbatoio di scarico (1)) e h_a e h_s sono rispettivamente le perdite nella tubazione di alimentazione e di scarico.

Il salto di **alimentazione** H_a è il dislivello $z_2 - z_0$ fra la superficie libera del serbatoio di alimentazione (2) e la posizione della turbina (0)

$$H_a = z_2 - z_0 = \frac{p_0 - p_2}{\rho g} + h_a . \quad (5.8)$$

Il salto di **scarico** H_s è il dislivello $z_0 - z_1$ fra la posizione della turbina (0) e la superficie libera del serbatoio di scarico (1)

$$H_s = z_0 - z_1 = \frac{p_1 - p_0}{\rho g} + h_s . \quad (5.9)$$

Il salto **utile** H_T di una turbina è l'energia che gli organi della macchina ricevono effettivamente dal fluido; esso vale

$$H_u = \frac{p_a - p_s}{\rho g} + (z_a - z_s) \quad (5.10)$$

dove $z_a - z_s$ è la differenza di altezza fra le sezioni di alimentazione (a) e di scarico (s) della turbina.

Potenze

La potenza P_p erogata da una pompa è data da

$$P_p = \rho g H_M G_v = g H_M G_m , \quad (5.11)$$

mentre la potenza P_T assorbita da una turbina è data da

$$P_T = \rho g H_u G_v = g H_u G_m \quad (5.12)$$

dove G_v e G_m sono rispettivamente la portata volumetrica e la portata massica.

5.1.- TENSIONI

Esercizio 5.1.1

Calcolare le tensioni che si verificano nel cubo dell'esercizio 3.4.3 sapendo che la pressione statica vale $p = 1.5$ bar e che il fluido è acqua a $T = 35$ °C.

Dalle relazioni (5.1), dai risultati dell'esercizio 3.4.3 e dalla tab. T.9, in cui viene letta la viscosità dell'acqua μ , si ha

$$\sigma_{xx} = -p + \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -1.5 \times 10^5 + 0.048 \times (2 \times 0) = -150000 \text{ Pa} ;$$

$$\sigma_{yy} = -p + \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -1.5 \times 10^5 + 0.048 \times (2 \times 0.1) = -150000 + 0.096 \cong -150000 \text{ Pa} ;$$

$$\sigma_{zz} = -p + \mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -1.5 \times 10^5 + 0.048 \times (2 \times 0) = -150000 \text{ Pa} ;$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0.048 \times (0.3 + 0) = 0.0144 \text{ Pa} ;$$

$$\sigma_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0.048 \times (0 + 0) = 0 \text{ Pa} ;$$

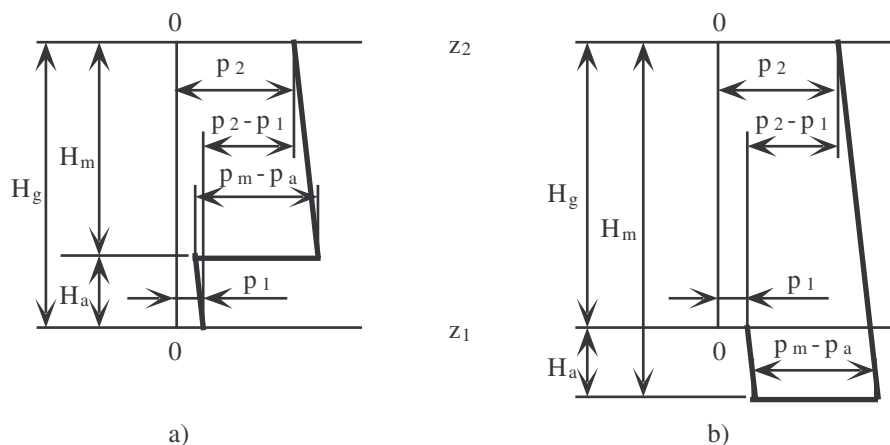
$$\sigma_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0.048 \times (0 + 0) = 0 \text{ Pa} .$$

Da notare come l'influenza della tensione deviatorica, rispetto a quella idrostatica, sia del tutto trascurabile.

5.2.- PREVALENZE

Esercizio 5.2.1

Una caldaia funziona alla pressione assoluta $p_2 = 16$ bar e ha un dislivello tra i peli liberi del pozzo di alimentazione e della caldaia pari a $H_g = z_2 - z_1 = 6.7$ m. Se le perdite attraverso le valvole e le tubazioni della aspirazione e della mandata ammontano a $h = h_a + h_m = 1.7$ m, calcolare la prevalenza totale H_t richiesta dall'impianto.



Dalla relazione (5.3) si ottiene

$$H_t = H_g + \frac{p_2 + p_1}{\rho g} + h_a + h_m = 6.7 + \frac{(16+1) \times 10^5 - 1 \times 10^5}{1000 \times 9.80665} + 1.7 = 6.7 + 163.2 + 1.7 \approx 172 \text{ m}$$

se si considera che il pozzo di aspirazione sia alla pressione atmosferica $p_1 = 1 \text{ bar}$.

Nella figura viene riportato, sullo schema di un impianto di sollevamento in cui l'installazione della pompa può essere effettuata senza battente (fig. a) o con battente (fig. b), l'andamento del diagramma della pressione nel caso in cui tutte le tubazioni siano a diametro costante e quindi non si verifichino scambi tra energia cinetica ed energia di pressione; da esso si nota l'inclinazione dovuta al carico piezometrico, la diversa entità dei valori assoluti della pressione di aspirazione p_a e di mandata p_m nelle due versioni, ma nel contempo anche la costanza della loro differenza nei due casi.

La prevalenza totale rappresenta la prevalenza manometrica minima richiesta alla pompa da installare; infatti, per garantire il funzionamento dell'impianto, deve essere

$$H_M \geq H_f \quad ,$$

per esempio $H_M = 200$ m.

Esercizio 5.2.2

Calcolare la prevalenza manometrica H_M di una pompa di circolazione dell'acqua di raffreddamento di un motore a combustione interna sapendo che un manometro differenziale a mercurio posto tra l'aspirazione e la mandata della pompa segna un dislivello $\Delta h = 636 \text{ mm}$.

Sapendo dalla relazione del manometro differenziale (2.10) che la differenza di pressione è data da

$$\Delta p = (\rho_M - \rho) g \Delta h = (13595 - 1000) \times 9.80665 \times 0.636 = 78500 \text{ Pa}$$

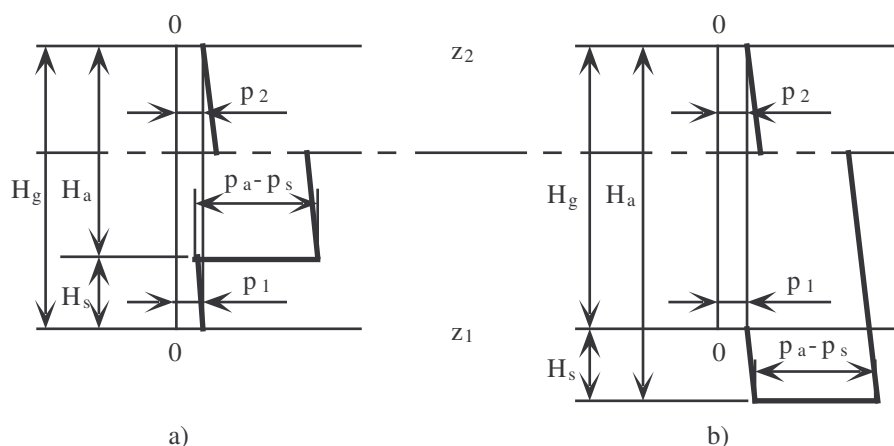
dove ρ_M e ρ sono rispettivamente le masse volumiche del liquido manometrico mercurio e di quello attivo acqua, dalla relazione (5.6) si ottiene

$$H_M = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{78500}{1000 \times 9.80665} = 8. \text{ m} .$$

5.3.- SALTI

Esercizio 5.3.1

Da un fiume a quota $z_2 = 980$ m è derivata una tubazione, lunga $L = 5$ km, che preleva due terzi della sua portata e la restituisce a quota $z_1 = 830$ m. Le perdite sono valutate in $h = 7.6$ m. Determinare il salto utile H_u per la turbina installata nell'impianto.



Dalla relazione (5.7) si ottiene

$$H_u = H_g + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} - h_a - h_s = z_2 - z_1 - h = 980 - 830 - 7.6 \cong 142 \text{ m}$$

se si considera che il prelievo e la restituzione avvengano a pressione atmosferica $p_2 = p_1 = 1$ bar.

L'andamento della pressione riportato nella figura precedente è analogo a quello della figura dell'esercizio 5.2.1 visto per una pompa e identiche sono le considerazioni da farsi sull'inclinazione del diagramma e sui valori della pressione di alimentazione e di scarico.

Esercizio 5.3.2

Due manometri, posti a monte e a valle di una turbina ($z_a - z_s = 2.7$ m), segnano rispettivamente le pressioni assolute $p_a = 12.5$ bar e $p_s = 0.6$ bar. Determinare il salto utile H_u .

Dalla relazione (5.10) si ottiene

$$H_u = \frac{p_a - p_s}{\rho g} + (z_a - z_s) = \frac{(12.5 - 0.6) \times 10^5}{1000 \times 9.80665} + 2.7 = 121.3 + 2.7 = 124 \text{ m}$$

Esercizio 5.3.3

In un impianto sono installate in parallelo una pompa e una turbina aventi quindi la prevalenza geometrica H_g uguale al salto geometrico H_g . Immaginando che le pressioni siano uguali $p_2 = p_1$ e che le tubazioni presentino le stesse perdite $h_a = h_s = h_1$ e $h_m = h_a = h_2$, determinare la prevalenza totale H_t e il salto utile H_u .

Dalle relazioni (5.3) e (5.7) si ottiene rispettivamente

$$H_t = H_g + h_1 + h_2$$

$$H_u = H_g - h_1 - h_2$$

e di conseguenza

$$H_t > H_u$$

perché le perdite nella prevalenza totale si sommano mentre nel salto utile si sottraggono. Se così non fosse (da notare anche che non si sono prese in considerazione le perdite interne della pompa e della turbina), collegando le due macchine si otterrebbe il moto perpetuo; la macchina utilizzatrice richiede quindi più energia di quella che nelle stesse condizioni può essere prodotta da una macchina motrice.

5.4.- POTENZE

Esercizio 5.4.1

Le caratteristiche di una pompa di lavatrice sono date da una portata $G_v = 250 \text{ l/min}$ e da una prevalenza manometrica $H_M = 3 \text{ m}$. Se la potenza data alla pompa è $P_p' = 290 \text{ W}$, determinare il rendimento η_p della pompa.

Dalla relazione (5.11), in base ai dati forniti, si ha

$$P_p = \rho g H_M G_v = 1000 \times 9.80665 \times 3 \times 0.004167 = 123 \text{ W}$$

dove la portata volumetrica è stata trasformata in unità fondamentali

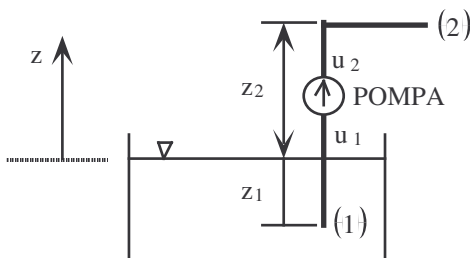
$$G_v = 250 \left[\frac{\text{litri}}{\text{min}} \right] = 250 \times \frac{1}{1000} \frac{1}{60} \times \left[\frac{\text{litri}}{\text{min}} \frac{\text{m}^3}{\text{litri}} \frac{\text{min}}{\text{s}} \right] = 0.004167 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right].$$

Il rendimento della pompa è quindi dato da

$$P_p = \eta_p P_p' \quad \rightarrow \quad \eta_p = \frac{P_p}{P_p'} = \frac{123}{290} = 0.42.$$

Esercizio 5.4.2

Una pompa aspira acqua da un serbatoio mediante un tubo di diametro $D_1 = 150 \text{ mm}$ e la manda in una tubazione di diametro $D_2 = 75 \text{ mm}$. Il tubo di aspirazione pesca ad una profondità $z_1 = -2 \text{ m}$ sotto il pelo libero del serbatoio. L'aumento di pressione nel tubo di mandata, ad un'altezza $z_2 = 4 \text{ m}$ sopra il pelo libero del serbatoio è $\Delta p = 170 \text{ kPa}$. La velocità media nel tubo di mandata è $u_2 = 3 \text{ m/s}$. Se la pompa ha un rendimento $\eta_p = 0.75$, determinare la potenza P_p' richiesta dalla pompa al motore ad essa collegato nel caso in cui si trascurino le perdite nei tubi.



La relazione (5.11), trascurando le perdite dei tubi ($h = 0$) e conglobando quelle della macchina nella prevalenza manometrica della pompa, in base ai dati forniti e alla (5.2), diventa

$$\begin{aligned} P_p &= \rho g H_M G_v = \left[\left(\frac{\rho u_2^2}{2} - \frac{\rho u_1^2}{2} \right) + (p_2 - p_1) + \rho g (z_2 - z_1) \right] G_v = \\ &= \left[\left(\frac{1000 \times 3^2}{2} - \frac{1000 \times 0.753^2}{2} \right) + (170000) + 1000 \times 9.80665 \times (4 + 2) \right] \times 0.01325 = \\ &= (4216 + 170000 + 58840) \times 0.01325 = 3088 \text{ W} \end{aligned}$$

dove la portata volumetrica e la velocità nel tubo di aspirazione sono stati calcolati dalle relazioni

$$\begin{aligned} G_v &= u_2 S_2 = u_2 \frac{\pi D_2^2}{4} = 3 \times \frac{\pi \times 0.075^2}{4} = 0.01325 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \\ u_1 &= \frac{G_v}{S_1} = \frac{4 G_v}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 0.01325}{\pi \times 0.15^2} = 0.7498 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

La potenza P_p' , richiesta al motore collegato alla pompa mediante un giunto, è data quindi da

$$P_p = \eta_p P_p' \quad \rightarrow \quad P_p' = \frac{P_p}{\eta_p} = \frac{3088}{0.7498} = 4120 \text{ W}.$$