

CAPITOLO 5

DINAMICA DEI FLUIDI VISCOSI

5.1. GENERALITÀ

I fluidi ideali e i fluidi non viscosi, di cui fin qui ci si è occupati, costituiscono una comoda astrazione per definire le leggi fondamentali del moto su basi scientificamente corrette, ma con presupposti semplificativi sul loro effettivo comportamento. E' sufficiente per tutte l'osservazione seguente.

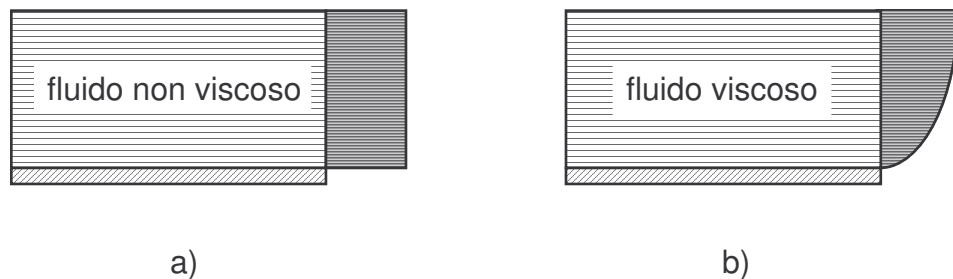


Fig. 5.1.- Distribuzione delle velocità nella sezione di un canale percorso da un fluido: a) non viscoso; b) viscoso.-

Nel caso di un fluido non viscoso o di un fluido ideale che scorre all'interno di un canale, come riportato in fig. 5.1.a, si verifica che la velocità del fluido passa **istantaneamente** dal valore zero nella zona di contatto con la parete al valore u che gli compete, per esempio dal teorema di Bernoulli, in condizioni di regime permanente. Questo, si è visto, perché le molecole del fluido non viscoso scorrono senza attrito scambiandosi solo tensioni normali con assoluta mancanza di tensioni tangenziali; pertanto il carico totale disponibile inizialmente, come già mostrato nella fig. 4.4, viene ritrovato in qualunque sezione del canale come somma delle tre altezze: geometrica, cinetica e piezometrica.

Per contro, nel caso di un fluido viscoso caratterizzato dall'attrito interno, si manifesta un'azione frenante fra le varie particelle del fluido e fra le particelle e le pareti del canale con le quali vengono a contatto. Come riportato in fig. 5.1.b, si verifica che la velocità del fluido passa **gradualmente** dal valore zero nella zona di contatto con la parete al valore u che gli compete in condizioni di regime permanente.

Il passaggio graduale della velocità avviene in uno strato prossimo alla parete tanto più sottile quanto minore è la viscosità del fluido: esso viene chiamato **strato limite viscoso** e verrà discusso nel § 8.6.

5.2. TENSIONI NEI SOLIDI

La teoria classica dell'elasticità limita le proprie indagini ad un caso, però assai importante per le molte applicazioni di risultati teorici a problemi pratici, individuato dalle seguenti ipotesi restrittive:

- a) il corpo è in equilibrio sotto l'azione delle forze;
- b) gli spostamenti dei punti del corpo, connessi con la deformazione e avvenuti durante la fase di applicazione delle forze, sono, insieme con le derivate rispetto alle coordinate spaziali, infinitesime e funzioni regolari del posto;
- c) il legame tensioni - deformazioni è lineare, con le deformazioni proporzionali alle tensioni che le provocano.

Nel § 1.5.2 si è poi detto che:

- a) la risultante delle forze di mutuo contatto attraverso una superficie può essere identificata da una tensione σ comunque orientata nello spazio;
- b) se il corpo è riferito a un sistema cartesiano ortogonale caratterizzato da una terna di assi x, y, z , assumono particolare importanza le tensioni relative agli elementi superficiali $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$, che hanno come normale i versori degli assi;
- c) scomponendo queste tre tensioni lungo le coordinate x, y, z si ottengono nove quantità scalari con doppio pedice: tre normali con i pedici uguali $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ e sei tangenziali con i pedici differenti $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$.

Le tensioni tangenziali godono della proprietà di essere simmetriche e quindi ammettono la relazione $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$; questa proprietà consente di costruire un **tensore delle tensioni** simmetrico, simile a quello già visto nel § 3.7 per le velocità di deformazione

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Nella teoria classica dell'elasticità dei corpi solidi viene generalizzata la legge di Hooke assumendo le tensioni come funzioni lineari delle deformazioni. Ad esempio per la σ_{xx} si può scrivere

$$\sigma_{xx} = A_{xxxx} \varepsilon_{xx} + A_{xxxy} \varepsilon_{xy} + A_{xxxz} \varepsilon_{xz} + A_{xxyy} \varepsilon_{yy} + A_{xxyz} \varepsilon_{yz} + A_{xxzz} \varepsilon_{zz}$$

e analoghe espressioni per le altre sei tensioni indipendenti che compongono il tensore. Con notazione di tipo tensoriale le sei equazioni possono essere così riassunte

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl} ; \quad (5.2.1)$$

i coefficienti A_{ijkl} sono le trentasei (sei volte sei) componenti del cosiddetto **tensore elastico** (tensore quadruplo) e sono nel caso generale funzioni del posto, nel senso che variano da punto a punto nell'interno del corpo elastico.

Se il corpo è **omogeneo** , invece, il tensore elastico è formato da coefficienti costanti in quanto le proprietà elastiche del materiale rimangono costanti e se, per di più, il corpo è **isotropo** , le proprietà elastiche rimangono costanti in ogni punto anche rispetto a tutte le direzioni. In quest'ultima situazione si può dimostrare (questa dimostrazione non viene effettuata perché esce dagli scopi di questo corso) che i coefficienti dipendono da due soli parametri indipendenti; nel caso dei corpi solidi elastici questi parametri sono le costanti elastiche costituite dal modulo di Young E (modulo di elasticità normale) e dal coefficiente di Poisson ν (rapporto di contrazione trasversale).

5.3. TENSIONI NEI FLUIDI

Si è più volte detto che in un fluido viscoso gli strati contigui presentano una sorta

di aderenza in modo che, in condizioni dinamiche, insorgono nel suo interno anche tensioni tangenziali tendenti ad impedire il libero scorrere di uno strato sull'altro. Un fluido è detto **perfettamente viscoso** (o "newtoniano" secondo quanto visto nel § 1.15) quando la tensione di taglio che si esercita tra due strati contigui è semplicemente proporzionale alla variazione della velocità in direzione normale agli strati, come indicato nella relazione (1.15.2).

Se si assume che il fluido, oltre ad essere viscoso, sia **elastico** (vedi § 1.12), si possono applicare le conoscenze derivanti dalle analisi sperimentali effettuate sui corpi solidi elastici; basta sostituire al posto delle deformazioni, le velocità di deformazione viste nel § 3.7. Un corpo solido si dice elastico quando il materiale che lo costituisce presenta un legame biunivoco fra tensioni e deformazioni: da ciò consegue, in particolare, che un corpo elastico, al quale sia stata impressa una deformazione da un qualunque sistema di forze, riprende la forma iniziale indeformata non appena le forze vengono rimosse.

Nella trasformazione da una configurazione C_0 di partenza ad un'altra generica configurazione C il vettore infinitesimo $\overrightarrow{P_0 P_0'}$ di un fluido, sottoposto ad un campo di velocità $\bar{u}$, si è portato in una posizione generica $\overrightarrow{PP'}$. In base a quanto finora si è visto nel capitolo 3, la trasformazione può essere divisa in quattro parti:

- a) una pura traslazione descritta dalle componenti u, v, w del vettore velocità $\bar{u}$;
- b) una rotazione di corpo rigido dovuta alle componenti $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ del vettore vorticità $\bar{\omega}$;
- c) una velocità di variazione del volume $\dot{\epsilon} = \text{div}(\bar{u})$;
- d) tre velocità di deformazioni lineari $\dot{\epsilon}_{xx}, \dot{\epsilon}_{yy}, \dot{\epsilon}_{zz}$ e tre velocità di deformazioni angolari $\dot{\epsilon}_{xy}, \dot{\epsilon}_{yz}, \dot{\epsilon}_{zx}$.

Le prime due trasformazioni provocano solo un movimento di corpo rigido, mentre le due ultime producono una deformazione intrinseca dell'elemento fluido nelle vicinanze del punto P_0 ; di conseguenza, le trasformazioni c) e d) possono essere prese come riferimento per i due parametri indipendenti del tensore elastico di un fluido omogeneo e isotropo.

Quando un fluido **senza attrito** è "in quiete", le tensioni normali sono fra loro uguali e il loro valore, cambiato di segno, corrisponde alla pressione che il fluido assume nel punto; le tensioni tangenziali invece si annullano. Si può allora scrivere

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0\end{aligned}$$

relazione che, con l'aiuto del delta di Kronecker e con la notazione di tipo tensoriale, diventa

$$\sigma'_{ij} = -p \delta_{ij} ; \quad (5.3.1)$$

la ragione del cambio di segno è dovuta al fatto che le forze relative alle tensioni e alla pressione sono, per convenzione, di segno opposto. Il tensore σ'_{ij} è detto **idrostatico**.

Il delta di Kronecker è un operatore tale che, se $i = j$, esso vale $\delta = 1$, mentre se $i \neq j$, esso vale $\delta = 0$.

Dalle relazioni precedenti si può anche trovare che la media aritmetica delle tensioni normali è uguale alla pressione cambiata di segno

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = -p ; \quad (5.3.2)$$

è conveniente introdurre la media aritmetica delle tensioni come usuale quantità numerica anche nel caso dei fluidi **con attrito** o **viscosi**, perché ha la proprietà di essere invariante nelle trasformazioni dei sistemi di coordinate e nel tensore delle tensioni.

Quando invece il fluido è "in moto", oltre alle tensioni normali idrostatiche σ'_{ij} dovute alla pressione, insorgono anche le tensioni normali e tangenziali σ^*_{ij} dovute alla velocità di variazione del volume $\dot{\epsilon}$ e alle velocità di deformazione $\dot{\epsilon}_{ij}$; di conseguenza lo stato di tensione complessivo è dato da

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \sigma^*_{ij} , \quad (5.3.3)$$

dove il tensore σ^*_{ij} è detto **deviatorico**. In definitiva uno stato di tensione generico all'interno di un fluido è dato dalla somma di un tensore idrostatico e di uno deviatorico.

In analogia alla relazione (5.2.1) valida per i corpi solidi in cui la variazione di volume è quasi nulla ($\dot{\epsilon} \approx 0$), anche per i corpi fluidi è possibile scrivere una legge costitutiva fra le tensioni deviatoriche e le velocità di deformazione

$$\sigma^*_{ij} = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} , \quad (5.3.4)$$

dove i coefficienti D_{ijkl} costituiscono il **tensore viscoso** (tensore quadruplo); la determinazione di quei coefficienti D_{ijkl} che in un fluido omogeneo, isotropo, elastico e newtoniano legano le tensioni deviatoriche tangenziali alle velocità di deformazione angolari viene effettuata ricorrendo al moto a falde parallele della legge di Newton vista nel § 1.15.

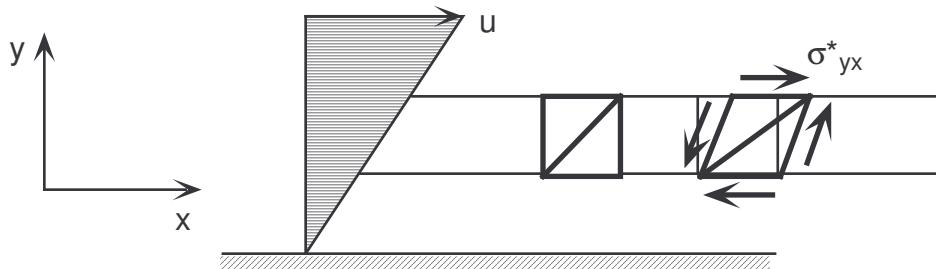


Fig. 5.2.- Moto a falde parallele.-

Dalla fig. 5.2 si può notare come l'elemento di volume, che in partenza presenta sul piano (x,y) una proiezione quadrata, si deformi in modo tale da trasformare tale proiezione in un rombo; l'elemento di volume è rimasto in uno stato fluido compreso fra altri due strati fra loro paralleli, ma la bisettrice ha subito una rotazione rigida dovuta alla tensione tangenziale σ^*_{yx} . Ricordando che la rotazione è una deformazione angolare limite (vedi § 3.7), dalla (5.3.4) e dalla (3.7.1) si può allora scrivere

$$\sigma^*_{yx} = D_{yxyx} \dot{\epsilon}_{yx} = D_{yxyx} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) ;$$

ma nell'esperienza di Newton la velocità lungo y è nulla ($v = 0$) e quindi, utilizzando la (1.15.2), si ha

$$\sigma^*_{yx} = D_{yxyx} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad \rightarrow \quad D_{yxyx} = 2\mu .$$

Alla fine dalla (5.3.4) si ottiene

$$\sigma^*_{ij} = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \quad i \neq j . \quad (5.3.5)$$

5.4. IPOTESI DI STOKES

L'ipotesi di Stokes si basa sul fatto, detto prima, che i due parametri indipendenti del tensore viscoso sono la velocità di variazione del volume $\dot{\epsilon}$ e le velocità di deformazione $\dot{\epsilon}_{ij}$; si ha allora

$$\sigma^*_{ij} = \alpha \dot{\epsilon} \delta_{ij} + \beta \dot{\epsilon}_{ij} \quad (5.4.1)$$

dove i fattori di proporzionalità α e β , due in tutto come già detto, devono essere gli stessi in tutte le equazioni per assicurare l'isotropia. Confrontando fra loro le due relazioni (5.3.5) e (5.4.1) in cui $i \neq j$, si ottiene il valore del primo coefficiente di proporzionalità

$$\beta = 2\mu . \quad (5.4.2)$$

Per la determinazione del secondo coefficiente α , si consideri il valore che assume in questo caso la media aritmetica delle tensioni normali (5.3.2); dalle (5.3.6), (5.4.1), (5.4.2) e (3.7.3) si ha

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3} (\sigma^*_{xx} - p + \sigma^*_{yy} - p + \sigma^*_{zz} - p) = \\ &= \frac{1}{3} (\alpha \dot{\epsilon} + \beta \dot{\epsilon}_{xx} + \alpha \dot{\epsilon} + \beta \dot{\epsilon}_{yy} + \alpha \dot{\epsilon} + \beta \dot{\epsilon}_{zz}) - p = \frac{1}{3} [3\alpha \dot{\epsilon} + \beta (\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz})] - p = \\ &= \alpha \dot{\epsilon} + \frac{1}{3} \beta \dot{\epsilon} - p = \alpha \dot{\epsilon} + \frac{2}{3} \mu \dot{\epsilon} - p = \left(\alpha + \frac{2}{3} \mu \right) \dot{\epsilon} - p = \mu' \dot{\epsilon} - p . \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

La relazione precedente consente di esaminare i casi seguenti per un fluido in quiete e in moto:

- a) il fluido è in quiete ($\bar{u} = 0 \rightarrow \dot{\epsilon} = 0$); per definizione si trova di nuovo la (5.3.2);
- b) il fluido è in moto ($\bar{u} \neq 0$) ed è incompressibile ($\dot{\epsilon} = 0$); si trova nuovamente la (5.3.2);
- c) il fluido è in moto ($\bar{u} \neq 0$) ed è compressibile ($\dot{\epsilon} \neq 0$); affinché si verifichi la (5.3.2), deve essere

$$\mu' = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = -\frac{2}{3} \mu ; \quad (5.4.4)$$

questa è l'**ipotesi di Stokes** presentata nel 1845 durante i suoi studi sui moti dei fluidi viscosi.

Il termine μ' della (5.4.3) viene anche chiamato **viscosità globale** (o anche viscosità di massa) del fluido e rappresenta la proprietà che è responsabile della dissipazione di energia a temperatura costante durante una variazione di volume nel tempo. La viscosità globale può costituire una seconda caratteristica (la prima è la viscosità dinamica) di un fluido compressibile, omogeneo, isotropo, newtoniano, necessaria

per determinare le sue equazioni costitutive.

L'accettazione dell'ipotesi di Stokes è equivalente non solo all'assunzione che, come indicato dalla (5.4.3), la pressione termodinamica p sia uguale in valore assoluto alla media aritmetica delle tensioni normali ($\bar{\sigma} = -p$) nonostante una variazione di volume raggiunga un valore finito ($\dot{\epsilon} \neq 0$), ma anche all'assunzione che le espansioni e compressioni, cui un sistema è sottoposto, siano trasformazioni **reversibili** in condizioni isoterme.

Una trasformazione è detta **reversibile** se può avvenire indifferente nei due sensi. Questo si verifica quando la trasformazione è una successione continua di stati istantanei di equilibrio fra pressione e temperatura interne e pressione e temperatura esterne e quando nell'interno del fluido e sul suo contorno non sono presenti attriti. Infatti, poiché le trasformazioni avvengono nel senso di portare il sistema ad uno stato di equilibrio in cui ogni variazione spontanea cessa, si ha che: una differenza di pressione fra interno e esterno farebbe evolvere il sistema solo nel senso che annulla tale differenza; una differenza di temperatura fra interno e esterno creerebbe uno scambio termico solo nel senso che va dalla temperatura maggiore verso quella minore; eventuali forze di attrito potrebbero essere annullate solo nel senso che le trasforma in altre forme energetiche, per esempio in calore. La trasformazione reversibile è un evento quindi che nella realtà non si verifica, ma è una astrazione concettuale che facilita la soluzione di parecchi problemi.

Allo scopo di determinare sotto quali condizioni la viscosità globale si annulli, è necessario far ricorso a metodi sperimentali o termodinamici statistici che permettano di calcolare i coefficienti di trasporto mediante il primo principio della termodinamica; le misure però non sono riuscite a dare risultati definitivi. Si può solo dire che in un gas ad elevata massa volumica la viscosità globale è molto piccola e che in un gas a bassa massa volumica tende ad annullarsi.

Sostituendo dapprima i valori dei coefficienti β (5.4.2) e α (5.4.4) nelle (5.4.1), con l'aiuto della (3.7.2) e della (3.7.3), si ottiene

$$\sigma^*_{ij} = \alpha \dot{\epsilon}_{ij} + \beta \dot{\epsilon}_{ij} = -\frac{2}{3} \mu \dot{\epsilon}_{ij} + 2 \mu \dot{\epsilon}_{ij} = -\frac{2}{3} \mu \operatorname{div}(\bar{u}) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

e sostituendo successivamente le (5.4.1) così elaborate nelle (5.3.6), si ottiene

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p \delta_{ij} + \sigma^*_{ij} = -\left[p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div}(\bar{u}) \right] \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \\ &= -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right). \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

In forma estesa la (5.4.5) diventa

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + \sigma^*_{xx} = -p + \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div}(\bar{u}) \right] & \sigma_{xy} &= \sigma^*_{xy} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\ \sigma_{yy} &= -p + \sigma^*_{yy} = -p + \mu \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div}(\bar{u}) \right] & \sigma_{yz} &= \sigma^*_{yz} = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\ \sigma_{zz} &= -p + \sigma^*_{zz} = -p + \mu \left[2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div}(\bar{u}) \right] & \sigma_{zx} &= \sigma^*_{zx} = \mu \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

In coordinate cilindriche le (5.4.6) diventano

$$\sigma_{rr} = -p + \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3} \operatorname{div}(\bar{u}) \right] \quad \sigma_{r\vartheta} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right] = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\vartheta\vartheta} &= -p + \mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u}{r} \right) - \frac{2}{3} \operatorname{div}(\bar{u}) \right] & \sigma_{\vartheta z} &= \mu \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right] \\
\sigma_{zz} &= -p + \mu \left[2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div}(\bar{u}) \right] & \sigma_{zr} &= \mu \left[\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right]
\end{aligned} \tag{5.4.7}$$

Le (5.4.5) assumono l'aspetto matriciale seguente molto suggestivo

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \mu \begin{bmatrix} \operatorname{div}(\bar{u}) & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{div}(\bar{u}) & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{div}(\bar{u}) \end{bmatrix}$$

o, in termini riassuntivi utilizzando la (3.7.1),

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p \bar{\bar{I}} + 2\mu \bar{\bar{\epsilon}} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div}(\bar{u}) \bar{\bar{I}} \tag{5.4.8}$$

dove $\bar{\bar{I}}$ rappresenta il tensore unitario

$$\bar{\bar{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.5. EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES

In analogia a quanto visto nel § 4.2 in un fluido non viscoso, la seconda equazione del moto di un fluido viscoso è l'**equazione di bilancio della quantità di moto**; in un approccio di tipo euleriano essa enuncia il fatto che: "la differenza fra la quantità di moto del fluido che, in un tempo infinitesimo, entra in un volume infinitesimo e la quantità di moto che ne esce più le forze agenti sul volume infinitesimo e sulla sua superficie esterna è rappresentata dalla quantità di moto che, nello stesso tempo, si accumula nel volume infinitesimo". Poiché il bilancio è assicurato se sono in equilibrio le componenti secondo i tre assi coordinati, l'equazione è vettoriale e risulta essere composta da tre equazioni scalari.

Facendo riferimento al cubetto infinitesimo rappresentato in fig. 4.1 del § 4.2, la differenza fra le portate di quantità di moto totali entranti e uscenti in direzione x è data dalla (4.2.1) che, per comodità, viene riportata qui di seguito

$$- \left[\frac{\partial}{\partial x} (u \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (v \rho u) + \frac{\partial}{\partial z} (w \rho u) \right] dV = - [\operatorname{div}(\bar{u} \rho u)] dV.$$

Trattandosi di fluido viscoso, le forze esterne agenti sul volume infinitesimo sono dovute a quelle dissipative di superficie relative alle tensioni (5.4.6) e alle eventuali forze di massa. Facendo riferimento al cubetto infinitesimo rappresentato in fig. 5.3, dove i versi positivi delle tensioni corrispondono alla trazione del cubetto, le forze relative alle tensioni in direzione x sono date da

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy \right) dz dx + \left(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy +$$

$$- \sigma_{xx} dy dz - \sigma_{yx} dz dx - \sigma_{zx} dx dy = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) dV .$$

La quantità di moto accumulatasi nel tempo infinitesimo nel volume infinitesimo nella direzione x è data da (vedi § 4.2)

$$\frac{\partial}{\partial t} (u \rho) dV$$

mentre l'eventuale forza unitaria di massa applicata dall'esterno nella direzione x è indicata con F_{mx} (vedi § 4.2).

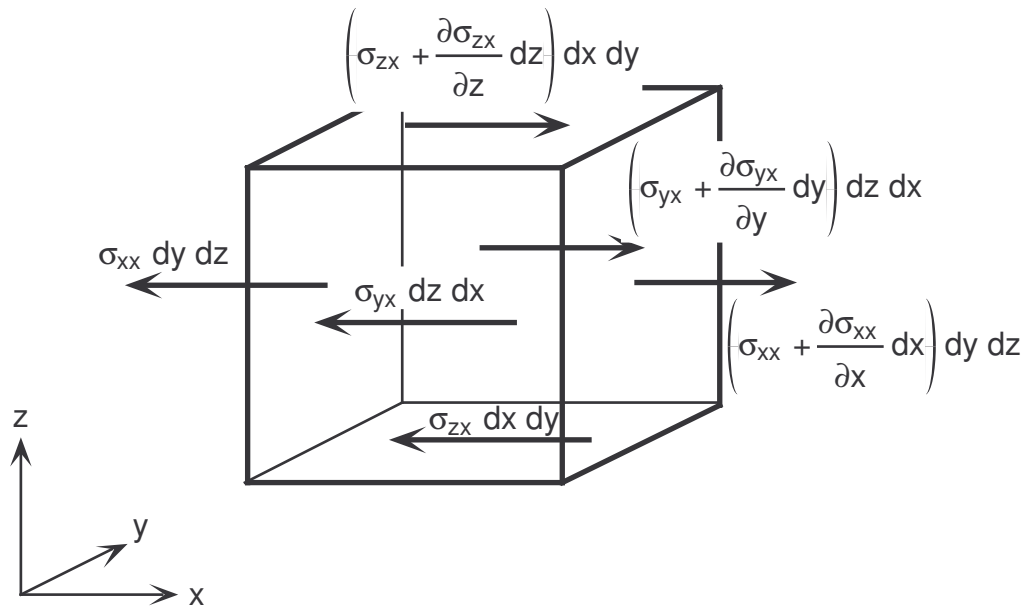


Fig. 5.3.- Forze dovute allo stato di tensione lungo l'asse x.-

In definitiva, riunendo le varie quantità calcolate e dopo la semplificazione del volume infinitesimo dV , si ottiene la relazione seguente nella direzione x

$$\frac{\partial}{\partial t} (u \rho) = - \text{div}(\bar{u} \rho u) + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) + \rho F_{mx} ; \quad (5.5.1.a)$$

equazioni simili possono essere scritte nelle altre due direzioni y e z

$$\frac{\partial}{\partial t} (v \rho) = - \text{div}(\bar{v} \rho v) + \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right) + \rho F_{my} \quad (5.5.1.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (w \rho) = - \text{div}(\bar{w} \rho w) + \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \rho F_{mz} . \quad (5.5.1.c)$$

In forma vettoriale le tre equazioni (5.5.1), in base a quanto già visto nel § 4.2 a proposito dell'equazione di Eulero, diventano

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u} \rho) + \nabla \bullet (\bar{u} \rho \bar{u}) = \nabla \bullet \bar{\bar{\sigma}} + \rho \bar{F}_m \quad (5.5.2)$$

dove $\bar{R} = \nabla \bullet \bar{\bar{\sigma}}$ è il vettore delle forze per unità di volume dovuto alla divergenza del tensore delle tensioni $\bar{\bar{\sigma}}$ e, per definizione, vale

$$\bar{R} = \nabla \bullet \bar{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = [\bar{\bar{\sigma}}]^T \{\partial\} = (\{\partial\}^T [\bar{\bar{\sigma}}])^T \quad (5.5.3)$$

dove $\{\partial\}$ è il vettore dell'operatore divergenza.

Con ragionamenti analoghi a quelli che portano la (4.2.2.a) a diventare uguale alla (4.2.5.a) e la (4.2.3) uguale alla (4.2.4), la (5.5.1.a) diviene

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) + \rho F_{mx} , \quad (5.5.4.a)$$

le (5.5.1.b) e (5.5.1.c) divengono

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right) + \rho F_{my} \quad (5.5.4.b)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \rho F_{mz} \quad (5.5.4.c)$$

e la (5.5.2) diviene

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \nabla \bullet \bar{\bar{\sigma}} + \rho \bar{F}_m = \bar{R} + \rho \bar{F}_m . \quad (5.5.5)$$

In quest'ultima forma l'equazione del moto descrive la variazione nel tempo della quantità di moto per unità di volume, come sarebbe vista da un osservatore che si muove assieme al fluido, in conseguenza delle forze esterne applicate. Poiché questa legge si può anche interpretare come l'accelerazione subita da un elemento fluido, in moto con il fluido stesso, in conseguenza delle forze applicate su di esso, si trova la seconda legge della dinamica dei corpi solidi; in altre parole il bilancio della quantità di moto è perfettamente equivalente alla seconda legge della dinamica

$$\rho \bar{a} = \bar{R} + \rho \bar{F}_m . \quad (5.5.6)$$

Le tensioni che si creano sono di origine dissipativa e quindi i loro incrementi lungo gli assi coordinati danno origine a forze che si oppongono a quelle d'inerzia.

Sostituendo i valori delle tensioni ricavate nelle (5.4.6), dalle (5.5.4) infine si ottengono le **equazioni di Navier-Stokes**

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \text{div}(\bar{u}) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right\} + \rho F_{mx}$$

$$\begin{aligned}\rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \text{div}(\bar{u}) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \right\} + \rho F_{my} \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \text{div}(\bar{u}) \right) \right] \right\} + \rho F_{mz}\end{aligned}\quad (5.5.7)$$

Da esse si nota che la parte delle tensioni normali comprendente la pressione determina, con il segno negativo, un gradiente positivo lungo gli assi coordinati e si comporta nello stesso modo descritto nella determinazione della equazione di Eulero (vedi § 4.2).

Le (5.5.7) costituiscono le equazioni base di tutta la fluidodinamica e vengono utilizzate nei metodi numerici per la determinazione del moto dei fluidi; ad esse si devono associare l'equazione di continuità scritta nella forma (3.4.3) e l'equazione di stato dei gas per tenere in considerazione gli effetti della variazione della massa volumica con la pressione in caso di processo isoterma. Se invece il processo non è isoterma si deve far ricorso ad un'ulteriore equazione che tenga conto delle trasformazioni fra l'energia termica e l'energia meccanica e che offra un'equazione per la determinazione della distribuzione della temperatura. Infine si deve dare una legge empirica che preveda la dipendenza della viscosità con la temperatura, mentre di solito viene trascurata la sua dipendenza dalla pressione; in tutto si viene quindi a creare un sistema di sette equazioni nelle sette variabili termofluidodinamiche u, v, w, p, T, ρ, μ .

Il sistema di equazioni si semplifica quando il fluido è incompressibile: le equazioni di Navier-Stokes perdono il termine con la divergenza della velocità, l'equazione di continuità assume l'aspetto della relazione (3.4.4) e l'equazione di stato diventa superflua. In tutto si ha quindi un sistema di sei equazioni nelle sei variabili u, v, w, p, T, μ e le equazioni di Navier-Stokes assumono l'aspetto semplificato seguente

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right\} + \rho F_{mx} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \right\} + \rho F_{my} \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} + \rho F_{mz} .\end{aligned}\quad (5.5.8)$$

Se il processo è isoterma il sistema si riduce ulteriormente a quattro equazioni nelle quattro variabili u, v, w, p ; vengono a mancare l'equazione energetica e quella che lega la viscosità con la temperatura, mentre le equazioni di Navier-Stokes (5.5.8), con μ costante, dato che in x è

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u\end{aligned}$$

e che in y e in z valgono relazioni simili, diventano

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho F_{mx} \quad (5.5.9.a)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \rho F_{my} \quad (5.5.9.b)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + \rho F_{mz} \quad (5.5.9.c)$$

in cui:

-- il primo termine della derivata sostanziale è detto **instazionario** o **non stazionario**;

-- il secondo termine della derivata sostanziale è detto **convettivo**;

-- il primo e il terzo termine a destra dell'uguale sono detti **forzanti**, dovuti alle forze rispettivamente di superficie e di volume;

-- il secondo termine a destra dell'uguale è detto **viscoso**.

In notazione vettoriale la (5.5.9) diventa

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = - \text{grad}(p) + \mu \nabla^2 \bar{u} + \rho \bar{F}_m \quad (5.5.10)$$

e rispetto all'equazione di Eulero (4.2.4) differisce solo per la presenza del termine viscoso.

In coordinate cilindriche le (5.5.9) diventano

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \rho F_{mr} \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + \rho F_{m\theta} \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \rho F_{mz} \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

dove u, v, w sono le componenti della velocità rispettivamente lungo r, θ, z.

5.6. TEOREMA DI BERNOULLI MODIFICATO

Per la presenza dell'attrito interno l'equazione (4.3.1.1), che esprime il teorema di Bernoulli per un fluido ideale, cioè incompressibile e non viscoso, deve essere modificato con l'introduzione di un termine h che rappresenti le perdite di carico, o energetiche in generale, che si verificano fra le sezioni (1) a monte e (2) a valle; se si introduce anche il termine H che rappresenta l'energia per unità di peso scambiata dal fluido con l'ambiente esterno sempre fra le sezioni (1) e (2), si ha

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 + H = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h \quad (5.6.1)$$

dove nel bilancio il termine H viene messo alla sinistra dell'uguale perché è positivo quando entra nel sistema, mentre il termine h viene messo alla destra perché diventa positivo quando esce dal sistema; dalla (5.6.1) si può anche notare che il carico totale disponibile (somma delle tre energie), in assenza della quantità H, decresce nella

direzione del moto.

In questa equazione, scritta per essere applicabile ai fluidi incompressibili, i valori di h sono ottenuti caso per caso da espressioni empiriche basate su dati sperimentali (vedi § 10.2). Per i fluidi compressibili si deve introdurre un termine aggiuntivo che tiene conto dei fenomeni termici che hanno un'importanza rilevante date le strette relazioni fra pressione, massa volumica e temperatura; questo termine è legato al concetto di entropia.

Il fatto che il teorema di Bernoulli modificato abbia per oggetto un fluido reale ne allarga il valore pratico a tutti quei problemi in cui le resistenze dovute alla viscosità intervengono in misura non trascurabile. Esso viene impiegato quindi in molte applicazioni pratiche che riguardano gli impianti idraulici con macchine motrici o con macchine operatrici.

5.6.1. PREVALENZA DI UN IMPIANTO

Per **prevalenza** si intende il dislivello che un fluido, spinto da una macchina operatrice idraulica (pompa), supera per portarsi da una posizione più bassa di un impianto ad una posizione più alta.

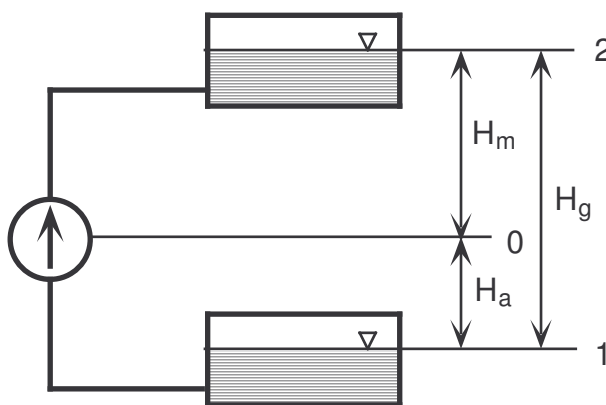


Fig. 5.4.- Schema di un impianto idraulico di sollevamento.-

Si possono distinguere le prevalenze seguenti (vedi fig. 5.4).

A) **Prevalenza geometrica o geodetica**: si definisce come prevalenza geodetica H_g il dislivello $z_2 - z_1$ fra le superfici libere del serbatoio di mandata (2) e del serbatoio di aspirazione (1).

B) **Prevalenza totale**: la prevalenza totale H_t dell'impianto rappresenta la prevalenza minima che deve essere ceduta dalla macchina al fluido affinché esso possa raggiungere il serbatoio di mandata. Applicando il teorema di Bernoulli alle superfici libere (1) e (2), rispettivamente del serbatoio di aspirazione e del serbatoio di mandata, si ottiene

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 + H_t = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_a + h_m$$

dove H_t rappresenta l'energia che deve essere fornita dall'esterno e h_a e h_m rappresentano rispettivamente le perdite nella tubazione di aspirazione e di mandata. Poiché la differenza $z_2 - z_1$ costituisce la prevalenza geodetica H_g e poiché le velocità del fluido sono nulle in corrispondenza dei peli liberi ($u_1 = u_2 = 0$), la precedente relazione diventa

$$H_t = H_g + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + h_a + h_m . \quad (5.6.1.1)$$

La prevalenza totale, quindi, è la somma di tre quantità: la prevalenza geometrica H_g , la prevalenza corrispondente all'eventuale differenza di pressione fra i due serbatoi $(p_2 - p_1)/(\rho g)$ e le perdite nelle tubazioni h_a e h_m ; si può anche notare che se i serbatoi sono aperti all'atmosfera il secondo termine è nullo e che nella prevalenza totale non intervengono le perdite della macchina operatrice.

C) **Prevalenza di mandata**: si definisce come prevalenza di mandata H_m il dislivello $z_2 - z_0$ fra la superficie libera del serbatoio di mandata (2) e la posizione della pompa (0). Applicando il teorema di Bernoulli all'interno della tubazione di mandata rispettivamente all'uscita dalla pompa (0) e all'altezza della posizione (2), si ha

$$\frac{u_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} + z_0 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + h_m .$$

Se il diametro della tubazione è costante e quindi se le due velocità u_0 e u_2 sono uguali, la prevalenza di mandata è

$$H_m = z_2 - z_0 = \frac{p_0 - p_2}{\rho g} - h_m .$$

La prevalenza di mandata, quindi, non presenta un limite superiore; basta infatti che la macchina operatrice riesca ad esercitare sul fluido alla mandata, rispetto alla pressione p_2 ed alle perdite di carico h_m , una pressione p_0 sufficiente.

D) **Prevalenza di aspirazione**: si definisce come prevalenza di aspirazione il dislivello $z_0 - z_1$ fra la posizione della pompa (0) e la superficie libera del serbatoio di aspirazione (1). Applicando il teorema di Bernoulli all'interno della tubazione di aspirazione rispettivamente all'altezza della posizione (1) e all'entrata nella pompa (0), si ottiene con ragionamenti analoghi a quelli effettuati per la prevalenza di mandata

$$H_a = z_0 - z_1 = \frac{p_1 - p_0}{\rho g} - h_a .$$

La prevalenza di aspirazione, quindi, presenta un limite superiore; la massima depressione p_0 infatti che una pompa può esercitare sul fluido all'aspirazione è il vuoto assoluto. Però, a parte il fatto che una pompa non riesce a produrre una depressione simile, non è conveniente scendere a pressioni troppo basse, perché in qualche parte della pompa il liquido potrebbe, rispetto alla temperatura esistente, iniziare la fase di evaporazione.

Questo fenomeno, chiamato **cavitazione**, può provocare, oltre a notevoli sollecitazioni meccaniche a causa del deflusso non continuo del liquido, anche la corrosione degli organi della macchina a causa degli acidi formati dai sali già disciolti nel liquido e liberatisi durante l'evaporazione. Se la temperatura del liquido è molto alta, la pressione p_0 deve essere così aumentata da far divenire negativa la prevalenza di aspirazione; in questo caso si dice che la pompa funziona **sotto battente**.

5.6.2. PREVALENZA DI UNA POMPA

Per **prevalenza manometrica** H_M di una pompa s'intende la prevalenza che gli organi della macchina cedono effettivamente al liquido. Per lo sviluppo futuro si fa riferimento alla fig. 5.5. Applicando il teorema di Bernoulli all'interno delle tubazioni in

corrispondenza dell'entrata (a) e dell'uscita (m) della pompa, si ottiene

$$\frac{u_a^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho g} + z_a + H_M = \frac{u_m^2}{2g} + \frac{p_m}{\rho g} + h_m .$$

La prevalenza manometrica può essere scritta nel seguente modo

$$H_M = \frac{p_m - p_a}{\rho g} + (z_m - z_a) \quad (5.6.2.1)$$

se i diametri delle tubazioni di aspirazione e di mandata sono uguali e quindi se le due velocità u_a e u_m sono uguali ($u_a = u_m$).

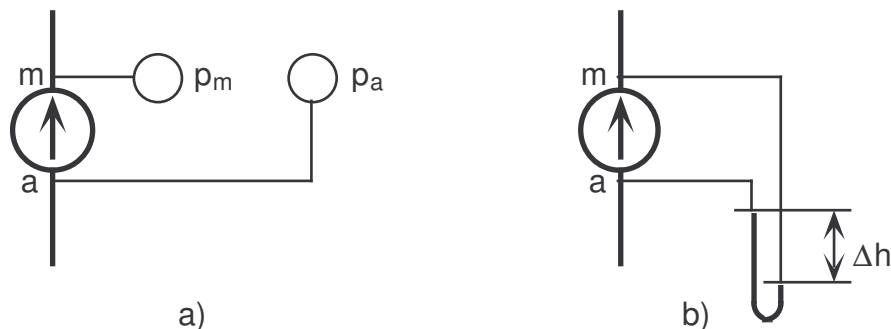


Fig. 5.5.- Misura della prevalenza manometrica: a) con due manometri; b) con un manometro differenziale.-

La prevalenza manometrica, quindi, è la somma di due quantità: la prevalenza corrispondente alla differenza di pressione fra valle e monte della pompa e la differenza di livello fra le posizioni in cui sono rispettivamente misurate le pressioni p_a e p_m . Per annullare il secondo termine e quindi per determinare la prevalenza manometrica direttamente dalla lettura di manometri (da cui la dicitura della prevalenza), si devono sistemare i due manometri alla stessa altezza (fig. 5.5.a) oppure si deve ricorrere ad un manometro differenziale (fig. 5.5.b).

Si può notare che nella prevalenza manometrica sono comprese anche le perdite della macchina operatrice, in quanto non appaiono esplicitamente come termine a sé stante.

5.6.3. SALTO DI UN IMPIANTO

Per **salto** s'intende il dislivello che un fluido, spinto dal suo peso, supera per portarsi, attraverso una macchina motrice idraulica (turbina), da una posizione più alta di un impianto ad una posizione più bassa. Si possono distinguere i salti seguenti (vedi fig. 5.6).

A) **Salto geometrico o geodetico**: si definisce come salto geodetico H_g il dislivello $z_2 - z_1$ fra le superfici libere del serbatoio di alimentazione (2) e del serbatoio di scarico (1).

B) **Salto utile**: il salto utile dell'impianto rappresenta il salto massimo che il fluido mette a disposizione della macchina nel suo percorso dall'alimentazione allo scarico. Applicando il teorema di Bernoulli alle superfici libere (2) e (1), rispettivamente del serbatoio di alimentazione e del serbatoio di scarico, si ottiene

$$\frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 - H_u = \frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 + h_a + h_s$$

dove H_u rappresenta l'energia che è fornita all'esterno e h_a e h_s rappresentano rispettivamente le perdite nella tubazione di alimentazione e di scarico. Poiché la differenza $z_2 - z_1$ costituisce il salto geodetico e poiché le velocità del fluido sono nulle in corrispondenza dei peli liberi ($u_1 = u_2 = 0$), la precedente relazione diventa

$$H_u = H_g + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} - h_a - h_s . \quad (5.6.3.1)$$

Il salto disponibile, quindi, è la somma di tre quantità: il salto geometrico H_g , più il salto corrispondente all'eventuale differenza di pressione fra i due serbatoi $(p_2 - p_1) / (\rho \cdot g)$ meno le perdite nelle tubazioni h_a e h_s ; si può anche notare che se i serbatoi sono aperti all'atmosfera, situazione che si verifica quasi sempre, il secondo termine è nullo.

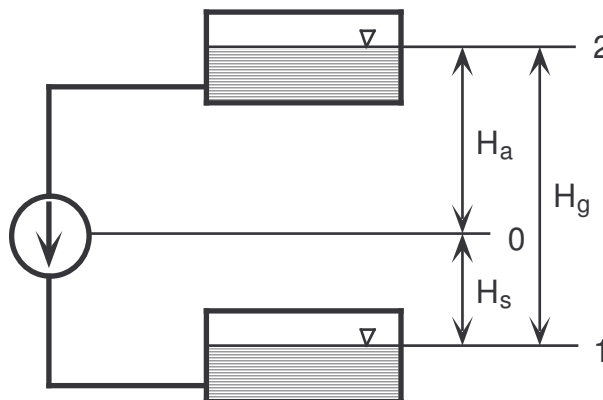


Fig. 5.6.- Schema di un impianto idraulico di caduta.-

C) **Salto di alimentazione:** si definisce come salto di alimentazione H_a il dislivello $z_2 - z_0$ fra la superficie libera del serbatoio di alimentazione (2) e la posizione della turbina (0). Applicando il teorema di Bernoulli all'interno della tubazione di alimentazione rispettivamente all'altezza della posizione (2) e all'entrata nella turbina (0), si ha

$$\frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = \frac{u_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} + z_0 + h_a .$$

Se il diametro della tubazione è costante e quindi se le due velocità u_2 e u_0 sono uguali, il salto di alimentazione è

$$H_a = z_2 - z_0 = \frac{p_0 - p_2}{\rho g} + h_a .$$

Il salto di alimentazione, quindi, non presenta un limite superiore; basta infatti che la situazione orografica e idraulica del terreno consenta l'installazione dell'impianto.

D) **Salto di scarico:** si definisce come salto di scarico il dislivello $z_0 - z_1$ fra la posizione della turbina (0) e la superficie libera del serbatoio di scarico (1). Applicando il teorema di Bernoulli all'interno della tubazione di scarico rispettivamente all'uscita dalla turbina (0) e all'altezza della posizione (1), si ottiene con ragionamenti analoghi a quelli effettuati per il salto di alimentazione

$$H_s = z_0 - z_1 = \frac{p_1 - p_0}{\rho g} + h_s .$$

Il salto di scarico, quindi, presenta un limite superiore; la massima depressione p_0 infatti che un fluido può presentare allo scarico della turbina è il vuoto assoluto. Però, a parte il fatto che una turbina non riesce a realizzare una depressione simile, non è conveniente scendere a pressioni troppo basse, perché si corre il pericolo di raggiungere un valore tale che, rispetto alla temperatura, il liquido comincerebbe ad evaporare e a creare il fenomeno della cavitazione già visto nelle pompe.

Può anche accadere che, se la temperatura del liquido supera certi valori, la pressione p_0 debba essere così elevata da far divenire negativa il salto di scarico; in questo caso si dice che la turbina funziona **sotto battente**.

5.6.4. SALTO DI UNA TURBINA

Il salto utile H_u di una turbina già visto in precedenza corrisponde al salto che gli organi della macchina ricevono effettivamente dal fluido. Per lo sviluppo futuro si fa riferimento alla fig. 5.7. Applicando il teorema di Bernoulli all'interno delle tubazioni in corrispondenza dell'entrata (a) e dell'uscita (s) della turbina, si ottiene

$$\frac{u_a^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho g} + z_a - H_u = \frac{u_s^2}{2g} + \frac{p_s}{\rho g} + z_s .$$

Il salto utile può essere scritto nel seguente modo

$$H_u = \frac{p_a - p_s}{\rho g} + (z_a - z_s) \quad (5.6.4.1)$$

se i diametri delle tubazioni di alimentazione e di scarico sono uguali e quindi se le due velocità u_a e u_s sono uguali ($u_a = u_s$).

Il salto utile, quindi, è la somma di due quantità: il salto corrispondente alla differenza di pressione fra valle e monte della turbina e la differenza di livello fra le posizioni in cui sono rispettivamente misurate le pressioni p_a e p_s . Per annullare il secondo termine e quindi per determinare il salto utile direttamente dalla lettura di manometri, si devono sistemare i due manometri alla stessa altezza (fig. 5.7.a) oppure si deve ricorrere ad un manometro differenziale (fig. 5.7.b).

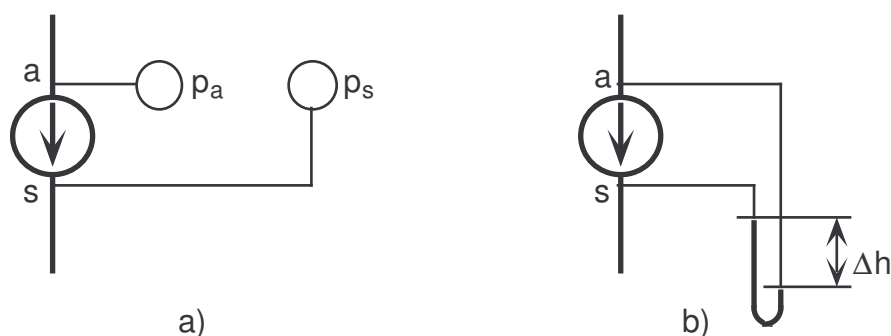


Fig. 5.7.- Misura del salto utile: a) con due manometri; b) con un manometro differenziale.-

Si può anche notare che nel salto utile sono comprese anche le perdite della macchina motrice, in quanto non appaiono esplicitamente come termine a sé stante.

5.6.5. POTENZA DI UNA MACCHINA

Se l'equazione del teorema di Bernoulli modificato (5.6.1) viene espresso in termini di pressione e se viene moltiplicata per la portata volumetrica G_v circolante nell'impianto, si ottiene la relazione

$$\left(\frac{u_1^2}{2\rho} + p_1 + \rho g z_1 + \rho g H \right) G_v = \left(\frac{u_2^2}{2\rho} + p_2 + \rho g z_2 + \rho g h \right) G_v \quad (5.6.5.1)$$

in cui le unità di misura sono quelle di una potenza; infatti si ha

$$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = \text{W} \right] .$$

Se nella (5.6.5.1) al posto della quantità generica H , che rappresenta l'energia per unità di peso scambiata dal fluido con l'ambiente esterno, viene introdotto il valore della prevalenza manometrica H_M di una pompa o il salto utili H_u di una turbina, i due termini

$$P_p = \rho g H_M G_v = g H_M G_m \quad (5.6.5.2)$$

$$P_t = \rho g H_u G_v = g H_u G_m . \quad (5.6.5.3)$$

rappresentano rispettivamente la potenza assorbita da una pompa e la potenza erogata da una turbina.

5.7. PERDITE DI CARICO IN UNA CONDOTTA FORZATA

Nelle tubazioni idrauliche il moto dell'acqua avviene prevalentemente sotto pressione (condotta forzata); in questa situazione si verificano i tipi di perdite seguenti:

- a) per attrito interno del fluido, cioè per viscosità, a causa della non uniforme distribuzione della velocità nella sezione trasversale della condotta;
- b) per attrito fra fluido e pareti della condotta;
- c) per bruschi cambiamenti di sezione e di direzione.

I primi due tipi di perdite sono dette **continue**, mentre l'ultima viene detta **accidentale**.

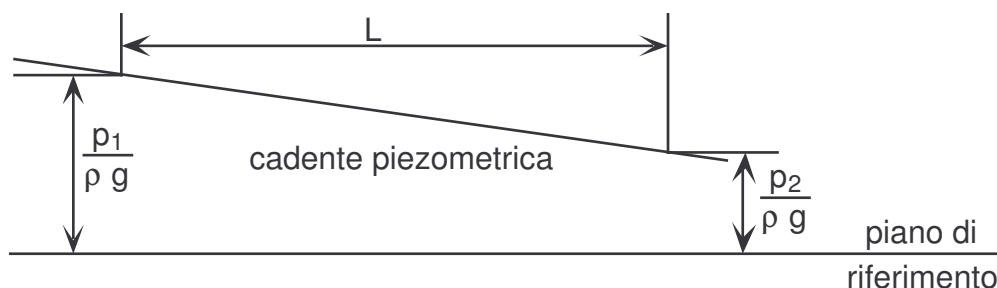


Fig. 5.8.- Cadente piezometrica.-

Nel caso di una condotta orizzontale a sezione costante si può constatare che le perdite continue per attrito lungo la condotta provocano un'inclinazione rispetto all'orizzontale dell'energia piezometrica; infatti, indicando con Ξ la perdita per unità di lunghezza della condotta

$$\Xi = \frac{h}{L},$$

dalla (5.6.1) con $u_1 = u_2$, $z_1 = z_2$ e $H = 0$ si ha che

$$\Xi = \frac{h}{L} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g L}$$

rappresenta la tangente dell'angolo di inclinazione dell'altezza piezometrica e perciò viene anche chiamata **cadente piezometrica** (vedi fig. 5.8).

Per quanto riguarda la quantificazione delle perdite continue di carico bisogna distinguere fra moto laminare e moto turbolento; anche se nel moto laminare il gradiente di pressione è direttamente proporzionale alla velocità media nella condotta ed inversamente proporzionale al quadrato del raggio o del diametro, come indicato nella (8.5.1), nelle applicazioni di tipo ingegneristico si preferisce utilizzare una relazione direttamente proporzionale all'energia cinetica e alla lunghezza e inversamente proporzionale al diametro

$$h_c = \frac{p_1 - p_2}{\rho} = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2}$$

dove f è detto **coefficiente di resistenza** e u_m è la velocità media del fluido nella tubazione. Da notare che ora le perdite non sono più espresse in altezze [m], ma in energia per unità di massa [m^2/s^2]. Per la quantificazione del coefficiente f sia per moti laminari che per moti turbolenti si rimanda al § 11.5.

Anche le perdite accidentali, in genere localizzate su lunghezze molto limitate della tubazione, possono essere espresse in termini di energia cinetica

$$h_a = K \frac{u_m^2}{2} = f \frac{L_e}{D} \frac{u_m^2}{2}$$

dove in questo caso K è detto coefficiente di perdita e L_e è la lunghezza equivalente di tubo diritto che provoca le stesse perdite.

Le perdite di carico accidentali possono brevemente essere distinte nei tre tipi principali seguenti:

- a) per bruschi allargamenti di sezione, in cui la diminuzione di energia cinetica fra le sezioni 1 e 2 sarebbe compensata completamente dall'aumento della pressione statica se non ci fossero i moti vorticosi che si creano nelle zone morte a valle dell'allargamento (vedi fig. 5.9.a);
- b) per bruschi restringimenti di sezione, in cui la diminuzione della pressione statica fra le sezioni 1 e 2 sarebbe compensata completamente dall'aumento della energia cinetica se non ci fossero i moti vorticosi che si creano nelle zone a monte del restringimento e se non ci fosse un ulteriore restringimento della vena fluida subito a valle della sezione ridotta (vedi fig. 5.9.b);
- c) per bruschi cambiamenti di direzione, in cui nelle zone in prossimità del gomito si formano i moti vorticosi rappresentati in fig. 5.10.

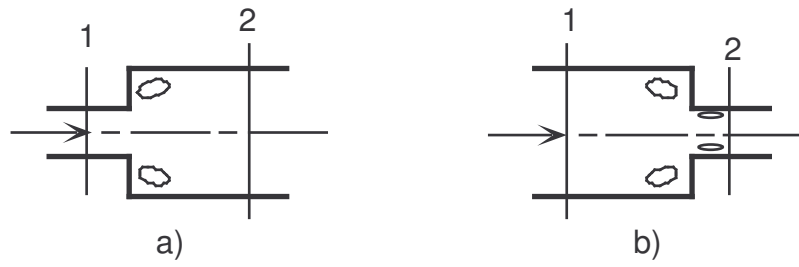


Fig. 5.9. Perdite accidentali: a) per allargamento; b) per restringimento.-

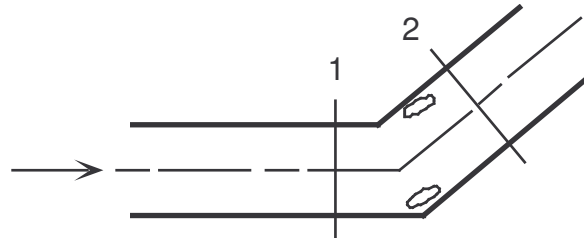


Fig. 5.10.- Perdite accidentali per cambiamenti di direzione.-