

CAPITOLO 6

EQUAZIONI IN FORMA INTEGRALE

6.0.- RICHIAMI TEORICI

6.1.- BILANCIO DELLA MASSA

6.2.- BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

6.0.- RICHIAMI TEORICI

Bilancio della massa

In caso di fluido compressibile ($\rho \neq \text{cost}$), se la massa volumica viene considerata uniforme in ogni istante dentro volume di controllo V , la relazione del bilancio della massa è data da

$$V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V}{\partial t} = - \int_S \bar{u} \rho d\bar{S} ; \quad (6.1)$$

se il moto è stazionario, cioè se la massa volumica ρ non varia nel tempo ($\partial \rho / \partial t = 0$) e se il volume di controllo V non varia nel tempo ($\partial V / \partial t = 0$), la (6.1) diventa

$$\int_S \bar{u} \rho d\bar{S} = 0 . \quad (6.2)$$

In caso di fluido incompressibile ($\rho = \text{cost}$), la (6.1) diventa

$$\frac{\partial V}{\partial t} = - \int_S \bar{u} d\bar{S} ; \quad (6.3)$$

se il moto è stazionario, cioè se il volume di controllo V non varia nel tempo ($\partial V / \partial t = 0$), la (6.3) diventa

$$\int_S \bar{u} d\bar{S} = 0 . \quad (6.4)$$

Bilancio della quantità di moto (seconda legge della dinamica)

La relazione del bilancio della quantità di moto è data da

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{u} \rho dV + \int_S \bar{u} \rho \bar{u} d\bar{S} = - \int_S p d\bar{S} + \int_S \bar{\sigma}^* d\bar{S} + m \bar{g} - m \bar{a} - \bar{F} + \bar{R} \quad (6.5)$$

$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{u} \rho dV$ = variazione nel tempo della quantità di moto nel volume di controllo V

$\int_S \bar{u} \rho \bar{u} d\bar{S}$ = flusso della quantità di moto attraverso la superficie esterna S del volume V

$\int_S p d\bar{S}$ = forza di pressione sulla superficie esterna S

$\int_S \bar{\sigma}^* d\bar{S} = \int_S 2\mu \bar{\epsilon} d\bar{S}$ = forza viscosa sulla superficie esterna S

$\bar{G} = m \bar{g}$ = forza di gravità sul volume V (peso)

$m \bar{a} = \int_V \rho \bar{a} dV$ = forza d'inerzia sul volume V

$\bar{F}$ = forza di azione del volume V

$\bar{R}$ = forza di reazione sul volume V

dove $\bar{u}$ rappresenta la velocità del sistema collegato al volume di controllo V , che può essere un sistema non - inerziale che si muove rispetto ad un sistema inerziale, dove $\bar{a}$ rappresenta l'accelerazione del sistema non - inerziale rispetto al sistema inerziale e dove $\bar{\sigma}^*$ rappresenta il tensore delle tensioni deviatoriche.

In caso di fluido non viscoso si ha

$$\int_S \bar{\sigma}^* d\bar{S} = \int_S 2\mu \bar{\epsilon} d\bar{S} = 0$$

e la (6.5) diventa

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{u} \rho dV + \int_S \bar{u} \rho \bar{u} d\bar{S} = - \int_S p d\bar{S} + \bar{G} - m \bar{a} - \bar{F} + \bar{R} ; \quad (6.6)$$

se il moto è stazionario e se il sistema è fermo, si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{u} \rho dV = 0 , \quad m \bar{a} = 0$$

e la (6.6) diventa

$$\int_S \bar{u} \rho \bar{u} d\bar{S} = - \int_S p d\bar{S} + \bar{G} - \bar{F} + \bar{R} . \quad (6.7)$$

Infine, se il sistema è immerso in un ambiente a pressione costante, si ha

$$\int_S p d\bar{S} = 0$$

e la (6.7) diventa

$$\int_S \bar{u} \rho \bar{u} d\bar{S} = \bar{G} - \bar{F} + \bar{R} \quad (6.8)$$

Bilancio del momento della quantità di moto

Moltiplicando vettorialmente l'equazione di conservazione della quantità di moto per la distanza $\bar{r}$ da un asse di rotazione, si ottiene l'equazione di bilancio del momento della quantità di moto. Nel caso in cui il fluido sia non viscoso, il moto sia stazionario, il sistema sia fermo e la forza peso venga trascurata, dalla (6.7) si ottiene

$$\int_S \bar{r} \times \bar{u} \rho \bar{u} d\bar{S} = - \int_S \bar{r} \times p d\bar{S} - \bar{M}_a + \bar{M}_r \quad (6.9)$$

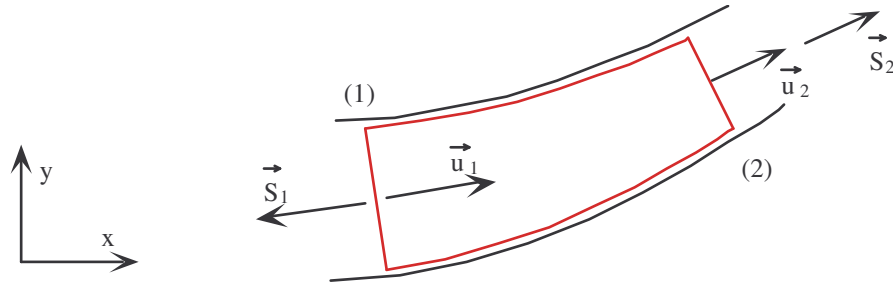
dove $\bar{M}_a$ e $\bar{M}_r$ rappresentano rispettivamente i momenti di azione e di reazione. Se il sistema è immerso in un ambiente a pressione costante, la (6.8) diventa

$$\int_S \bar{r} \times \bar{u} \rho \bar{u} d\bar{S} = - \bar{M}_a + \bar{M}_r . \quad (6.10)$$

6.1.- BILANCIO DELLA MASSA

Esercizio 6.1.1

Determinare le condizioni in cui un fluido scorre all'interno di una tubazione generica fra le sezioni (1) e (2) in caso di moto stazionario.



Per prima cosa è indispensabile scegliere un volume di controllo che consenta di effettuare i calcoli nel modo più semplice e nel tempo più veloce; per questa ragione esso viene preso con alcune superfici esterne corrispondenti alle pareti solide del sistema contenente il fluido e con altre perpendicolari alle linee di corrente.

Dopo aver scelto un volume di controllo (nella figura è riportata con linee di colore rosso la possibilità più semplice e istintiva che presenta le superfici parte lungo le pareti della tubazione e parte normali alle linee di corrente che entrano ed escono dal tratto di tubazione preso in considerazione), dal bilancio della massa (6.2) in caso di moto stazionario per un fluido compressibile si ha

$$\int_S \vec{u} \rho d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{u} \rho d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{u} \rho d\vec{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso le sezioni (1) e (2).

Se la massa volumica e la velocità vengono considerate costanti nelle singole sezioni, per la sezione (1) si ha

$$\int_{S_1} \vec{u} \rho d\vec{S} = - \int_{S_1} u \rho dS = - u_1 \rho_1 S_1 ,$$

perché il prodotto scalare è negativo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso discorde)

$$\vec{u} d\vec{S} = u dS \cos\beta_1 = u dS \cos(180^\circ) = - u dS ,$$

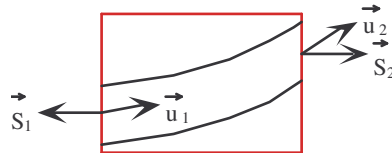
e per la sezione (2) si ha

$$\int_{S_2} \vec{u} \rho d\vec{S} = + \int_{S_2} u \rho dS = + u_2 \rho_2 S_2 ,$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso discorde)

$$\vec{u} d\vec{S} = u dS \cos\beta_2 = u dS \cos(0^\circ) = + u dS .$$

[Nota.- Se il volume di controllo fosse stato scelto in modo tale da non avere le superfici perpendicolari alle velocità, si sarebbero dovuti conoscere anche gli angoli compresi fra i due vettori S_1 e u_1 e fra i due vettori S_2 e u_2 .



La scelta effettuata semplifica invece la procedura di calcolo.]

Sostituendo si ha

$$- u_1 \rho_1 S_1 + u_2 \rho_2 S_2 = 0$$

e quindi

$$u_1 \rho_1 S_1 = u_2 \rho_2 S_2 \quad \rightarrow \quad G_{m1} = G_{m2} \quad \rightarrow \quad G_m = \text{cost} \quad (\text{A})$$

che assicura la costanza della portata massica all'interno di un tubo di flusso. Nel caso in cui il fluido sia considerato incompressibile ($\rho_1 = \rho_2$), dal bilancio della massa (6.4) facendo gli stessi ragionamenti si ha

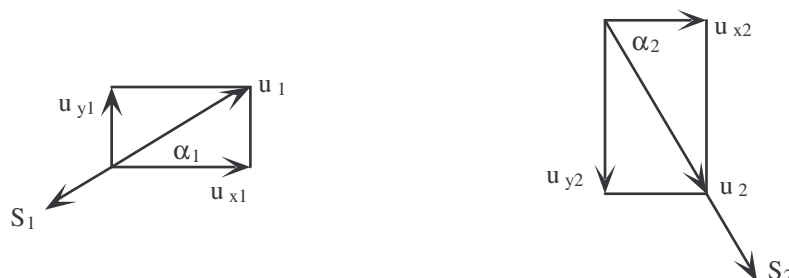
$$u_1 S_1 = u_2 S_2 \quad \rightarrow \quad G_{v1} = G_{v2} \quad \rightarrow \quad G_v = \text{cost} \quad (\text{B})$$

che assicura la costanza della portata volumetrica all'interno di un tubo di flusso. In quest'ultimo caso il rapporto fra le velocità

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{G_v}{S_2}}{\frac{G_v}{S_1}} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{\pi D_1^2}{4}}{\frac{\pi D_2^2}{4}} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \quad (C)$$

è inversamente proporzionale al rapporto fra le sezioni dei tubi e quindi fra i relativi quadrati dei diametri.

Se si verificano le condizioni rappresentate nella figura successiva, con $u_1 = 10 \text{ m/s}$, $S_1 = 0.1 \text{ m}^2$, $\alpha_1 = 30^\circ$, $S_2 = 0.08 \text{ m}^2$ e $\alpha_2 = -60^\circ$, trovare la velocità u_2 e le componenti delle velocità u_{x1} , u_{y1} , u_{x2} , u_{y2} relative a un fluido incompressibile.



Dalla relazione (B) si ottiene

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{S_1}{S_2} \quad \rightarrow \quad u_2 = u_1 \frac{S_1}{S_2} = 10 \times \frac{0.1}{0.08} = 12.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e quindi per le componenti (da notare che α rappresenta l'angolo fra il vettore $\vec{u}$ e l'ascissa x) si ha

$$\begin{aligned} u_{x1} &= u_1 \cos \alpha_1 = 10 \times \cos(30^\circ) = 8.66 \frac{\text{m}}{\text{s}} & , & & u_{y1} &= u_1 \sin \alpha_1 = 10 \times \sin(30^\circ) = 5.00 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ u_{x2} &= u_2 \cos \alpha_2 = 12.5 \times \cos(-60^\circ) = 6.25 \frac{\text{m}}{\text{s}} & , & & u_{y2} &= u_2 \sin \alpha_2 = 12.5 \times \sin(-60^\circ) = -10.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Esercizio 6.1.2

In una tubazione, costituita da un tratta di diametro $D_1 = 20 \text{ cm}$ e da una tratta di diametro $D_2 = 10 \text{ cm}$, scorre una portata volumetrica d'acqua pari a $G_v = 90 \text{ litri/min}$; calcolare le velocità medie nelle due tratte.

Premesso che la portata volumetrica in dimensioni fondamentali vale

$$G = 90 \frac{\text{litri}}{\text{min}} = 0.00150 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \quad ,$$

dalla relazione (B) dell'esercizio 6.1.1 rispettivamente si ha

$$u_1 = \frac{G_v}{S_1} = \frac{4 G_v}{\pi D_1^2} = \frac{4 \times 0.00150}{\pi \times 0.02^2} = 4.775 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad u_2 = \frac{G_v}{S_2} = \frac{4 G_v}{\pi D_2^2} = \frac{4 \times 0.00150}{\pi \times 0.01^2} = 19.1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad .$$

Dopo aver determinato la velocità u_1 , dalla relazione (C) dell'esercizio 6.1.1 si sarebbe potuto ottenere per la velocità u_2 lo stesso risultato

$$u_2 = u_1 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 = 4.775 \times \left(\frac{20}{10}\right)^2 = 4.775 \times 4 = 19.1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad .$$

Esercizio 6.1.3

Nella sezione a monte (1) di una tubazione di diametro $D = 5 \text{ cm}$, in cui vige la pressione $p_1 = 2 \text{ bar}$ e la temperatura $T_1 = 20^\circ \text{C}$, passa azoto alla velocità $u_1 = 6 \text{ m/s}$, mentre nella sezione a valle (2) della stessa tubazione vige la pressione $p_2 = 1.5 \text{ bar}$ e la temperatura $T_2 = 40^\circ \text{C}$. Calcolare: a) la velocità nella sezione (2); b) le portate volumetriche e massiche nelle sezioni (1) e (2).

Dalla tab. T.3 per la costante caratteristica dell'azoto si ha $R = 297 \text{ J/(kg.K)}$ e dalla legge di stato dei gas (1.10) per la massa volumica nelle due sezioni (1) e (2) si ha

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R T_1} = \frac{2 \times 10^5}{297 \times (273.15 + 20)} = 2.298 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \rho_2 = \frac{p_2}{R T_2} = \frac{1.5 \times 10^5}{297 \times (273.15 + 40)} = 1.612 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} .$$

a) Poiché la sezione del tubo rimane costante

$$S_1 = S_2 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \times 0.05^2}{4} = 0.001963 \text{ m}^2 ,$$

dalla relazione (A) dell'esercizio 6.1.1 si ha

$$u_1 \rho_1 S_1 = u_2 \rho_2 S_2 \quad \rightarrow \quad u_2 = u_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} = 6 \times \frac{2.298}{1.612} = 8.511 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

b) Per le portate massiche, ovviamente uguali nelle due sezioni (1) e (2), si ha

$$G_{m1} = u_1 \rho_1 S_1 = 6.0 \times 2.298 \times 0.001963 = 0.0271 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$G_{m2} = u_2 \rho_2 S_2 = 8.511 \times 1.612 \times 0.001963 = 0.0271 \frac{\text{kg}}{\text{s}} .$$

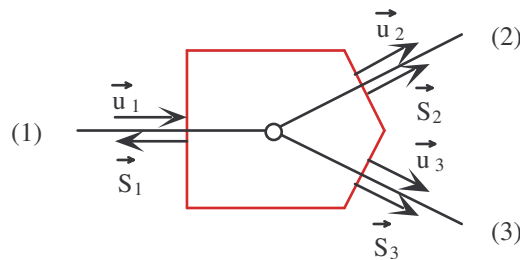
mentre per le portate volumetriche, ovviamente differenti a causa della variazione della massa volumica, si ha

$$G_{v1} = u_1 S_1 = 6.0 \times 0.001963 = 0.0118 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$G_{v2} = u_2 S_2 = 8.511 \times 0.001963 = 0.0167 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} .$$

Esercizio 6.1.4

Nel nodo a tre imbocchi di una rete idrica si sa che dal ramo (1) di sezione $S_1 = 0.2 \text{ m}^2$ entra acqua alla velocità $u_1 = 1 \text{ m/s}$, mentre dal ramo (3) di sezione $S_3 = 0.25 \text{ m}^2$ esce acqua alla velocità $u_3 = 2 \text{ m/s}$. Determinare la situazione del ramo (2) se la sezione è $S_2 = 0.6 \text{ m}^2$.



Dopo aver scelto un volume di controllo (nella figura è riportata con linee di colore rosso una possibilità), dal bilancio della massa (6.4) in caso di moto stazionario per un fluido incompressibile si ha

$$\int_S \vec{u} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{u} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{u} d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{u} d\vec{S} = 0$$

in quanto il fluido passa solo attraverso le sezioni (1), (2) e (3).

Se la velocità viene considerata costante nelle singole sezioni, si ha

$$\int_{S_1} \vec{u} d\vec{S} = - \int_{S_1} u dS = - u_1 S_1$$

perché il prodotto scalare è negativo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso discorde),

$$\int_{S_2} \vec{u} d\vec{S} = + \int_{S_2} u dS = + u_2 S_2$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso concorde) e

$$\int_{S_2} \vec{u} d\vec{S} = + \int_{S_2} u dS = + u_2 S_2$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso concorde).

In base ai dati del problema allora si ha

$$\int_{S_2} \vec{u} d\vec{S} = - \int_{S_1} \vec{u} d\vec{S} - \int_{S_3} \vec{u} d\vec{S} \quad \rightarrow \quad G_{v2} = + u_2 S_2 = + u_1 S_1 - u_3 S_3 = 1 \times 0.2 - 2 \times 0.25 = -0.30 \frac{m^3}{s} ;$$

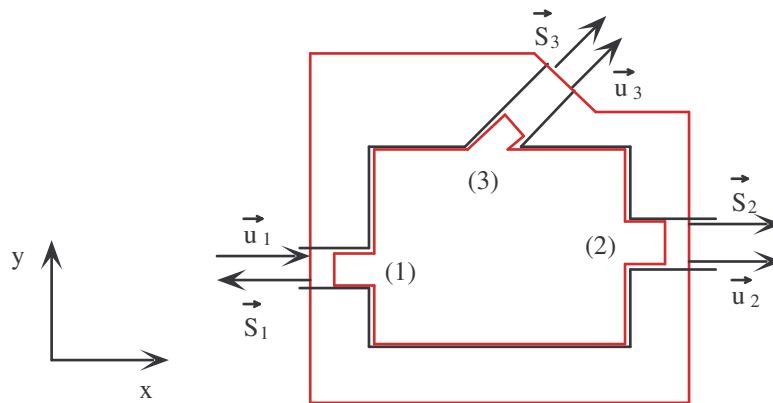
dall'imbocco (2) quindi è necessario che entri una massa fluida pari $0.3 \text{ m}^3/\text{s}$ con una velocità

$$|\vec{u}_2| = \frac{|G_{v2}|}{S_2} = \frac{u_2 S_2}{S_2} = \frac{0.3}{0.6} = 0.5 \frac{m}{s} .$$

Infatti, avendo scelto arbitrariamente il verso della velocità u_2 (uscente e quindi positivo), il segno negativo ottenuto per il prodotto $u_2 \cdot S_2$ indica la necessità di cambiare il segno effettivo del flusso (la procedura è identica a quella usata nelle reazioni vincolari di un problema di meccanica statica: dapprima si sceglie per l'incognita il verso e dopo si controlla che sia effettivamente corretto dai risultati algebrici del calcolo).

Esercizio 6.1.5

Un fluido considerato incompressibile fluisce con moto stazionario attraverso il sistema a tre rami riportato in figura. Se le sezioni conosciute valgono $S_1 = 0.1 \text{ m}^2$ e $S_2 = 0.05 \text{ m}^2$ e se le velocità conosciute valgono $u_1 = 1 \text{ m/s}$ e $u_2 = 3 \text{ m/s}$, calcolare la portata volumetrica G_{v3} che passa attraverso il ramo (3) e determinare se essa entra oppure esce dal sistema.



Dopo aver scelto un volume di controllo (nella figura sono riportate con linee di colore rosso due possibilità), dal bilancio della massa (6.4) in caso di moto stazionario per un fluido incompressibile si ha

$$\int_S \vec{u} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{u} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{u} d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{u} d\vec{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso le sezioni (1), (2) e (3).

Se la velocità viene considerata costante nelle singole sezioni, si ha

$$\int_{S_1} \vec{u} d\vec{S} = - \int_{S_1} u dS = - u_1 S_1$$

perché il prodotto scalare è negativo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso discorde) e

$$\int_{S_2} \vec{u} d\vec{S} = + \int_{S_2} u dS = + u_2 S_2$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso concorde).

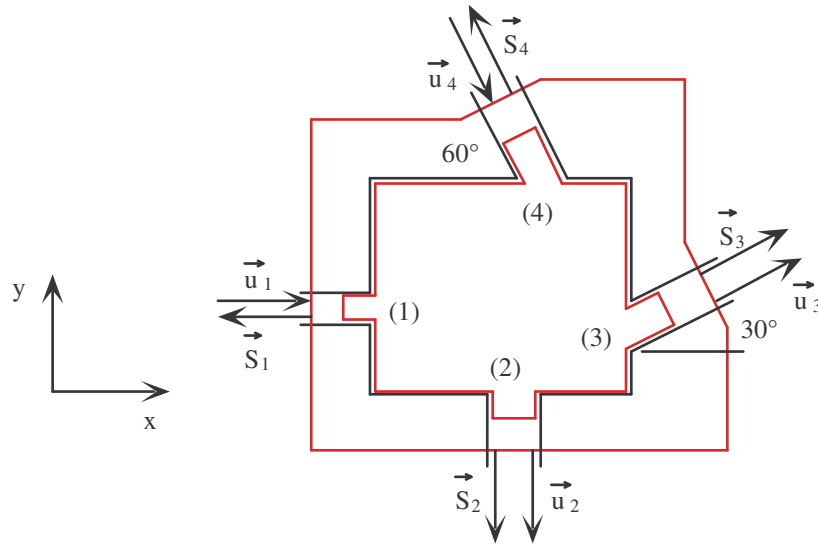
In base ai dati del problema allora si ha

$$\int_{S_3} \vec{u} d\vec{S} = - \int_{S_1} \vec{u} d\vec{S} - \int_{S_2} \vec{u} d\vec{S} \quad \rightarrow \quad G_{v3} = + u_1 S_1 - u_2 S_2 = 1 \times 0.1 - 3 \times 0.05 = -0.05 \frac{m^3}{s} .$$

Poiché nella sezione (3) il prodotto scalare è negativo, il fluido entra nel sistema.

Esercizio 6.1.6

Si consideri il moto stazionario dell'acqua attraverso il sistema riportato in figura. Le aree sono: $S_1 = 0.019 \text{ m}^2$, $S_2 = 0.046 \text{ m}^2$, $S_3 = S_4 = 0.037 \text{ m}^2$; la portata massica in uscita dalla sezione (3) è $G_{m3} = 55 \text{ kg/s}$; la portata volumetrica in entrata dalla sezione (4) è $G_{v4} = 0.028 \text{ m}^3/\text{s}$; la velocità del fluido nella sezione (1) è $u_1 = 3 \text{ m/s}$. Calcolare la velocità attraverso la sezione (2).



Dopo aver scelto un volume di controllo (nella figura sono riportate con linee di colore rosso due possibilità), dal bilancio della massa (6.4) in caso di moto stazionario per un fluido incompressibile si ha

$$\int_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{u} \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{u} \cdot d\vec{S} + \int_{S_4} \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso le sezioni (1), (2), (3) e (4).

Se la velocità viene considerata costante nelle singole sezioni, si ha

$$\int_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_1} u \, dS = -u_1 S_1$$

perché il prodotto scalare è negativo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso discorde),

$$\int_{S_3} \vec{u} \cdot d\vec{S} = \int_{S_3} u \, dS = u_3 S_3 = G_{v3} = \frac{G_{m3}}{\rho}$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso concorde) e

$$\int_{S_4} \vec{u} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_4} u \, dS = -u_4 S_4 = -G_{v4}$$

perché il prodotto scalare è negativo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso discorde).

In base ai dati del problema allora si ha

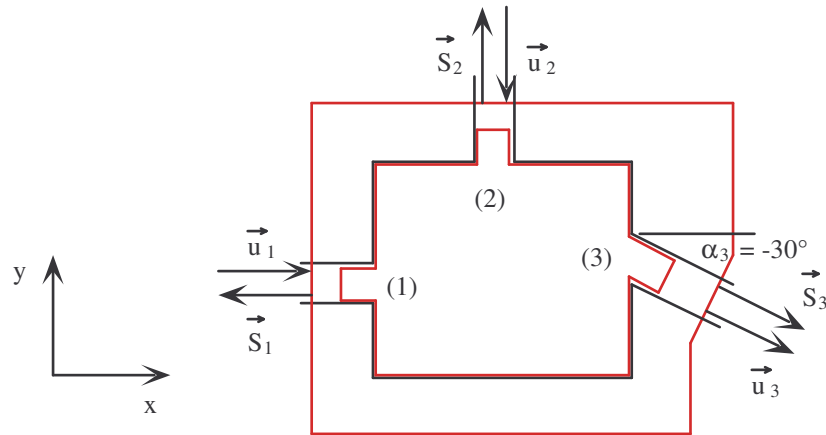
$$G_{v2} = \int_{S_2} \vec{u} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S} - \int_{S_3} \vec{u} \cdot d\vec{S} - \int_{S_4} \vec{u} \cdot d\vec{S} = u_1 S_1 - \frac{G_{m3}}{\rho} + G_{v4} = 3 \times 0.019 - \frac{55}{1000} + 0.028 = 0.030 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Poiché nella sezione (2) il prodotto scalare è positivo, il fluido esce dal sistema e la velocità in valore assoluto è

$$|\vec{u}_2| = \frac{|G_{v2}|}{S_2} = \frac{0.030}{0.046} = 0.650 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Esercizio 6.1.7

Un fluido di massa volumica $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$ defluisce con moto stazionario attraverso il sistema riportato in figura; le sezioni conosciute valgono $S_1 = 0.05 \text{ m}^2$, $S_2 = 0.01 \text{ m}^2$, $S_3 = 0.06 \text{ m}^2$, e le velocità conosciute valgono $u_1 = 4 \text{ m/s}$ e $u_2 = 8 \text{ m/s}$. Calcolare la velocità u_3 e le sue componenti lungo x e lungo y e determinare se il fluido entra o esce dal sistema nel ramo (3).



Dopo aver scelto un volume di controllo (nella figura sono riportate con linee di colore rosso due possibilità), dal bilancio della massa (6.2) in caso di moto stazionario per un fluido compressibile si ha

$$\int_S \vec{u} \rho d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{u} \rho d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{u} \rho d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{u} \rho d\vec{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso le sezioni (1), (2) e (3).

Se la massa volumica e la velocità vengono considerate costanti nelle singole sezioni, si ha

$$\int_{S_1} \vec{u} \rho d\vec{S} = - \int_{S_1} u \rho dS = - |u_1 \rho S_1|$$

perché il prodotto scalare è negativo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso discorde) e

$$\int_{S_2} \vec{u} \rho d\vec{S} = - \int_{S_2} u \rho dS = - u_2 \rho S_2$$

perché il prodotto scalare è negativo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso discorde).

In base ai dati del problema allora si ha

$$G_{m3} = \int_{S_3} \vec{u} \rho d\vec{S} = - \int_{S_1} \vec{u} \rho d\vec{S} - \int_{S_2} \vec{u} \rho d\vec{S} = u_1 \rho S_1 + u_2 \rho S_2 = 4 \times 1050 \times 0.05 + 8 \times 1050 \times 0.01 = 294.0 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Poiché nella sezione (3) il prodotto scalare è positivo, il fluido esce dal sistema e la velocità in valore assoluto è

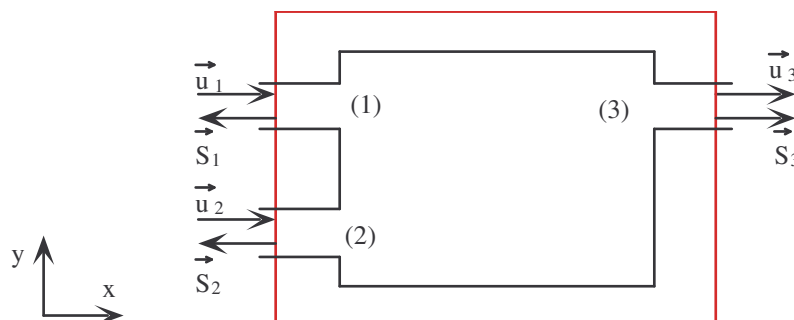
$$|\vec{u}_3| = \frac{G_{m3}}{\rho S_3} = \frac{294.0}{1050 \times 0.06} = 4.667 \frac{\text{m}}{\text{s}} ;$$

le componenti sono

$$u_3 = |\vec{u}_3| \cos \alpha_3 = 4.667 \times \cos(-30^\circ) = 4.04 \frac{\text{m}}{\text{s}} , \quad v_3 = |\vec{u}_3| \sin \alpha_3 = 4.667 \times \sin(-30^\circ) = -2.33 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Esercizio 6.1.8

Il recipiente riportato in figura ha le entrate (1) e (2) e l'uscita (3), tutte di sezione circolare. Il flusso è stazionario e la massa volumica rimane costante. Le velocità nelle sezioni (1) e (3) sono assunte costanti, mentre la velocità nella sezione (2) presenta una distribuzione parabolica. I diametri delle sezioni sono: $D_1 = 80 \text{ mm}$, $D_2 = 40 \text{ mm}$ e $D_3 = 100 \text{ mm}$; le velocità invece sono: $u_1 = 2 \text{ m/s}$ e $u_2 = U_{2\text{max}} [1 - (r/R_2)^2]$ con $U_{2\text{max}} = 4 \text{ m/s}$. Trovare la velocità della sezione (3).



Dopo aver scelto un volume di controllo (nella figura è riportata con linee colorate in rosso una possibilità), dal bilancio della massa (6.4) in caso di moto stazionario per un fluido incompressibile si ha

$$\int_S \vec{u} \, d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{u} \, d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{u} \, d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{u} \, d\vec{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso le sezioni (1), (2) e (3).

Nelle sezioni, in cui la velocità viene considerata costante, si ha

$$\int_{S_1} \vec{u} \, d\vec{S} = - \int_{S_1} u \, dS = -u_1 S_1 = -u_1 \frac{\pi D_1^2}{4}$$

perché il prodotto scalare è negativo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso discorde) e

$$\int_{S_3} \vec{u} \, d\vec{S} = \int_{S_3} u \, dS = u_3 S_3 = u_3 \frac{\pi D_3^2}{4}$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso concorde); nella sezione, in cui la velocità varia in modo parabolico, invece si ha

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \vec{u} \, d\vec{S} &= - \int_{S_2} u \, dS = - \int_0^{2\pi} \int_0^{R_2} U_{2\max} \left[1 - \left(\frac{r}{R_2} \right)^2 \right] r \, dr \, d\varphi = -2\pi U_{2\max} \left[\int_0^{R_2} r \, dr - \frac{1}{R_2^2} \int_0^{R_2} r^3 \, dr \right] = \\ &= -2\pi U_{2\max} \left[\frac{1}{2} R_2^2 - \frac{1}{R_2^2} \frac{R_2^4}{4} \right] = -\frac{U_{2\max}}{2} \pi R_2^2 = -\frac{U_{2\max}}{2} \frac{\pi D_2^2}{4} \end{aligned}$$

perché il prodotto scalare è negativo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso discorde).

In definitiva si ha

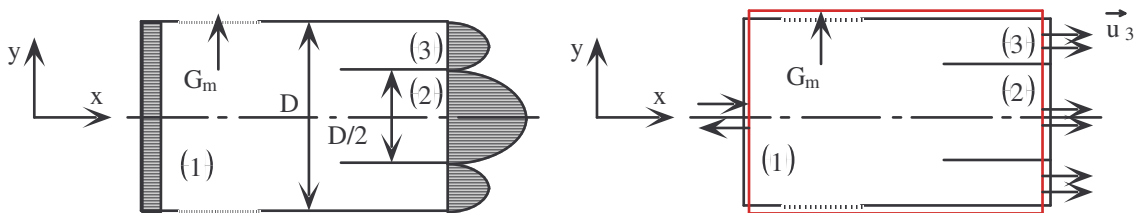
$$\begin{aligned} \int_S \vec{u} \, d\vec{S} &= -u_1 \frac{\pi D_1^2}{4} - \frac{U_{2\max}}{2} \frac{\pi D_2^2}{4} + u_3 \frac{\pi D_3^2}{4} = 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad u_3 &= u_1 \left(\frac{D_1}{D_3} \right)^2 + \frac{U_{2\max}}{2} \left(\frac{D_2}{D_3} \right)^2 = 2 \left(\frac{80}{50} \right)^2 + 4 \left(\frac{40}{100} \right)^2 = 1.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned}$$

Esercizio 6.1.9

Un fluido incompressibile entra in un tubo di diametro $D = 600 \text{ mm}$ con velocità costante $u_1 = 2 \text{ m/s}$. Al suo interno un tubo concentrico di diametro $D/2$ e con una parete di spessore trascurabile divide il flusso in una zona interna cilindrica e in una zona esterna anulare aventi rispettivamente le seguenti distribuzioni della velocità

$$u_2 = \frac{5}{2} u_1 \left[1 - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad , \quad u_3 = 2 u_1 \left[-1 + 7 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 6 \left(\frac{r}{R} \right)^3 \right].$$

Se il moto è stazionario e se le masse volumiche sono $\rho_1 = \rho_3 = \rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ e $\rho_2 = \rho/2$, calcolare la portata massica G_m che deve passare (in entrata o in uscita) dall'apertura laterale.



Dopo aver scelto un volume di controllo (nella figura è riportata con linee colorate in rosso una possibilità), dal bilancio della massa (6.2) in caso di moto stazionario si ha

$$\int_S \vec{u} \, \rho \, d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{u} \, \rho \, d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{u} \, \rho \, d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{u} \, \rho \, d\vec{S} = 0$$

in quanto il flusso passa attraverso le sezioni (1), (2) e (3).

Nella sezione (1), in cui la velocità viene considerata costante, si ha

$$\int_{S_1} \vec{u} \rho d\vec{S} = - \int_{S_1} u \rho dS = -u_1 \rho_1 S_1 = -u_1 \rho \frac{\pi D_1^2}{4}$$

perché il prodotto scalare è negativo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso discorde); nelle sezioni (2) e (3), in cui la velocità varia, invece si ha

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \vec{u} \rho d\vec{S} &= \int_{S_2} u_2 \rho_2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{R/2} \frac{5}{2} u_1 \rho \left[1 - 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] r dr d\varphi = \\ &= \frac{5}{2} u_1 \rho 2\pi \left(\int_0^{R/2} r dr - \frac{4}{R^2} \int_0^{R/2} r^3 dr \right) = 5 u_1 \rho \pi \left(\frac{R^2}{8} - \frac{4}{R^2} \frac{R^4}{64} \right) = \frac{15}{16} u_1 \rho \pi R^2 = \frac{5}{64} u_1 \rho \pi D^2 \end{aligned}$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso concorde) e

$$\begin{aligned} \int_{S_3} \vec{u} \rho d\vec{S} &= \int_{S_3} u_3 \rho_3 dS = \int_0^{2\pi} \int_{R/2}^R 2 u_1 \rho \left[-1 + 7 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 6 \left(\frac{r}{R} \right)^3 \right] r dr d\varphi = \\ &= 2 u_1 \rho 2\pi \left(- \int_{R/2}^R r dr + \frac{7}{R^2} \int_{R/2}^R r^3 dr - \frac{6}{R^2} \int_{R/2}^R r^4 dr \right) = \\ &= 4 u_1 \rho \pi \left(- \frac{3R^2}{8} + \frac{7}{R^2} \frac{15R^4}{64} - \frac{6}{R^2} \frac{31R^5}{160} \right) = \frac{33}{80} u_1 \rho \pi D^2 \end{aligned}$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso concorde).

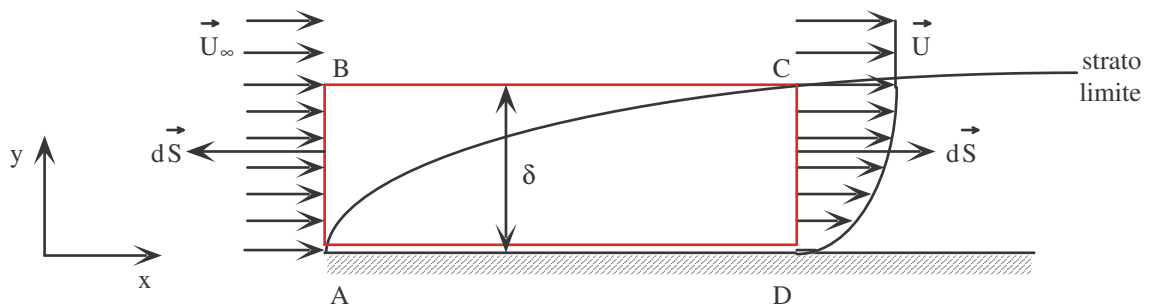
In definitiva si ha

$$\begin{aligned} \int_S \vec{u} \rho d\vec{S} &= -\frac{1}{4} u_1 \rho \pi D^2 + \frac{5}{64} u_1 \rho \pi D^2 + \frac{33}{80} u_1 \rho \pi D^2 + G_m = 0 \quad \rightarrow \\ G_m &= \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{64} - \frac{33}{80} \right) u_1 \rho \pi D^2 = -\frac{77}{320} u_1 \rho \pi D^2 = -\frac{77}{320} \times 2 \times 1000 \times \pi \times 0.6^2 = -544 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Poiché il segno ottenuto è negativo, la portata è entrante.

Esercizio 6.1.10

Il fluido, a contatto diretto con una parete solida ferma, ha velocità nulla (condizioni di non scorrimento); di conseguenza il moto in vicinanza di una lastra sottile forma uno strato limite. Se il fluido è aria con massa volumica $\rho = 1.24 \text{ kg/m}^3$ e con velocità indisturbata $U_\infty = 30 \text{ m/s}$ e se in una certa posizione lo spessore dello strato limite è $\delta = 5 \text{ mm}$, calcolare in condizioni di moto stazionario la portata massica in direzione perpendicolare ad una lastra larga $Z = 0.6 \text{ m}$.



Dopo aver scelto un volume di controllo (nella figura il rettangolo di vertici ABCD colorato in rosso), dal bilancio della massa (6.2) in caso di moto stazionario per un fluido compressibile si ha

$$\begin{aligned} \int_S \vec{u} \rho d\vec{S} &= \int_{S_{AB}} \vec{u} \rho d\vec{S} + \int_{S_{BC}} \vec{u} \rho d\vec{S} + \int_{S_{CD}} \vec{u} \rho d\vec{S} + \int_{S_{DA}} \vec{u} \rho d\vec{S} = 0 \quad \rightarrow \\ &\rightarrow G_{mBC} = \int_{S_{BC}} \vec{u} \rho d\vec{S} = - \int_{S_{AB}} \vec{u} \rho d\vec{S} - \int_{S_{CD}} \vec{u} \rho d\vec{S} \end{aligned}$$

poiché attraverso la superficie DA per definizione non passa fluido.

Se la massa volumica e la velocità vengono considerate costanti nelle singole sezioni, si ha

$$\int_{S_{AB}} \vec{u} \rho d\vec{S} = - \int_{S_{AB}} u \rho dS = - \int_{y_A=0}^{y_B=\delta} U_{\infty} \rho Z dy = - U_{\infty} \rho Z [dy]_0^{\delta} = - U_{\infty} \rho Z \delta$$

perché il prodotto scalare è negativo (i vettori della velocità e della superficie infinitesima hanno verso discordo) e

$$\int_{S_{CD}} \vec{u} \rho d\vec{S} = \int_{S_{CD}} u \rho dS = \int_{y_D=0}^{y_C=\delta} \rho Z u dy$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie infinitesima hanno verso concorde). Sostituendo nell'ultima relazione la legge di distribuzione della velocità in uno strato limite di una lastra sottile

$$\frac{u}{U_{\infty}} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad \rightarrow \quad u = U_{\infty} \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right]$$

si ricava

$$\int_{y_D=0}^{y_C=\delta} \rho Z u dy = \int_0^{\delta} U_{\infty} \rho Z \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right] dy = U_{\infty} \rho Z \left[\frac{3}{2\delta} \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2\delta^3} \frac{y^4}{4} \right]_0^{\delta} = \frac{5}{8} U_{\infty} \rho Z \delta$$

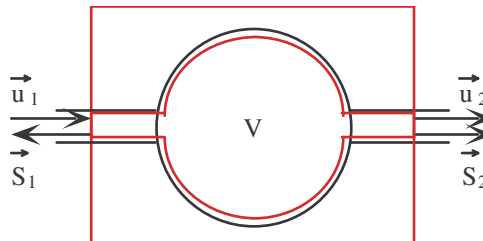
In base ai dati del problema allora si ha

$$G_{mBC} = - \int_{S_{AB}} \vec{u} \rho d\vec{S} - \int_{S_{CD}} \vec{u} \rho d\vec{S} = U_{\infty} \rho Z \delta - \frac{5}{8} U_{\infty} \rho Z \delta = \frac{3}{8} U_{\infty} \rho Z \delta = \frac{3}{8} \times 30 \times 1.24 \times 0.6 \times 0.005 = 0.0419 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Il segno positivo indica che il fluido esce attraverso la superficie BC.

Esercizio 6.1.11

Un recipiente di volume $V = 0.5 \text{ m}^3$ contiene aria di massa volumica $\rho = 11 \text{ kg/m}^3$. Al tempo $t = 0$ inizia a entrare aria con massa volumica $\rho_1 = 16.5 \text{ kg/m}^3$ attraverso una sezione $S_1 = 0.018 \text{ m}^2$ con una velocità $u_1 = 4.5 \text{ m/s}$ e a uscire aria con massa volumica uguale a quella vigente nel recipiente attraverso una sezione $S_2 = 0.036 \text{ m}^2$ con una velocità di $u_2 = 1.5 \text{ m/s}$. Calcolare la variazione di massa volumica nel recipiente all'istante $t = 0$.



Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura sono riportate con linee di colore rosso due possibilità: una lungo le pareti interne del recipiente e la seconda che comprende l'intero recipiente), dal bilancio della massa (6.1) nel caso in cui il volume di controllo V non dipende dal tempo si ha

$$V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int_S \vec{u} \rho d\vec{S} = V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int_{S_1} \vec{u} \rho d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{u} \rho d\vec{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso le sezioni (1) e (2).

Se la massa volumica e la velocità vengono considerate costanti nelle singole sezioni, si ha

$$\int_{S_1} \vec{u} \rho d\vec{S} = - \int_{S_1} u \rho dS = - u_1 \rho_1 S_1$$

perché il prodotto scalare è negativo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso discordo) e

$$\int_{S_2} \vec{u} \rho d\vec{S} = \int_{S_2} u \rho dS = u_2 \rho_2 S_2$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso concorde).

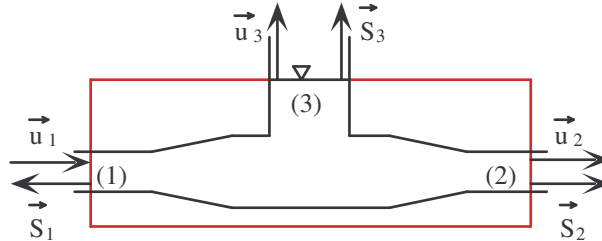
In base ai dati del problema al tempo $t = 0$ allora si ha

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{u_1 \rho_1 S_1 - u_2 \rho_2 S_2}{V} = \frac{4.5 \times 16.5 \times 0.018 - 1.5 \times 11 \times 0.036}{0.5} = 1.49 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{s}}.$$

La massa volumica tende quindi ad aumentare.

Esercizio 6.1.12

Una tubazione di sezione $S_1 = S_2 = 1 \text{ m}^2$ contiene una camera d'espansione con una superficie libera pari a $S_3 = 2 \text{ m}^2$. Ad un certo istante la velocità di ingresso dell'acqua è $u_1 = 3 \text{ m/s}$ e la portata volumetrica di uscita è $G_{v2} = 4 \text{ m}^3/\text{s}$; trovare in questo istante la velocità di spostamento della superficie libera.



Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura è riportata con linee di colore rosso una possibilità), dal bilancio della massa (6.3) per un fluido incompressibile si ha

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \int_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial V}{\partial t} + \int_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso le sezioni (1) e (2).

Se la velocità viene considerata costante nelle singole sezioni, si ha

$$\int_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_1} u \, dS = -u_1 S_1$$

perché il prodotto scalare è negativo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso discorde) e

$$\int_{S_2} \vec{u} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} u \, dS = u_2 S_2$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso concorde).

In base ai dati del problema al tempo $t = 0$ allora si ha

$$\frac{\partial V}{\partial t} = u_1 S_1 - u_2 S_2 = u_1 S_1 - G_{v2} = 3 \times 1 - 4 = -1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}};$$

la velocità di uscita dalla sezione (2) è

$$u_2 = \frac{G_{v2}}{S_2} = \frac{4}{1} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Il volume all'interno della camera di espansione tende quindi a diminuire e, dato che la variazione di volume nel tempo è la portata volumetrica passante attraverso la sezione (3) in cui i vettori della velocità e della sezione sono presi concordi, si ha una velocità di entrata pari a

$$G_{v3} = \frac{\partial V}{\partial t} = -1 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \quad \rightarrow \quad u_3 = \frac{G_{v3}}{S_3} = -\frac{1}{2} = -0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

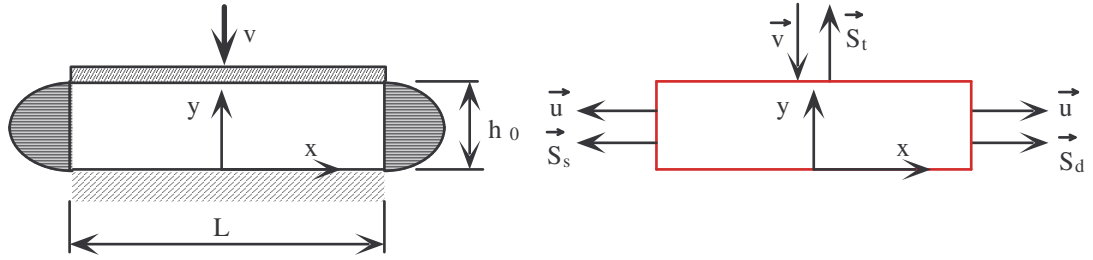
Esercizio 6.1.13

Il meato mostrato in figura, lungo $L = 1.5 \text{ mm}$, largo Z e di altezza iniziale $h_0 = 1.25 \text{ mm}$, è riempito di fluido incompressibile. La parete superiore si muove verso il basso con velocità $v = 0.25 \text{ mm/s}$, mentre la distribuzione della velocità nelle uscite laterali è

$$u = 4 U_{\max} \left[\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]$$

Calcolare la velocità massima $U_{\max}$ in funzione di L , v , h ; determinare la legge dell'altezza generica h in funzione di v , h_0 , t e sostituirla nella relazione della velocità massima; discutere l'andamento della velocità massima

nel tempo ed effettuarne un diagramma fino al momento in cui la parete mobile tocca quella fissa.



Dopo aver scelto un volume di controllo (nella figura è riportata con linee colorate in rosso una possibilità), è possibile scegliere: a) un sistema di coordinate che si muove con la parete mobile; b) un sistema di coordinate fisse.

a) Nel caso di un sistema di coordinate che si muove con il pistone, dal bilancio della massa (6.4) in caso di moto stazionario per un fluido incompressibile si ha

$$\int_S \vec{u} d\vec{S} = \int_{S_s} \vec{u} d\vec{S} + \int_{S_d} \vec{u} d\vec{S} + \int_{S_t} \vec{u} d\vec{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso la superficie superiore S_t , la superficie di sinistra S_s e la superficie di destra S_d .

Nella superficie superiore, in cui la velocità v è costante, si ha

$$\int_{S_t} \vec{u} d\vec{S} = - \int_{S_t} v dS = - v S_t = - v Z L$$

perché il prodotto scalare è negativo (i versori della velocità e della superficie hanno verso discorde); nelle sezioni laterali sinistra e destra, in cui la velocità varia, invece si ha

$$\begin{aligned} \int_{S_s} \vec{u} d\vec{S} &= - \int_{S_s} u_s dS = - \int_0^Z \int_0^h 4 U_{\max} \left[\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right] dz dy = 4 U_{\max} Z \left[\frac{1}{2} \frac{y^2}{h} - \frac{1}{3} \frac{y^3}{h^2} \right]_0^h = \frac{2}{3} U_{\max} Z h \\ \int_{S_d} \vec{u} d\vec{S} &= \frac{2}{3} U_{\max} Z h \end{aligned}$$

perché il prodotto scalare è positivo (i versori della velocità e della superficie hanno verso concorde).

L'equazione del bilancio della massa si riduce allora a

$$- v Z L + \frac{2}{3} U_{\max} Z h + \frac{2}{3} U_{\max} Z h = 0 \quad \rightarrow \quad - v L + \frac{4}{3} U_{\max} h = 0 \quad . \quad (A)$$

b) Nel caso di un sistema di coordinate fisse, dal bilancio della massa (6.3) per un fluido incompressibile si ha

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \int_S \vec{u} d\vec{S} = \frac{\partial V}{\partial t} + \int_{S_s} \vec{u} d\vec{S} + \int_{S_d} \vec{u} d\vec{S} = 0 \quad .$$

in quanto il fluido passa attraverso la superficie di sinistra S_s e la superficie di destra S_d .

Dato che la variazione di volume nel tempo è la portata volumetrica passante attraverso la sezione S_t in cui i versori della velocità e della sezione sono presi discordi, si ha

$$\frac{\partial V}{\partial t} = G_{vt} = - v S_t = - v Z L \quad .$$

L'equazione di bilancio della massa, in base a quanto già visto nel punto precedente, si riduce a

$$- v Z L + \frac{2}{3} U_{\max} Z h + \frac{2}{3} U_{\max} Z h = 0 \quad \rightarrow \quad - v L + \frac{4}{3} U_{\max} h = 0 \quad (B)$$

e diventa uguale all'espressione (A).

A questo punto, sia per la scelta a) che per la scelta b), integrando l'equazione differenziale del moto della parete superiore

$$\frac{dh}{dt} = - v \quad \rightarrow \quad dh = - v dt \quad \rightarrow \quad \int_{h_0}^h dh = - v \int_0^t dt \quad \rightarrow \quad h - h_0 = - v t \quad ,$$

si trova la legge dell'altezza del meato in funzione del tempo

$$h = h_0 - v t .$$

In definitiva l'equazione di bilancio della massa, (A) o (B), diventa

$$-v L + \frac{4}{3} U_{\max} h = 0 \quad \rightarrow \quad -v L + \frac{4}{3} U_{\max} (h_0 - v t) = 0$$

e la velocità massima, in base ai dati del problema, vale

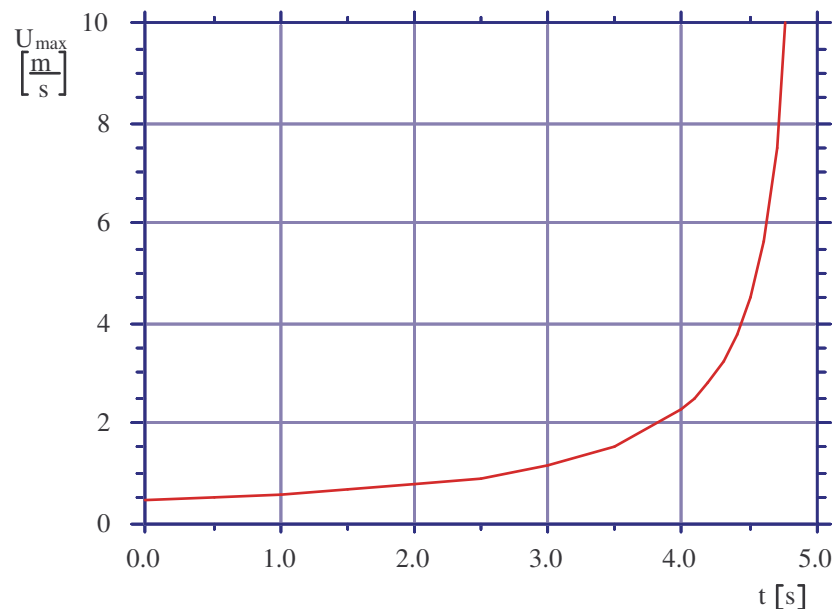
$$U_{\max} = \frac{3}{4} \frac{L v}{h_0 - v t} = \frac{A}{B - C t} = \frac{2.25}{5 - t}$$

dove

$$A = 3 L v = 3 \times 1.5 \times 0.5 = 2.25 \quad ; \quad B = 4 h_0 = 4 \times 1.25 = 5 \quad ; \quad C = 4 v = 4 \times 0.25 = 1 .$$

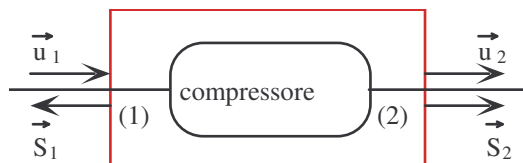
Dalla relazione precedente si constata che la velocità massima tende all'infinito quando l'altezza del meato tende a zero. Tuttavia, nella realtà la parete superiore non può muoversi verso il basso con una velocità costante v in corrispondenza della parete inferiore.

Nella figura seguente è riportato l'andamento della velocità massima; con i dati del problema la parete mobile tocca la parete fissa quando il tempo è $t = 5$ s.



Esercizio 6.1.14

Una portata di aria $G_{v1} = 20$ m³/min entra in un compressore in condizioni atmosferiche standard e ne esce alla pressione $p_2 = 800$ kPa e alla temperatura $T_2 = 60$ °C. Se la velocità nella tubazione di distribuzione dell'aria compressa deve avere un valore massimo $u_2 = 20$ m/s, determinarne il suo diametro.



La massa volumica dell'aria all'ingresso del compressore (condizioni standard: $p_1 = 1$ bar e $T_1 = 0$ °C) vale

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R T_1} = \frac{101325}{287 \times 273} = 1.293 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ,$$

mentre all'uscita dal compressore vale

$$\rho_2 = \frac{p_2}{R T_2} = \frac{800000}{287 \times 333} = 8.371 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} .$$

Dopo aver scelto un volume di controllo (nella figura è riportata con linee di colore rosso una possibilità), dal bilancio della massa (6.2) in caso di moto stazionario per un fluido compressibile si ha

$$\int_S \vec{u} \rho d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{u} \rho d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{u} \rho d\vec{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso le sezioni (1) e (2).

Se la massa volumica e la velocità vengono considerate costanti nelle singole sezioni, si ha

$$\int_{S_1} \vec{u} \rho d\vec{S} = - \int_{S_1} u \rho dS = -|u_1 \rho_1 S_1|$$

perché il prodotto scalare è negativo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso discorde) e

$$\int_{S_2} \vec{u} \rho d\vec{S} = - \int_{S_2} u \rho dS = -u_2 \rho_2 S_2$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso concorde).

In base ai dati del problema allora si ha

$$G_{m2} = \int_{S_2} \vec{u} \rho d\vec{S} = - \int_{S_1} \vec{u} \rho d\vec{S} = u_1 \rho_1 S_1 = \rho_1 G_{v1} = 1.293 \times \frac{20}{60} = 0.4310 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

e quindi

$$S_2 = \frac{G_{m2}}{u_2 \rho} = \frac{0.4310}{8.371 \times 20} = 0.002574 \text{ m}^2 ;$$

il diametro della tubazione deve quindi essere

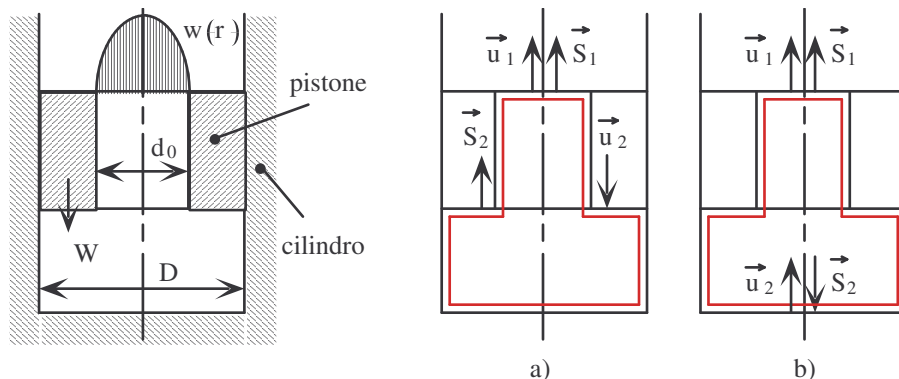
$$D = \sqrt{\frac{4 S_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 0.002574}{\pi}} = 0.0572 \text{ m} \cong 6 \text{ cm} .$$

Esercizio 1.1.15

Il pistone mostrato in figura si muove con velocità $W = 10 \text{ mm/s}$ all'interno di un cilindro riempito di olio, avente un diametro pari a $D = 20 \text{ mm}$. La superficie superiore del pistone presenta un foro di diametro $d_0 = 10 \text{ mm}$ attraverso cui la velocità dell'olio uscente, misurata rispetto alla velocità del pistone, presenta una distribuzione pari a

$$w(r) = W_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] .$$

Calcolare la velocità massima W con: a) un sistema di coordinate che si muove con il pistone; b) un sistema di coordinate fisse.



a) In un sistema di coordinate che si muove con il pistone, la parete inferiore del volume di controllo si muove verso l'alto con la velocità $u_2 = W$ e, quindi, è come se attraverso essa il fluido entrasse alla stessa velocità; attraverso la parete superiore del volume di controllo il fluido esce alla velocità $u_1 = w(r)$, mentre attraverso la parete laterale del volume di controllo non passa fluido.

Dopo aver scelto un volume di controllo (nella figura a è riportata con linee colorate in rosso una possibilità), dal bilancio della massa (6.4) in caso di moto stazionario per un fluido incompressibile si ha

$$\int_S \vec{u} \, d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{u} \, d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{u} \, d\vec{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso le sezioni (1) e (2). Nella sezione in cui la velocità varia in modo parabolico si ha

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \vec{u} \, d\vec{S} &= \int_0^{r_0} W_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] 2\pi r \, dr = 2\pi W_{\max} \left(\int_0^{r_0} r \, dr - \frac{1}{r_0^2} \int_0^{r_0} r^3 \, dr \right) = \\ &= 2\pi W_{\max} \left(\frac{r_0^2}{2} - \frac{1}{r_0^2} \frac{r_0^4}{4} \right) = 2\pi W_{\max} \frac{r_0^4}{4} = \frac{\pi}{8} d_0^2 W_{\max} \end{aligned}$$

perché il prodotto scalare è positivo (i versori della velocità e della superficie hanno verso concorde), mentre nella sezione, in cui la velocità viene considerata costante, si ha

$$\int_{S_2} \vec{u} \, d\vec{S} = - \int_{S_2} W \, dS = - \frac{\pi}{4} D^2 W$$

perché il prodotto scalare è negativo (i versori della velocità e della superficie hanno verso discorde).

L'equazione di bilancio della massa si riduce allora a

$$\frac{\pi}{8} d_0^2 W_{\max} - \frac{\pi}{4} D^2 W = 0 \quad \rightarrow \quad W_{\max} = 2 \left(\frac{D}{d_0} \right)^2 W = 2 \times \left(\frac{20}{10} \right)^2 \times 0.010 = 0.080 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 80 \frac{\text{mm}}{\text{s}} \quad . \quad (\text{A})$$

b) In un sistema di coordinate fisse, la parete inferiore del volume di controllo è ferma e, quindi, attraverso essa non passa fluido; la parete superiore del volume di controllo si muove con la velocità W e, quindi, è come se attraverso essa il fluido uscisse alla velocità relativa $u_1 = w(r) - W$; la parete laterale del volume di controllo si muove con la velocità W e, quindi, attraverso la parte di superficie, la cui normale non è perpendicolare all'asse del cilindro e dello stantuffo, il fluido entra con la stessa velocità $u_2 = W$.

Dopo aver scelto un volume di controllo (nella figura b è riportata con linee colorate in rosso una possibilità), dal bilancio della massa (6.4) in caso di moto stazionario per un fluido incompressibile si ha

$$\int_S \vec{u} \, d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{u} \, d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{u} \, d\vec{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso le sezioni (1) e (2). Nella sezione in cui la velocità varia in modo parabolico si ha

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \vec{u} \, d\vec{S} &= \int_0^{r_0} W_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] 2\pi r \, dr = 2\pi W_{\max} \left(\int_0^{r_0} r \, dr - \frac{1}{r_0^2} \int_0^{r_0} r^3 \, dr \right) - 2\pi W \int_0^{r_0} r \, dr = \\ &= 2\pi W_{\max} \left(\frac{r_0^2}{2} - \frac{1}{r_0^2} \frac{r_0^4}{4} \right) - 2\pi W \frac{r_0^2}{2} = 2\pi W_{\max} \frac{r_0^4}{4} - \pi r_0^2 W = \frac{\pi}{4} d_0^2 \left(\frac{W_{\max}}{2} - W \right) \end{aligned}$$

perché il prodotto scalare è positivo (i versori della velocità e della superficie hanno verso concorde), mentre nella sezione, in cui la velocità viene considerata costante, si ha

$$\int_{S_2} \vec{u} \, d\vec{S} = - \int_{S_2} W \, dS = - \frac{\pi}{4} (D^2 - d_0^2) W$$

perché il prodotto scalare è negativo (i versori della velocità e della superficie hanno verso discorde).

L'equazione di bilancio della massa si riduce allora a

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} d_0^2 \left(\frac{W_{\max}}{2} - W \right) - \frac{\pi}{4} (D^2 - d_0^2) W &= 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{4} d_0^2 \frac{W_{\max}}{2} - \frac{\pi}{4} d_0^2 W - \frac{\pi}{4} D^2 W + \frac{\pi}{4} d_0^2 W = 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad W_{\max} &= 2 \left(\frac{D}{d_0} \right)^2 W = 2 \times \left(\frac{20}{10} \right)^2 \times 0.010 = 0.080 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 80 \frac{\text{mm}}{\text{s}} \quad . \quad (\text{B}) \end{aligned}$$

Le due soluzioni (A) e (B), ovviamente sono indipendenti dal sistema di coordinate usate e, di conseguenza, sono uguali.

[Nota. Dal bilancio della massa (6.3) per un fluido incompressibile, in base a quanto visto nei punti a) e b), si ha anche

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \int_S \bar{u} d\bar{S} = \frac{\partial V}{\partial t} + \int_{S_1} \bar{u} d\bar{S} = G_{v2} + u_1 S_1 = -u_2 S_2 + u_1 S_1 = -\frac{\pi}{4} D^2 W + \frac{\pi}{8} d_0^2 W_{\max} = -D^2 W + d_0^2 \frac{W_{\max}}{2} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow W_{\max} = 2 \left(\frac{D}{d_0} \right)^2 W$$

uguale alla (A) e alla (B).]

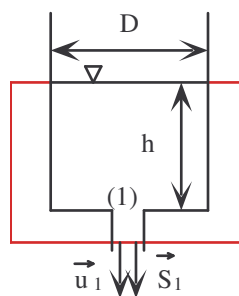
Esercizio 6.1.16

L'acqua in un serbatoio cilindrico di diametro $D = 0.3$ m sta uscendo attraverso un foro sito sul fondo. Ad un certo istante la portata massica all'uscita è $G_{m1} = 4$ kg/s; trovare la variazione di livello in questo istante.

Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura è riportata con linee ingrossate una possibilità), dal bilancio della massa (6.3) per un fluido incompressibile si ha

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \int_S \bar{u} d\bar{S} = \frac{\partial V}{\partial t} + \int_{S_1} \bar{u} d\bar{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso la sezione (1).



Se la velocità viene considerata costante nelle singole sezioni, si ha

$$\int_{S_1} \bar{u} d\bar{S} = \int_{S_1} u dS = u_1 S_1$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso concorde).

In base ai dati del problema al tempo $t = 0$ allora si ha

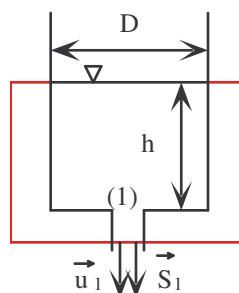
$$\frac{\partial V}{\partial t} = -u_1 S_1 = -G_{v1} = -\frac{G_{m1}}{\rho} = -\frac{4}{1000} = -0.004 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Il volume di acqua all'interno del serbatoio tende quindi a diminuire e il livello tende a calare con una velocità

$$u = \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial V / \partial t}{S} = \frac{\partial V / \partial t}{\pi D^2 / 4} = \frac{-0.004}{\pi \times 0.3^2 / 4} = -0.0566 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Esercizio 6.1.17

L'acqua in un serbatoio cilindrico di diametro $D = 50$ mm esce attraverso un foro di diametro $D_1 = 5$ mm sito sul fondo. La velocità con cui l'acqua lascia il serbatoio può essere data dalla legge di Torricelli $u_1 = \sqrt{2gh}$ dove h è l'altezza fra il pelo libero e il fondo del serbatoio e al tempo iniziale $t_0 = 0$ s l'altezza vale $h_0 = 0.4$ m. Trovare: a) il livello h all'istante $t = 12$ s; b) il tempo t necessario a vuotare completamente il serbatoio.



Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura è riportata con linee ingrossate una possibilità), dal bilancio della massa (6.3) per un fluido incompressibile si ha

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \int_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial V}{\partial t} + \int_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso la sezione (1).

Se la velocità viene considerata costante nelle singole sezioni, si ha

$$\int_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} u \, dS = u_1 S_1$$

perché il prodotto scalare è positivo (i versori della velocità e della superficie hanno verso concorde).

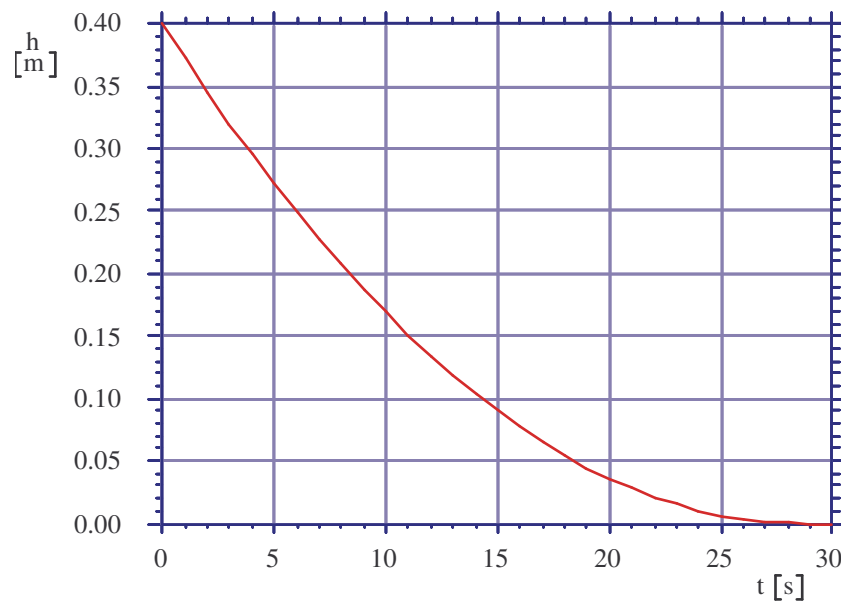
a) Con la sostituzione della legge di Torricelli e con l'integrazione del tempo fra t_0 e t e delle altezze fra h_0 e h , si ricava

$$\begin{aligned} \frac{\partial(S h)}{\partial t} = -\sqrt{2gh} S_1 &\rightarrow \frac{\pi D^2}{4} \int_{h_0}^h h^{-1/2} dh = -\sqrt{2g} \frac{\pi D_1^2}{4} \int_{t_0}^t dt \rightarrow D^2 2 \left[h^{1/2} \right]_{h_0}^h = -\sqrt{2g} D_1^2 [t]_{t_0}^t \rightarrow \\ &\rightarrow \sqrt{h} = \sqrt{h_0} - \left(\frac{D_1}{D} \right)^2 \sqrt{\frac{g}{2}} (t - t_0) = \sqrt{0.4} - \left(\frac{5}{50} \right)^2 \times \sqrt{\frac{9.80665}{2}} \times (12 - 0) = 0.3667 \sqrt{m} \end{aligned}$$

e quindi

$$h = 0.134 \text{ m} .$$

Il livello dell'acqua h in funzione del tempo trascorso viene riportato nel diagramma della figura seguente



[Nota.- Invece di usare la relazione (6.3), si potrebbe fare ricorso alla relazione (6.4) valida per il moto stazionario, per un fluido incompressibile e per un volume non variabile nel tempo

$$\int_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0$$

avendo però l'accortezza di inserire nell'integrale anche la variazione nel tempo dell'altezza del pelo libero per la sezione come una portata passante attraverso il diametro D del serbatoio

$$u S + u_1 S_1 = 0 \rightarrow \frac{dh}{dt} S = -\sqrt{2gh} S_1$$

le due procedure sono infatti identiche perché danno luogo alla stessa relazione.]

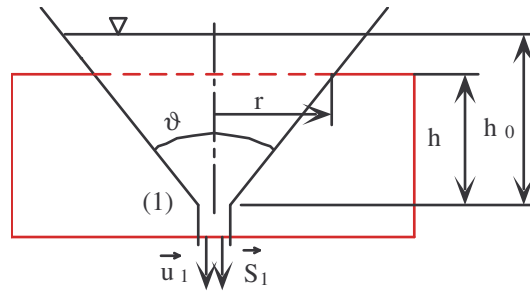
b) Lo svuotamento del serbatoio si verifica quando l'altezza h si annulla cioè quando

$$\sqrt{h_0} = \left(\frac{D_1}{D} \right)^2 \sqrt{\frac{g}{2}} (t - t_0) \rightarrow t - t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \left(\frac{D}{D_1} \right)^2 = \sqrt{\frac{2 \times 0.4}{9.80665}} \times \left(\frac{50}{5} \right)^2 = 28.6 \text{ s} .$$

Esercizio 6.1.18

Un imbuto di angolo ϑ scarica il fluido attraverso un foro, posizionato nel suo vertice, di sezione S_1 con una

velocità approssimabile con la legge di Torricelli $u_1 = \sqrt{2gh}$ dove h è l'altezza fra il pelo libero e il foro dell'imbuto. Se inizialmente l'altezza del fluido è h_0 , trovare la legge di fuoriuscita del fluido in funzione dei tempi t_0 e t , delle altezze h_0 e h e delle portate volumetriche $G_{v0} = u_0 S = \sqrt{2gh_0} S_1$ e $G_{v1} = u_1 S = \sqrt{2gh} S_1$.



Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura è riportata con linee di colore rosso una possibilità), dal bilancio della massa (6.2) per un fluido incompressibile si ha

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \int_S \vec{u} d\vec{S} = \frac{\partial V}{\partial t} + \int_{S_1} \vec{u} d\vec{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso la sezione (1).

Se la velocità viene considerata costante nelle singole sezioni, si ha

$$\int_{S_1} \vec{u} d\vec{S} = \int_{S_1} |u| dS = |u_1| S_1$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso concorde).

Il raggio, trascurando l'altezza fra vertice dell'imbuto e sezione di uscita S_1 , è

$$r = h \sin \frac{\vartheta}{2}$$

per cui il volume infinitesimo di un tronco di cono di altezza infinitesima assume il valore

$$dV = \pi r^2 dh = \pi h^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} dh ;$$

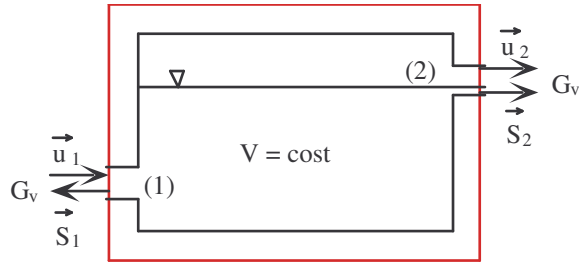
con la sostituzione della legge di Torricelli e con l'integrazione dell'altezza fra il valore iniziale h_0 e il valore generico h e del tempo fra il valore iniziale t_0 e il valore generico t , si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\pi \sin^2 \frac{\vartheta}{2} h^2 dh \right] &= -\sqrt{2gh} S_1 \quad \rightarrow \quad \frac{\pi \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{2g} S_1} \int_{h_0}^h h^{3/2} dh = - \int_{t_0}^t dt \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad \frac{\pi \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{2g} S_1} \frac{2}{5} \left[h^{5/2} \right]_{h_0}^h &= - [t]_{t_0}^t \quad \rightarrow \quad \frac{2}{5} \frac{\pi \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{2g} S_1} \left(\frac{h^3}{\sqrt{h}} - \frac{h_0^3}{\sqrt{h_0}} \right) = -(t - t_0) \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad \frac{2}{5} \pi \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \left(\frac{h^3}{\sqrt{2gh} S_1} - \frac{h_0^3}{\sqrt{2gh_0} S_1} \right) &= -(t - t_0) \quad \rightarrow \quad (t - t_0) = \frac{2}{5} \pi \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \left(\frac{h_0^3}{G_{v0}} - \frac{h^3}{G_{v1}} \right). \end{aligned}$$

Dalla relazione precedente si nota che il tempo dipende direttamente dal quadrato del seno del semiangolo e dal cubo delle altezze (dimensionalmente dai volumi) e inversamente dalla portate volumetriche.

Esercizio 6.1.19

Un recipiente contiene un volume di salamoia con massa volumica ρ_s più grande di quella dell'acqua ρ_a ($\rho_s > \rho_a$). Ad un certo istante inizia ad entrare una portata volumetrica G_v di acqua che si mescola con la salamoia, ma il livello rimane costante perché nella parte superiore è sistemato uno sfioro che scarica una portata volumetrica G_v uguale a quella di entrata. Trovare: a) un'espressione della variazione della massa volumica ρ della miscela salamoia - acqua; b) il tempo richiesto affinché la massa volumica raggiunga un valore generico ρ_g compreso fra ρ_s e ρ_a ($\rho_s > \rho_g > \rho_a$).



Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura è riportata con linee di colore rosso una possibilità), dal bilancio della massa (6.1) nel caso in cui il volume di controllo V non dipende dal tempo si ha

$$V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int_S \bar{u} \rho d\bar{S} = V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int_{S_1} \bar{u} \rho d\bar{S} + \int_{S_2} \bar{u} \rho d\bar{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso le sezioni (1) e (2).

Se la massa volumica e la velocità vengono considerate costanti nelle singole sezioni, si ha

$$\int_{S_1} \bar{u} \rho d\bar{S} = - \int_{S_1} u \rho dS = -u_1 \rho_1 S_1$$

perché il prodotto scalare è negativo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso discorde) e

$$\int_{S_2} \bar{u} \rho d\bar{S} = \int_{S_2} u \rho dS = |u_2 \rho_2 S_2|$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso concorde).

a) Poiché la portata volumetrica entrante è uguale a quella uscente ($G_{v1} = G_{v2} = G_v$), si ha

$$V \frac{\partial \rho}{\partial t} - u_1 \rho_1 S_1 + u_2 \rho_2 S_2 = V \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho_a G_v + \rho G_v = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\rho - \rho_a) \frac{G_v}{V}$$

dove la massa volumica all'ingresso corrisponde a quella dell'acqua $\rho_1 = \rho_a$ e all'uscita corrisponde a quella della miscela salamoia - acqua $\rho_2 = \rho$.

b) Separando le variabili e integrando la massa volumica fra i valori iniziale ρ_s e finale ρ_g della salamoia e il tempo fra t_0 e t , dalla relazione precedente si ha

$$\begin{aligned} \int_{\rho_s}^{\rho_g} \frac{d\rho}{\rho - \rho_a} &= - \int_{t_0}^t \frac{G_v}{V} dt \quad \rightarrow \quad \int_{\rho_s}^{\rho_g} \frac{d(\rho - \rho_a)}{\rho - \rho_a} = - \frac{G_v}{V} \int_{t_0}^t dt \quad \rightarrow \\ &\rightarrow \quad \ln \left(\frac{\rho_g - \rho_a}{\rho_s - \rho_a} \right) = - \frac{G_v}{V} (t - t_0) \quad \rightarrow \quad t - t_0 = \frac{V}{G_v} \ln \left(\frac{\rho_s - \rho_a}{\rho_g - \rho_a} \right). \end{aligned}$$

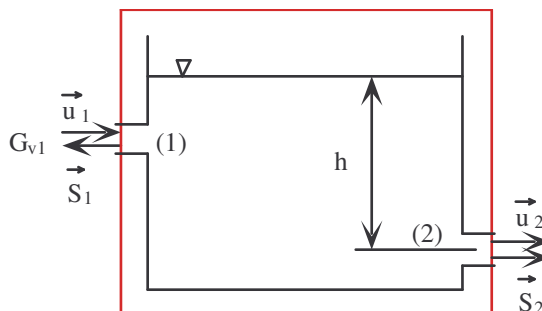
Dalla relazione precedente si nota che il tempo dipende direttamente dal volume e dal logaritmo naturale del rapporto fra le differenze delle masse volumiche iniziale e finale della salamoia rispetto a quella dell'acqua e inversamente dalla portata volumetrica.

Esercizio 6.1.20

Un recipiente ha due aperture: dalla (1) entra una portata volumetrica d'acqua $G_{v1} = 0.5 \text{ m}^3/\text{s}$ mentre dalla (2), di diametro $D_2 = 50 \text{ mm}$, esce acqua ad una velocità approssimabile con la legge di Torricelli

$$u_2 = \sqrt{2gh}$$

dove h è l'altezza all'interno del recipiente. Trovare l'altezza di equilibrio.



Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura è riportata con linee di colore rosso una possibilità), dal bilancio della massa (6.3) per un fluido incompressibile si ha

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \int_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial V}{\partial t} + \int_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso le sezioni (1) e (2).

Se la velocità viene considerata costante nelle singole sezioni, si ha

$$\int_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_1} u \, dS = -|u_1| S_1$$

perché il prodotto scalare è negativo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso discorde) e

$$\int_{S_2} \vec{u} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} u \, dS = u_2 S_2$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso concorde).

In base ai dati del problema allora si ha

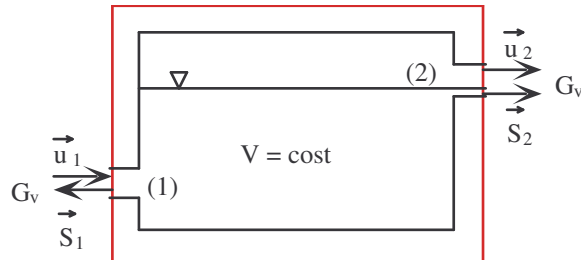
$$\frac{\partial V}{\partial t} - u_1 S_1 + u_2 S_2 = 0 \quad \rightarrow \quad S \frac{\partial h}{\partial t} = G_{v1} - \sqrt{2gh} S_2$$

e, poiché la condizione di equilibrio si ha quando $\partial h / \partial t = 0$, si ottiene

$$G_{v1} - \sqrt{2gh} S_2 = 0 \quad \rightarrow \quad h = \frac{G_{v1}^2}{2g \left(\frac{\pi D_2^2}{4} \right)^2} = \frac{0.5^2}{2 \times 9.80665 \times \left(\frac{\pi \times 0.05^2}{4} \right)^2} = 3.31 \text{ m}$$

Esercizio 6.1.21

Una portata volumetrica continua di acqua di mare $G_v = 0.015 \text{ m}^3/\text{s}$ è assicurata ad una soluzione di salamoia in un impianto di desalinizzazione. Nel bollitore il volume $V = 30 \text{ m}^3$ della salamoia rimane costante perché viene asportata una portata volumetrica di vapore prodotto uguale a quella della salamoia entrante G_v . Se la massa volumica iniziale della salamoia è uguale a quella dell'acqua di mare $\rho_m = 1025 \text{ kg/m}^3$, calcolare il tempo necessario a raddoppiare la percentuale di sale nella salamoia.



Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura è riportata con linee di colore rosso una possibilità), dal bilancio della massa (6.1) nel caso in cui il volume di controllo V non dipende dal tempo si ha

$$V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int_S \vec{u} \cdot \rho \, d\vec{S} = V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \int_{S_1} \vec{u} \cdot \rho \, d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{u} \cdot \rho \, d\vec{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso le sezioni (1) e (2).

Se la massa volumica e la velocità vengono considerate costanti nelle singole sezioni, si ha

$$\int_{S_1} \vec{u} \cdot \rho \, d\vec{S} = - \int_{S_1} u \rho \, dS = -u_1 \rho_1 S_1$$

perché il prodotto scalare è negativo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso discorde) e

$$\int_{S_2} \vec{u} \cdot \rho \, d\vec{S} = \int_{S_2} u \rho \, dS = u_2 \rho_2 S_2$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso concorde).

In base ai dati del problema allora si ha

$$V \frac{\partial \rho}{\partial t} - u_1 \rho_1 S_1 + u_2 \rho_2 S_2 = V \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho_m G_v + \rho_a G_v = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = (\rho_m - \rho_a) \frac{G_v}{V} \quad (A)$$

dove la massa volumica all'ingresso corrisponde a quella dell'acqua di mare $\rho_1 = \rho_m$ e all'uscita corrisponde a quella dell'acqua desalinizzata $\rho_2 = \rho_a$.

Poiché la percentuale di sale nell'acqua di mare vale

$$s = \frac{\rho_m - \rho_a}{\rho_a} = \frac{\rho_m}{\rho_a} - 1 = \frac{1025}{1000} - 1 = 0.025 = 2.5 \%$$

e poiché la percentuale della salamoia diventa doppia quando la massa volumica assume il valore

$$2s = \frac{\rho_s}{\rho_a} - 1 \quad \rightarrow \quad \rho_s = \rho_a (1 + 2s) = 1000 \times (1 + 2 \times 0.025) = 1050 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

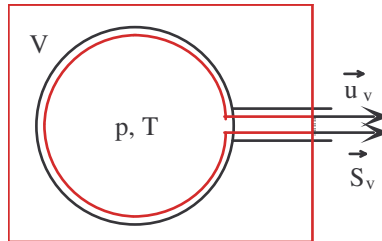
integrando la relazione (A) si ottiene

$$\int_{\rho_m}^{\rho_s} d\rho = (\rho_m - \rho_a) \frac{G_v}{V} \int_{t_0}^t dt \quad \rightarrow \quad \rho_s - \rho_m = (\rho_m - \rho_a) \frac{G_v}{V} t \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad t = \frac{\rho_s - \rho_m}{\rho_m - \rho_a} \frac{V}{G_v} = \frac{1050 - 1025}{1025 - 1000} \times \frac{30}{0.015} = 2000 \text{ s}.$$

Esercizio 6.1.22

Un recipiente di volume $V = 0.5 \text{ m}^3$ contiene aria alla pressione $p = 350 \text{ kPa}$ (assoluti) e alla temperatura $T_0 = -15^\circ \text{C}$. Al tempo $t_0 = 0$ l'aria comincia ad uscire attraverso una valvola di sezione $S_v = 130 \text{ mm}^2$ con una velocità di $u_{v0} = 300 \text{ m/s}$. Calcolare: a) la variazione di massa volumica all'interno del recipiente nel momento in cui la valvola viene aperta; b) il tempo t_1 impiegato dall'aria per raggiungere le condizioni esterne a $p_1 = 1 \text{ bar}$ e $T_1 = 15^\circ \text{C}$ sapendo che la legge della velocità di uscita è lineare $u_v = \frac{u_{v0}(t_1 - t)}{t_1}$; c) la legge della massa volumica ρ dal tempo t_0 fino al tempo t_1 .



a) Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura sono riportate con linee di colore rosso due possibilità: una lungo le pareti interne del recipiente e la seconda che comprende l'intero recipiente), dal bilancio della massa (6.1) nel caso in cui il volume di controllo V non dipende dal tempo si ha

$$V \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_S \bar{u} \rho d\bar{S} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{1}{V} \int_{S_v} \bar{u} \rho d\bar{S} \quad (A)$$

in quanto il fluido passa attraverso la sezione della valvola S_v .

Se la massa volumica e la velocità vengono considerate costanti nella sezione, si ha

$$\int_{S_v} \bar{u} \rho d\bar{S} = \int_{S_v} u \rho dS = u_v \rho S_v,$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso concorde), e la relazione (A) diventa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{u_v \rho S_v}{V}. \quad (B)$$

La massa volumica iniziale ρ_0 dell'aria all'interno del recipiente vale

$$\rho_0 = \frac{p_0}{R T_0} = \frac{350000}{287 \times 258} = 4.727 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

e di conseguenza dalla (B) si trova che al tempo $t = 0$ la sua variazione vale

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{t=0} = - \frac{u_{v0} \rho_0 S_v}{V} = - \frac{300 \times 4.727 \times 0.000130}{0.5} = -0.369 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{ s}} .$$

Poiché il segno è negativo, la massa volumica tende a diminuire.

b) La massa volumica dell'aria esterna rimane costante

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R T_1} = \frac{10^5}{287 \times 288} = 1.210 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} ,$$

mentre quella dell'aria interna varia con una legge che può essere ricavata dalla relazione (B) separando le variabili e integrando fra il punto iniziale 0 e il punto finale 1

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{u_v \rho S_v}{V} &\rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = - \frac{S_v}{V} u_v dt = - \frac{S_v}{V} u_{v0} \frac{(t_1 - t)}{t_1} dt \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{d\rho}{\rho} = - \frac{S_v}{V} u_{v0} \int_{t_0}^{t_1} dt + \frac{S_v}{V} \frac{u_{v0}}{t_1} \int_{t_0}^{t_1} t dt \rightarrow \\ &\rightarrow \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right) = - \frac{S_v}{V} u_{v0} t_1 + \frac{S_v}{V} \frac{u_{v0}}{t_1} \frac{t_1^2}{2} = - \frac{S_v}{V} u_{v0} \frac{t_1}{2} ; \quad (C) \end{aligned}$$

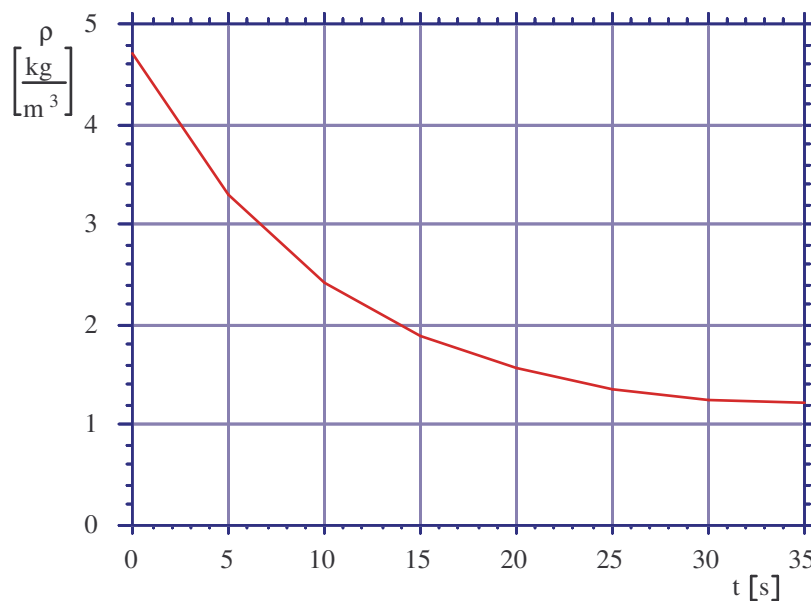
di conseguenza il tempo necessario affinché la massa volumica passi da ρ_0 a ρ_1 vale

$$t_1 = - \frac{2 V}{S_v u_{v0}} \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right) = - \frac{2 \times 0.5}{0.000130 \times 300} \ln\left(\frac{1.210}{4.727}\right) = 34.9 \text{ s} .$$

c) La legge (C), che dà la massa volumica ρ in funzione del tempo t , assume la seguente espressione

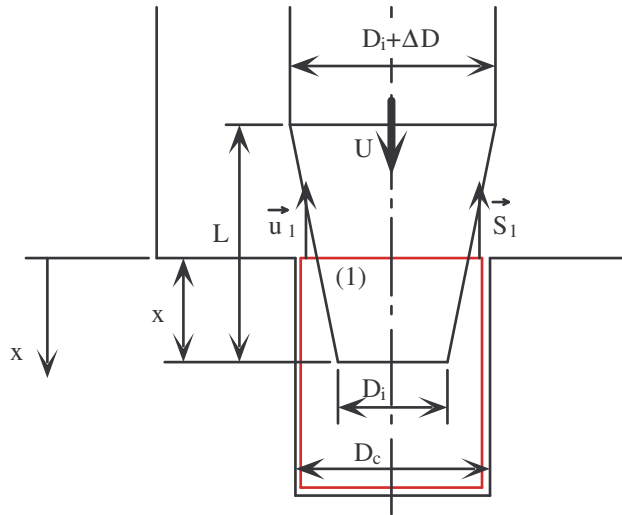
$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = - \frac{S_v}{V} u_{v0} \frac{t}{2} &\rightarrow \rho = \rho_0 \exp\left(- \frac{S_v u_{v0}}{2 V} t\right) = 4.727 \times \exp\left(- \frac{0.000130 \times 300}{2 \times 0.5} \times t\right) \rightarrow \\ &\rightarrow \rho = 4.727 \times \exp(-0.0390 \times t) ; \end{aligned}$$

il suo andamento è riportato nel diagramma della figura seguente.



Esercizio 6.1.23

Il movimento di un cilindro idraulico è ammortizzato dall'estremità del pistone che entra in una cavità. Se la massa volumica del fluido idraulico rimane costante, trovare l'espressione della velocità u con cui il fluido esce dalla cavità in funzione dello spostamento x del pistone.



Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura è riportata con linee di colore rosso una possibilità), dal bilancio della massa (6.3) per un fluido incompressibile si ha

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \int_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial V}{\partial t} + \int_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso la sezione (1).

Se la velocità viene considerata costante nelle singole sezioni, si ha

$$\int_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} u \, dS = |u_1| S_1$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie hanno verso concorde).

In base ai dati del problema allora si ha

$$\frac{\partial V}{\partial t} + |u_1| S_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -u_1 S_1$$

e, poiché il volume di controllo è dato dalla differenza del volume della cavità e del volume spazzolato dal pistone nel suo spostamento di entrata nella cavità

$$V = V_c - V_x = V_c - \frac{\pi}{4} \left(D_i + \frac{\Delta d}{2} \right)^2 x = V_c - \frac{\pi}{4} \left[D_i^2 x + D_i \frac{\Delta D}{L} x^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta D}{L} \right)^2 x^3 \right]$$

dove V_c è il volume della cavità, V_x è il volume del pistone entrato nella cavità dopo uno spostamento x e Δd è la variazione rispetto a quello minimo D_i del diametro del pistone in corrispondenza della sezione S_1 dopo uno spostamento x (vedi figura)

$$\Delta d = \frac{\Delta D}{L} x$$

e poiché la sezione di passaggio assume il valore

$$S_1 = S_c - S_x = \frac{\pi}{4} [D_c^2 - (D_i + \Delta d)^2] = \frac{\pi}{4} \left[D_c^2 - D_i^2 - 2 D_i \frac{\Delta D}{L} x - \left(\frac{\Delta D}{L} \right)^2 x^2 \right]$$

dove S_c è la sezione della cavità e S_x è la sezione del pistone in corrispondenza della sezione S_1 dopo uno spostamento x (vedi figura), dopo aver derivato il volume di controllo rispetto al tempo si ottiene

$$u_1 = -\frac{\frac{dV}{dt}}{S_1} = \frac{\frac{dV_x}{dt}}{S_c - S_x} = U \frac{D_i^2 + 2 D_i \frac{\Delta D}{L} x + \frac{3}{4} \left(\frac{\Delta D}{L} \right)^2 x^2}{D_c^2 - D_i^2 - 2 D_i \frac{\Delta D}{L} x - \left(\frac{\Delta D}{L} \right)^2 x^2}$$

dove U è la velocità del pistone definita come derivata dello spostamento del pistone lungo l'asse rispetto al tempo

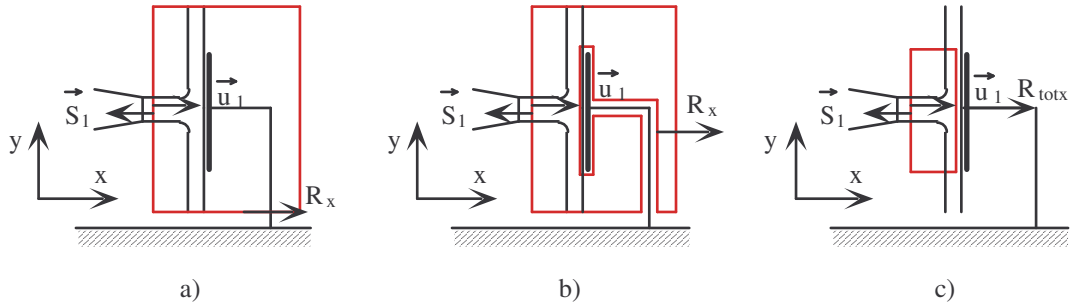
$$U = \frac{dx}{dt} .$$

La velocità di uscita del fluido u_1 dipende dalle geometrie della cavità D_c e del pistone D_i , ΔD , L e dalla velocità del pistone U , cioè dalla legge dello spostamento in funzione del tempo; se la velocità dello stantuffo U rimanesse costante, la velocità del fluido u_1 tenderebbe ad aumentare con l'incremento di S_x fino a raggiungere un valore infinito per $S_x = S_c$, ma bisogna tener presente che in realtà la velocità U tende a diminuire, perché lo stantuffo incontra sempre maggior resistenza nello entrare nella cavità, fino ad annullarsi nel momento in cui lo stantuffo chiude completamente l'entrata della cavità.

6.2.- BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Esercizio 6.2.1

Una certa portata d'acqua esce con moto stazionario da un ugello e colpisce una lastra sottile. La velocità con cui l'acqua lascia l'ugello vale $\bar{u}_1 = 15 \text{ m/s}$ e la sezione dell'ugello vale $S_1 = 0.01 \text{ m}^2$. Assumendo che l'acqua colpisca la lastra in direzione normale e che il deflusso scorra lungo la lastra, calcolare la forza orizzontale sul supporto considerando l'acqua come fluido ideale.



Per quanto riguarda il volume di controllo sono possibili diverse scelte: nella figura sono rappresentate tre di esse colorate in rosso. In tutti tre i casi l'acqua entra nel volume di controllo attraverso una superficie pari a quella dell'ugello ed esce dallo stesso volume in direzione tangente alla lastra nel verso positivo e negativo della y .

Dalla equazione di bilancio della quantità di moto (6.7) per un fluido non viscoso, per un moto stazionario, per un volume di controllo fermo e se si trascura l'influenza del peso del fluido, si ha

$$\int_S \bar{u} \rho \bar{u} d\bar{S} = - \int_S p d\bar{S} + \bar{R}$$

a) In questo caso si è scelto che il volume di controllo attraversi il supporto, che la superficie di sinistra sia uguale alla superficie di destra ($S_s = S_d$) e che la componente R_x della reazione del supporto lungo la superficie di intersezione sia positiva; poiché la pressione esterna è costante e corrisponde alla pressione atmosferica (le forze ad essa relative sono dirette in senso concorde al versore della superficie), lungo x si ha

$$\int_{S_1} u_1 \rho \bar{u} d\bar{S} = p_{\text{atm}} S_s - p_{\text{atm}} S_d + R_x \quad \rightarrow \quad R_x = \int_{S_1} u_1 \rho \bar{u} d\bar{S}$$

dove u_1 è la componente lungo x della velocità $\bar{u}_1$; poiché la velocità e la superficie infinitesima hanno verso discorde se il fluido entra nel volume di controllo e se la massa volumica e la velocità vengono considerate costanti nella sezione, sostituendo i dati del problema, si ha

$$R_x = \int_{S_1} u_1 \rho (-u_1 dS) = -\rho u_1^2 S_1 = -1000 \times 15^2 \times 0.01 = -2250 \text{ N}$$

La reazione del supporto è quindi diretta in senso contrario al getto d'acqua.

b) In questo caso si è scelto che il volume di controllo non attraversi il supporto ma lo avvolga, che la superficie di sinistra sia uguale alla superficie di destra ($S_s = S_d$) e che la componente R_x della reazione del supporto lungo la superficie di contatto sia positiva; si trovano gli stessi risultati del caso a. A questo proposito si può notare che, se la pressione esterna è costante, qualsiasi aspetto geometrico assuma la superficie S del volume di controllo, si verifica sempre che

$$\int_S p d\bar{S} = 0$$

c) In questo caso si è scelto che il volume di controllo sia a contatto con la lastra, che la superficie di sinistra sia uguale alla superficie di destra, che entrambe siano uguali alla superficie della lastra ($S_s = S_d = S_L$) e che la componente R_{totx} della reazione totale della lastra sia positiva; poiché la pressione esterna corrisponde alla pressione atmosferica, lungo la x si ha allora

$$\int_{S_1} u_1 \rho \bar{u} d\bar{S} = p_{\text{atm}} S_s + R_{\text{totx}} \quad \rightarrow \quad R_{\text{totx}} = \int_{S_1} u_1 \rho \bar{u} d\bar{S} - p_{\text{atm}} S_L$$

e, poiché la pressione atmosferica agisce sul retro della lastra, la reazione netta R_x diventa

$$R_x = R_{\text{totx}} + p_{\text{atm}} S_L = \int_{S_1} u_1 \rho \bar{u} d\bar{S}$$

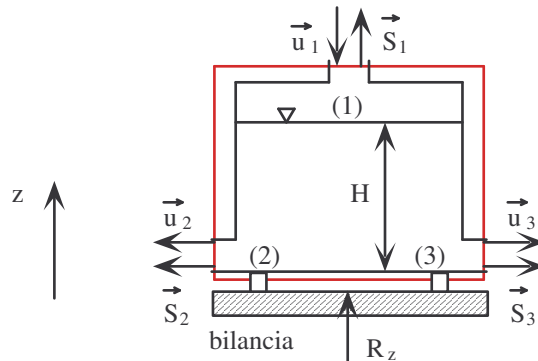
come nei casi a e b.

La forza sul supporto è uguale e contraria alla reazione R_x e vale quindi

$$F_x = -R_x = 2250 \text{ N}.$$

Esercizio 6.2.2

Un recipiente metallico, alto 60 cm e con una sezione cilindrica $S = 0.1 \text{ m}^2$, pesa a vuoto 25 N. Acqua entra attraverso l'apertura superiore di sezione $S_1 = 0.01 \text{ m}^2$ alla velocità $\bar{u}_1 = 6 \text{ m/s}$ ed esce attraverso le aperture laterali aventi la stessa area $S_2 = S_3 = 0.01 \text{ m}^2$. Poiché il contenitore è posto su una bilancia, calcolare la lettura della bilancia quando in condizioni stazionarie la altezza dell'acqua nel contenitore è $H = 55 \text{ cm}$. Il fluido può essere considerato ideale.



Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura è riportata con linee di colore rosso una possibilità), dalla equazione di bilancio della quantità di moto (6.7) per un fluido non viscoso, per un moto stazionario, per un volume di controllo fermo e nel caso in cui la pressione esterna sia costante (integrale della pressione nullo), si ha

$$\int_S \bar{u} \rho \bar{u} d\bar{S} = \bar{R} + \bar{G}_c + \bar{G}_a$$

dove le forze esterne rappresentano rispettivamente: $\bar{R}$ la reazione della bilancia, $\bar{G}_c$ il peso del contenitore e $\bar{G}_a$ il peso dell'acqua in esso contenuta.

Lungo la z si ha

$$\int_{S_1} w_1 \rho \bar{u} d\bar{S} = R_z + G_c + G_a \quad \rightarrow \quad R_z = \int_{S_1} -w_1 \rho \bar{u} d\bar{S} - G_c - G_a$$

dove $-w_1$ è la componente lungo z della velocità di entrata $\bar{u}_1$ e dove le velocità di uscita sono perpendicolari alla z ($w_2 = w_3 = 0$); poiché la velocità e la superficie infinitesima hanno verso discorde se il fluido entra nel volume di controllo, poiché i pesi sono diretti lungo il verso negativo della z e se la massa volumica e la velocità vengono considerate costanti nella sezione, sostituendo i dati del problema, si ha

$$\begin{aligned} R_z &= \int_{S_1} -w_1 \rho (-w_1 dS) + G_c + \rho g S H = \rho w_1^2 S_1 + G_c + \rho g S H = \\ &= 1000 \times 6^2 \times 0.01 + 25 + 1000 \times 9.80665 \times 0.1 \times 0.55 = 360 + 25 + 539 = 924 \text{ N} . \end{aligned}$$

La reazione della bilancia è diretta verso l'alto, mentre la lettura della bilancia

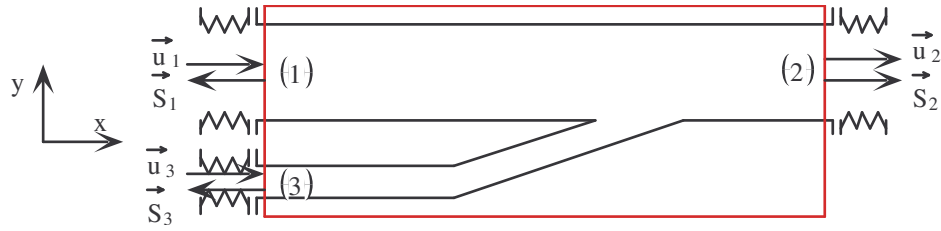
$$F_z = -R_z = -924 \text{ N}$$

è diretta verso il basso.

Esercizio 6.2.3

La diramazione a tre vie, mostrata in pianta nella figura, è collegata a tre tubazioni mediante flange flessibili. Le tubazioni, di diametri $D_1 = D_2 = D = 100 \text{ mm}$ e $d_3 = 25 \text{ mm}$ e nel cui interno scorre acqua, considerata fluido non viscoso, con velocità $u_1 = 2 \text{ m/s}$ e $u_3 = 4 \text{ m/s}$, possono muoversi senza attrito solo lungo la direzione x e presentano le seguenti pressioni assolute: $p_1 = 1.2 \text{ bar}$, $p_2 = 1.1 \text{ bar}$ e $p_3 = 1.5 \text{ bar}$. Calcolare: a) la velocità u_2 nel caso in cui le velocità siano considerate costanti in corrispondenza delle sezioni (1), (2) e (3); b) lo spostamento Δx della diramazione rispetto alla posizione di partenza ($u_1 = u_2 = u_3 = 0$) e con flange flessibili, non precaricate (forza iniziale nulla), aventi una rigidità complessiva pari a $K = 50 \text{ N/mm}$; c) la forza agente sulla diramazione

nella direzione y.



a) Dopo aver scelto un volume di controllo (nella figura è riportata con linee colorate in rosso una possibilità), dal bilancio della massa (6.4) in caso di moto stazionario per un fluido incompressibile si ha

$$\int_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{u} \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0$$

in quanto il fluido passa attraverso le sezioni (1), (2) e (3).

Se la velocità viene considerata costante nelle singole sezioni, si ha

$$\int_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_1} u_1 dS = -u_1 S_1 = -u_1 \frac{\pi D^2}{4} \quad , \quad \int_{S_3} \vec{u} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_3} u_3 dS = -u_3 S_3 = -u_3 \frac{\pi d^2}{4}$$

perché il prodotto scalare è negativo (i vettori della velocità e della superficie infinitesima hanno verso discordante) e

$$\int_{S_2} \vec{u} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} u_2 dS = u_2 S_2 = u_2 \frac{\pi D^2}{4}$$

perché il prodotto scalare è positivo (i vettori della velocità e della superficie infinitesima hanno verso concorde).

L'equazione di bilancio della massa si riduce allora a

$$-u_1 \frac{\pi D^2}{4} + u_2 \frac{\pi D^2}{4} - u_3 \frac{\pi d^2}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad u_2 = u_1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2 u_3 = 2 + \left(\frac{25}{100}\right)^2 \times 4 = 2.25 \frac{m}{s}$$

b) Dal bilancio della quantità di moto (6.7) per un fluido non viscoso, per un moto stazionario e per un volume di controllo fermo si ha

$$\vec{F} = - \int_S \vec{u} \cdot \rho \vec{u} d\vec{S} - \int_S p d\vec{S} + \vec{G}$$

dove $\vec{F}$ è la forza esercitata dal fluido sulle pareti e $\vec{G}$ è il peso del fluido.

Il primo integrale, se la massa volumica e la velocità vengono considerate costanti nelle singole sezioni, lungo la x diventa

$$\begin{aligned} \int_S \vec{u} \cdot \rho \vec{u} d\vec{S} &= \int_{S_1} u_1 \cos\alpha_1 \rho (-u_1 dS) + \int_{S_2} u_2 \cos\alpha_2 \rho (+u_2 dS) + \int_{S_3} u_3 \cos\alpha_3 \rho (-u_3 dS) = \\ &= -\cos\alpha_1 \rho u_1^2 S_1 + \cos\alpha_2 \rho u_2^2 S_2 - \cos\alpha_3 \rho u_3^2 S_3 = \frac{\pi}{4} \rho [(-u_1^2 + u_2^2) D^2 - u_3^2 d^2] \end{aligned}$$

perché $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0^\circ$ e quindi $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \cos\alpha_3 = 1$.

Il secondo integrale, se la pressione viene considerata costante nelle singole sezioni, lungo la x diventa

$$\int_S p d\vec{S} = -\cos\alpha_1 p_1 S_1 + \cos\alpha_2 p_2 S_2 - \cos\alpha_3 p_3 S_3 = \frac{\pi}{4} [(-p_1 + p_2) D^2 - p_3 d^2]$$

perché $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0^\circ$ e quindi $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \cos\alpha_3 = 1$.

L'equazione del bilancio della quantità di moto in direzione x, perché $G_x = 0$, si riduce allora a

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\pi}{4} \rho [(-u_1^2 + u_2^2) D^2 - u_3^2 d^2] - \frac{\pi}{4} [(-p_1 + p_2) D^2 - p_3 d^2] = \\ &= \frac{\pi}{4} [(\rho u_1^2 + p_1 - \rho u_2^2 - p_2) D^2 + (\rho u_3^2 + p_3) d^2] = \\ &= \frac{\pi}{4} \left\{ [1000 \times 2^2 + (120000 - 101325) - 1000 \times 2.25^2 - (110000 - 101325)] \times 0.1^2 + \right. \\ &\quad \left. + [1000 \times 4^2 + (150000 - 101325)] \times 0.025^2 \right\} = 102 \text{ N} \end{aligned}$$

In conclusione lo spostamento Δx è dato da

$$\Delta x = \frac{F_x}{K} = \frac{102}{50} = 2.04 \text{ mm} .$$

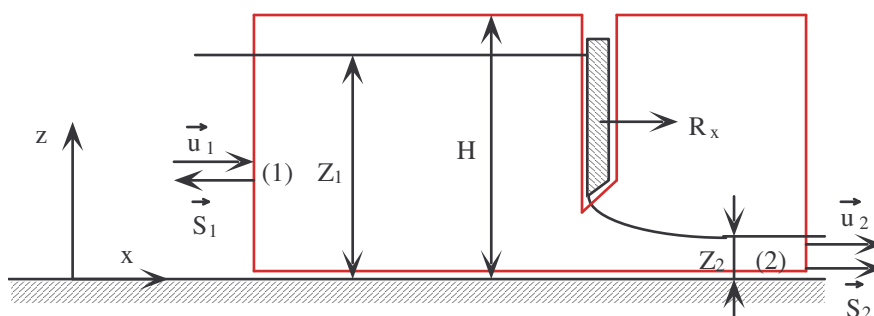
c) L'equazione di bilancio della quantità di moto in direzione y, invece, si annulla

$$F_y = \frac{\pi}{4} \left\{ \left(\rho u_1^2 + p_1 \right) \sin \alpha_1 - \left(\rho u_2^2 - p_2 \right) \sin \alpha_2 \right\} D^2 + \left(\rho u_3^2 + p_3 \right) d^2 \} + G_y = 0$$

perché $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0^\circ$, e quindi $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = \sin \alpha_3 = 0$, e perché $G_y = 0$.

Esercizio 6.2.4

Come rappresentato in figura, l'acqua scorre al di sotto di una paratoia. Il fluido può essere considerato ideale e il moto stazionario con una distribuzione idrostatica della pressione nelle sezioni di passaggio 1 e 2. Calcolare la forza per unità di larghezza esercitata dal fluido sulla paratoia, se $\bar{u}_1 = 0.2 \text{ m/s}$, $\bar{u}_2 = 5.33 \text{ m/s}$, $Z_1 = 1.5 \text{ m}$ e $Z_2 = 0.0563 \text{ m}$. (N.B. Distribuzione idrostatica della pressione significa che la pressione all'interno del fluido dipende esclusivamente dalla legge di Stevin, cioè dalla colonna d'acqua sovrastante.)



Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura è riportata con linee colorate in rosso una possibilità), dalla equazione di bilancio della quantità di moto (6.7) per un fluido non viscoso, per un moto stazionario, per un volume di controllo fermo e se si trascura l'influenza del peso del fluido, si ha

$$\int_S \bar{u} \rho \bar{u} d\bar{S} = - \int_S p d\bar{S} + \bar{R}$$

dove $\bar{R}$ è la reazione della paratoia.

Il primo integrale, se la massa volumica e la velocità vengono considerate costanti nelle singole sezioni, lungo la x diventa

$$\int_S \bar{u} \rho \bar{u} d\bar{S} = \int_{S_1} u_1 \rho (-u_1 dS) + \int_{S_2} u_2 \rho (-u_2 dS) = -\rho u_1^2 Y Z_1 + \rho u_2^2 Y Z_2 = \rho Y (-u_1^2 Z_1 + u_2^2 Z_2)$$

dove Y è la larghezza della paratoia, dove u_1 e u_2 sono le componenti lungo x delle velocità $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_2$ e dove la velocità e la superficie infinitesima hanno verso discorde se il fluido entra nel volume di controllo e verso concorde se il fluido esce.

Il secondo integrale lungo la x diventa invece

$$\int_S p d\bar{S} = \int_{S_1} p d\bar{S} + \int_{S_2} p d\bar{S} = - \int_0^{Z_1} p_1 Y dz + \int_0^{Z_2} p_2 Y dz$$

dove le forze della pressione sono dirette in senso concorde al versore della superficie e dove la pressione atmosferica dell'ambiente esterno circostante è considerata costante

$$\int_S p_{atm} d\bar{S} = 0 .$$

Poiché la distribuzione idrostatica della pressione, relativa alla pressione atmosferica, vale

$$p = -\rho g (z - Z) ,$$

le forze dovute alla pressione diventano

$$\int_S p d\bar{S} = \int_0^{Z_1} \rho g (z - Z_1) Y dz - \int_0^{Z_2} \rho g (z - Z_2) Y dz =$$

$$= \rho g Y \left[\frac{z^2}{2} - Z_1 z \right]_0^{Z_1} - \rho g Y \left[\frac{z^2}{2} - Z_2 z \right]_0^{Z_2} = \frac{\rho g Y}{2} (Z_2^2 - Z_1^2).$$

Infine la reazione per unità di larghezza diventa

$$R_x = \rho Y (-u_1^2 Z_1 + u_2^2 Z_2) + \frac{\rho g Y}{2} (Z_2^2 - Z_1^2) \rightarrow \frac{R_x}{Y} = \rho (-u_1^2 Z_1 + u_2^2 Z_2) + \frac{\rho g}{2} (Z_2^2 - Z_1^2) =$$

$$= 1000 \times (-0.2^2 \times 1.5 + 5.33^2 \times 0.0563) + \frac{1000 \times 9.80665}{2} \times (0.0563^2 - 1.5^2) = 1539 - 11020 = -9480 \frac{N}{m}$$

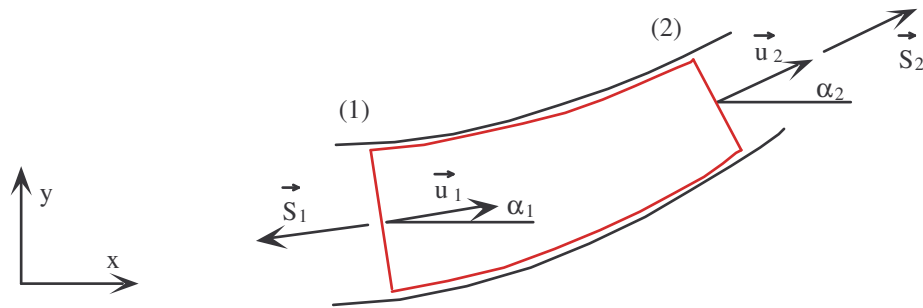
ed è diretta verso sinistra, mentre la spinta per unità di larghezza della paratoia diventa

$$\frac{F_x}{Y} = -\frac{R_x}{Y} = 9480 \frac{N}{m}$$

ed è diretta verso destra.

Esercizio 6.2.5

Determinare le forze che un fluido non viscoso esercita sulla tubazione generica fra le sezioni (1) e (2) in caso di moto stazionario.



Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura è riportata con linee di colore rosso una possibilità), dalla equazione di bilancio della quantità di moto (6.8) per un fluido non viscoso, per un moto stazionario e per un volume di controllo fermo, si ha

$$\vec{F} = - \int_S \vec{u} \rho \vec{u} d\vec{S} - \int_S p d\vec{S} + \vec{G}$$

dove $\vec{F}$ è la forza esercitata dal fluido sulle pareti e $\vec{G}$ è il peso del fluido.

Il primo integrale, se la massa volumica e la velocità vengono considerate costanti nelle singole sezioni, lungo la x e lungo la y rispettivamente diventa

$$\int_S \vec{u} \rho \vec{u} d\vec{S} = \int_{S_1} u_1 \cos \alpha_1 \rho_1 (-u_1 dS) + \int_{S_2} u_2 \cos \alpha_2 \rho_2 (+u_2 dS) = -\cos \alpha_1 \rho_1 u_1^2 S_1 + \cos \alpha_2 \rho_2 u_2^2 S_2$$

$$\int_S \vec{u} \rho \vec{u} d\vec{S} = \int_{S_1} u_1 \sin \alpha_1 \rho_1 (-u_1 dS) + \int_{S_2} u_2 \sin \alpha_2 \rho_2 (+u_2 dS) = -\sin \alpha_1 \rho_1 u_1^2 S_1 + \sin \alpha_2 \rho_2 u_2^2 S_2$$

dove $u_1 \cos(\alpha_1)$ e $u_2 \cos(\alpha_2)$ sono le componenti lungo la x e $u_1 \sin(\alpha_1)$ e $u_2 \sin(\alpha_2)$ lungo la y della velocità $\vec{u}$ e dove la velocità e la superficie infinitesima hanno verso discorde se il fluido entra nel volume di controllo e verso concorde se il fluido esce.

Il secondo integrale, se la pressione viene considerata costante nelle singole sezioni, lungo la x e lungo la y rispettivamente diventa

$$\int_S p d\vec{S} = -\cos \alpha_1 p_1 S_1 + \cos \alpha_2 p_2 S_2$$

$$\int_S p d\vec{S} = -\sin \alpha_1 p_1 S_1 + \sin \alpha_2 p_2 S_2$$

dove le forze della pressione sono dirette in senso concorde al versore della superficie e dove si è considerata costante la pressione atmosferica dell'ambiente esterno; le pressioni p_1 e p_2 sono quindi relative, cioè riferite all'atmosfera.

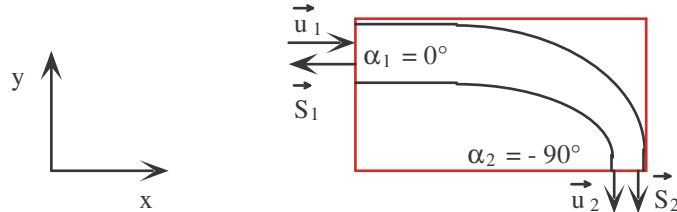
Le componenti della forza esercitata sulla tubazione diventano allora

$$\text{in } x \quad F_x = - \left[-\cos \alpha_1 (\rho_1 u_1^2 + p_1) S_1 + \cos \alpha_2 (\rho_2 u_2^2 + p_2) S_2 \right] \quad (A)$$

$$\text{in } y \quad F_y = - \left[-\sin\alpha_1 (\rho_1 u_1^2 + p_1) S_1 + \sin\alpha_2 (\rho_2 u_2^2 + p_2) S_2 \right]. \quad (B)$$

Esercizio 6.2.6

Il tubo a gomito di 90° rappresentato in figura viene percorso da acqua. All'ingresso la pressione vale $p_1 = 221 \text{ kPa}$ assoluti e la sezione è $S_1 = 0.01 \text{ m}^2$, mentre all'uscita la pressione corrisponde a quella atmosferica, la velocità vale $\bar{u}_2 = 16 \text{ m/s}$ e la sezione è $S_2 = 0.0025 \text{ m}^2$. Calcolare la forza necessaria per mantenere il tubo a gomiti al suo posto.



Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura è riportata con linee di colore rosso una possibilità), dalla equazione di bilancio della massa (6.4) per un fluido incompressibile e dalla equazione di bilancio della quantità di moto (6.8) per un fluido non viscoso, per un moto stazionario e per un volume di controllo fermo e non dipendente dal tempo, si ha

$$\int_S \bar{u} d\bar{S} = 0, \quad \vec{F} = - \int_S \bar{u} \rho \bar{u} d\bar{S} - \int_S p d\bar{S} + \vec{G}$$

dove $\vec{F}$ è la forza esercitata dal fluido sulle pareti e $\vec{G}$ è il peso del fluido.

Il bilancio della massa, se la velocità viene considerata costante nelle singole sezioni, dà

$$\int_{S_1} \bar{u} d\bar{S} + \int_{S_2} \bar{u} d\bar{S} = -u_1 S_1 + u_2 S_2 = 0 \quad \rightarrow \quad u_1 = \frac{S_2}{S_1} u_2 = \frac{0.0025}{0.01} \times 16 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

dove la velocità e la superficie infinitesima hanno verso discorde se il fluido entra nel volume di controllo e verso concorde se il fluido esce.

L'equazione di bilancio della quantità di moto, in base alle (A) e (B) dell'esercizio 6.2.5 e se la massa volumica e la velocità vengono considerate costanti nelle singole sezioni, nelle due direzioni dà invece

$$\begin{aligned} F_x &= - \left[-\cos\alpha_1 (\rho_1 u_1^2 + p_1) S_1 + \cos\alpha_2 (\rho_2 u_2^2 + p_2) S_2 \right] = \\ &= - \left[-1 \times (1000 \times 4^2 + (221000 - 101325)) \times 0.01 + 0 \right] = 1360 \text{ N} \\ F_y &= - \left[-\sin\alpha_1 (\rho_1 u_1^2 + p_1) S_1 + \sin\alpha_2 (\rho_2 u_2^2 + p_2) S_2 \right] + G_y = \\ &= - \left[-0 + (-1) \times (1000 \times 16^2 + 0) \times 0.0025 \right] + 1000 \times (-9.80665) \times V = (640 - 9800 \times V) \text{ N} \end{aligned}$$

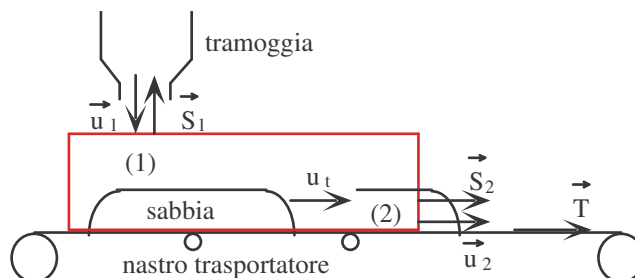
dove V è il volume (non conosciuto) dell'acqua contenuta nel tubo. L'azione del fluido spinge quindi il tubo senza dubbio verso destra e verso l'alto solo se il volume del fluido è trascurabile.

La forza necessaria per mantenere il tubo a gomiti al suo posto vale invece

$$R_x = -F_x = -1360 \text{ N}, \quad R_y = -F_y = (-640 + 9800 \times V) \text{ N}$$

Esercizio 6.2.7

Il nastro di un trasportatore orizzontale si muove alla velocità costante $u_t = 0.9 \text{ m/s}$ e riceve da una tramoggia una portata massica $G_m = 250 \text{ kg/s}$ di sabbia che cade verticalmente (vedi figura). Se si trascurano gli attriti e se inizialmente il nastro trasportatore è vuoto, trovare la forza necessaria per spingerlo mentre si riempie di sabbia.



Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura è riportata con linee di colore rosso una possibilità), dalla equazione di bilancio della quantità di moto (6.6) per un fluido non viscoso, per un volume di controllo fermo e se la pressione esterna è costante (integrale della pressione nullo), si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{u} \rho dV + \int_S \bar{u} \rho \bar{u} d\bar{S} = \bar{T}$$

dove $\bar{T}$ è la forza di trazione agente dall'esterno sul volume V .

Se attraverso la sezione (2) non passa ancora sabbia, lungo la x si ha

$$T_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_V u_t \rho dV$$

dove $u_1 = 0$ perché perpendicolare alla x , dove $u_2 = 0$ perché non c'è ancora portata e dove u_t è la velocità della sabbia all'interno del volume di controllo. La forza di trazione diventa allora

$$T_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_V u_t \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} (u_t m_s) = u_t \frac{\partial m_s}{\partial t} = u_t G_m = 0.9 \times 250 = 225 \text{ N}$$

dove la velocità u_t è costante e dove m_s è la massa della sabbia nel volume di controllo.

Se attraverso la sezione (2) esce la sabbia che entra attraverso la sezione (1), lungo la x si ha

$$T_x = \int_{S_2} u_t \rho \bar{u} d\bar{S}$$

dove la quantità di sabbia all'interno del volume di controllo non varia nel tempo (il moto diventa stazionario), dove $u_1 = 0$ perché perpendicolare alla x e dove $u_2 = u_t$ è la velocità della sabbia che lascia il volume di controllo. Se la massa volumica e la velocità vengono considerate costanti nella sezione, la forza di trazione diventa

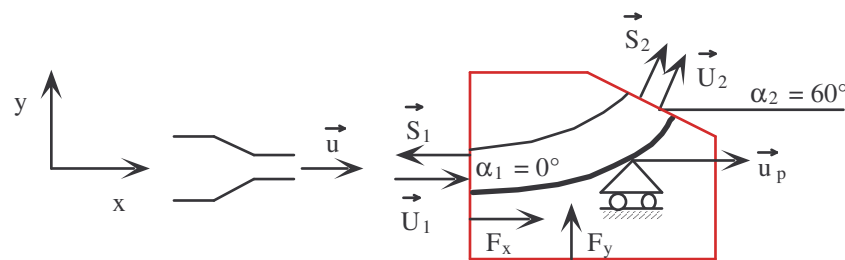
$$T_x = \int_{S_2} u_t \rho \bar{u} d\bar{S} = u_t \int_{S_2} \rho \bar{u} d\bar{S} = u_t G_m = 0.9 \times 250 = 225 \text{ N}$$

in base alla definizione di portata massica e perché la velocità e la superficie infinitesima hanno verso concorde se il fluido esce dal volume di controllo.

In entrambi gli approcci si ottiene lo stesso risultato.

Esercizio 6.2.8

Una paletta si muove con velocità costante $\bar{u}_p = 10 \text{ m/s}$ e riceve un getto d'acqua che esce da un ugello di sezione $S_1 = 0.003 \text{ m}^2$ con moto stazionario e con velocità $\bar{u} = 30 \text{ m/s}$. Calcolare la forza che deve essere applicata alla paletta per mantenere la sua velocità costante.



Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura è riportata con linee di colore rosso una possibilità), dalla equazione bilancio della massa (6.4) per un fluido incompressibile e dalla equazione di bilancio della quantità di moto (6.8) per un fluido non viscoso, per un moto stazionario e per un volume di controllo in moto con la paletta e non dipendente dal tempo, se la pressione esterna è costante (integrale della pressione nullo) e se si trascura il peso del fluido, si ha

$$\int_S \bar{U} d\bar{S} = 0, \quad \bar{F} = - \int_S \bar{U} \rho \bar{U} d\bar{S}$$

dove $\bar{F}$ è la forza esercitata dal fluido sulla paletta e $\bar{U}$ è la velocità del fluido rispetto al volume di controllo in moto solidale con la paletta.

L'equazione di bilancio della massa, se la velocità viene considerata costante nelle singole sezioni, dà

$$\int_{S_1} \vec{U} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{U} d\vec{S} = -U_1 S_1 + U_2 S_2 = 0 \quad \rightarrow \quad U_2 = \frac{S_1}{S_2} U_1 = U_1$$

dove la velocità e la superficie infinitesima hanno verso discorde se il fluido entra nel volume di controllo e verso concorde se il fluido esce e perché, trascurando le dissipazioni, risulta $S_2 = S_1$; la velocità relativa è quindi

$$U_2 = U_1 = u - u_p = 30 - 10 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

L'equazione di bilancio della quantità di moto, in base alle (A) e (B) dell'esercizio 6.2.5 e dopo aver tolto la pressione e aver trascurato il peso del fluido, se la massa volumica e la velocità vengono considerate costanti nelle singole sezioni, nelle due direzioni dà invece

$$F_x = - \left(-\cos\alpha_1 \rho_1 U_1^2 S_1 + \cos\alpha_2 \rho_2 U_2^2 S_2 \right) = - \left(-1 \times 1000 \times 20^2 \times 0.003 + 0.5 \times 1000 \times 20^2 \times 0.003 \right) = 600 \text{ N}$$

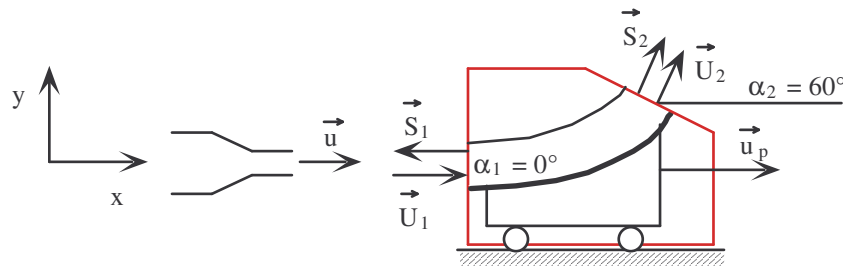
$$F_y = - \left(-\sin\alpha_1 \rho_1 U_1^2 S_1 + \sin\alpha_2 \rho_2 U_2^2 S_2 \right) = - \left(0 + 0.866 \times 1000 \times 20^2 \times 0.003 \right) = -1040 \text{ N} .$$

La forza necessaria per mantenere costante la velocità della paletta (e che corrisponde alla forza assorbita dal sistema collegato alla paletta) vale invece

$$R_x = -F_x = -600 \text{ N} \quad , \quad R_y = -F_y = 1040 \text{ N} .$$

Esercizio 6.2.9

Una paletta è resa solidale ad un carrello che può scorrere su un binario orizzontale. Se si trascurano gli attriti e la resistenza dell'aria, se la massa del sistema carrello più paletta è $m = 75 \text{ kg}$ e se la paletta viene spinta da un getto d'acqua orizzontale uscente alla velocità di $u = 35 \text{ m/s}$ da un ugello di sezione $S = 0.003 \text{ m}^2$, trovare la velocità u_p del carrello in funzione del tempo e diagrammare il risultato.



Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura è riportata con linee di colore rosso una possibilità), dalla equazione di bilancio della massa (6.4) per un fluido incompressibile e dalla equazione di bilancio della quantità di moto (6.8) per un fluido non viscoso, per un moto stazionario e per un volume di controllo in moto con la paletta e dipendente dal tempo, se la pressione esterna è costante (integrale della pressione nullo) e se si trascura il peso del fluido, si ha

$$\int_S \vec{U} d\vec{S} = 0 \quad , \quad \int_S \vec{U} \rho \vec{U} d\vec{S} = -m \vec{a}$$

dove $\vec{U}$ è la velocità del fluido rispetto al volume di controllo in moto solidale con la paletta e $\vec{a}$ è l'accelerazione del sistema.

L'equazione di bilancio della massa, se la velocità viene considerata costante nelle singole sezioni, dà

$$\int_{S_1} \vec{U} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{U} d\vec{S} = -U_1 S_1 + U_2 S_2 = 0 \quad \rightarrow \quad U_2 = \frac{S_1}{S_2} U_1 = U_1$$

dove la velocità e la superficie infinitesima hanno verso discorde se il fluido entra nel volume di controllo e verso concorde se il fluido esce e perché, trascurando le dissipazioni, risulta $S = S_1 = S_2$; la velocità relativa è allora

$$U = U_1 = U_2 = u - u_p .$$

L'equazione di bilancio della quantità di moto, se la massa volumica e la velocità vengono considerate costanti nelle singole sezioni, nella direzione x dà invece

$$\int_{S_1} U_1 \cos\alpha_1 \rho (-U_1 dS) + \int_{S_2} U_2 \cos\alpha_2 \rho (U_2 dS) + m a_x = -\cos\alpha_1 \rho U_1^2 S_1 + \cos\alpha_2 \rho U_2^2 S_2 + m a_x =$$

$$= \rho (u - u_p)^2 S (-\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) + m \frac{du_p}{dt} = 0$$

dove $U_1 \cdot \cos(\alpha_1)$ e $U_2 \cdot \cos(\alpha_2)$ sono le componenti lungo la x della velocità $\vec{U}$, dove la velocità e la superficie infinitesima hanno verso discorde se il fluido entra nel volume di controllo e verso concorde se il fluido esce e dove a_x è l'accelerazione del sistema carrello - paletta lungo la x

$$a_x = \frac{du_p}{dt}.$$

Separando le variabili si ha

$$\frac{du_p}{(u - u_p)^2} = \frac{\rho S (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)}{m} dt = A dt;$$

poiché la velocità u è costante, si ha

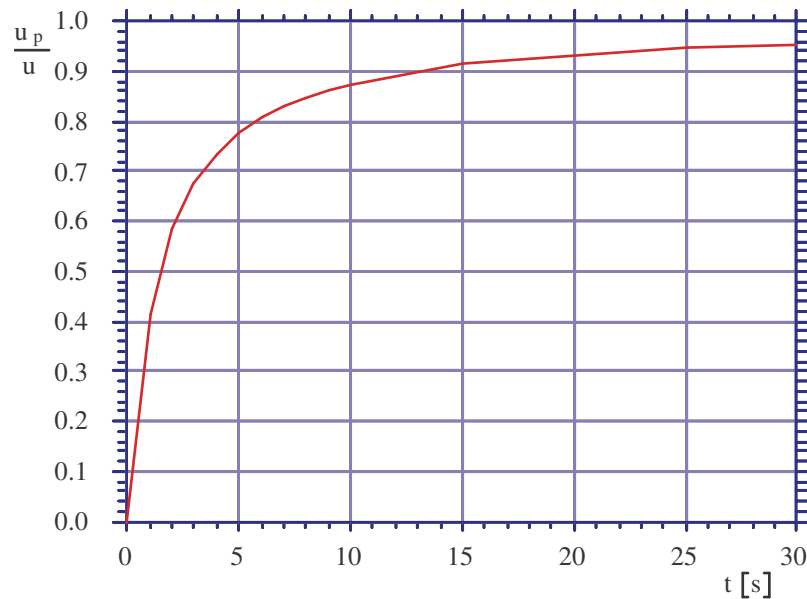
$$u A = u \frac{\rho S (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)}{m} = 35 \times \frac{1000 \times 0.003 \times [\cos(0^\circ) - \cos(60^\circ)]}{75} = 0.7$$

e, integrando fra i limiti $u_p = 0$ per $t = 0$ e $u_p = u_p$ per $t = t$, si ha

$$\int_0^{u_p} \frac{d(u - u_p)}{(u - u_p)^2} = \int_0^t A dt \quad \rightarrow \quad \left[\frac{1}{u - u_p} \right]_0^{u_p} = A [t]_0^t \quad \rightarrow \quad \frac{1}{u - u_p} - \frac{1}{u} = A t \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{u_p}{u(u - u_p)} = A t \quad \rightarrow \quad \frac{u_p}{u} = \frac{u A t}{1 + u A t} = \frac{0.7 t}{1 + 0.7 t}.$$

La legge della velocità u_p del carrello, rapportata a quella u del getto, è riportata nel diagramma seguente.



Esercizio 6.2.10

Il moto dell'acqua che scorre all'interno del tubo convergente mostrato in figura è laminare. Le dimensioni sono: diametro di entrata $D_1 = 220$ mm, diametro di uscita $D_2 = 120$ mm e lunghezza $L = 500$ mm; le pressioni assolute sono: all'entrata $p_1 = 0.103$ MPa e all'uscita $p_2 = p_{atm}$; infine la portata volumetrica circolante è $G_v = 0.025$ m³/s. Si chiede di: a) calcolare le velocità medie (w_{m1} , w_{m2}) e massime (w_{max1} , w_{max2}) nelle sezioni di entrata e di uscita; b) trovare la legge della velocità $w(r,z)$ in funzione della porta e delle dimensioni geometriche; c) calcolare la velocità $w(r/2, L/2)$ a metà del tubo e a metà del raggio; calcolare la forza che l'acqua, considerata come fluido non viscoso, esercita sul tubo.

[Suggerimenti: la legge del diametro in funzione della distanza z dalla sezione di entrata è

$$D(z) = D_1 - (D_1 - D_2) \frac{z}{L};$$

la legge della pressione in funzione della distanza z dalla sezione di entrata è

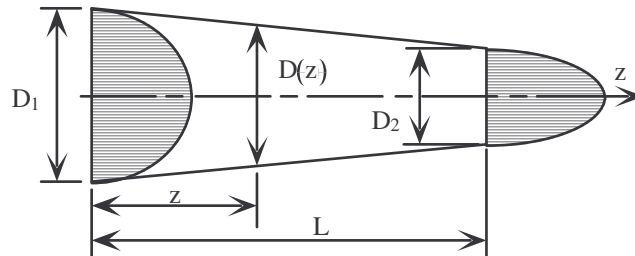
$$p(z) = (p_1 - p_{atm}) \left(1 - \frac{z}{L}\right);$$

la legge della velocità in funzione della distanza dall'asse r e della distanza z dalle sezione di entrata è

$$w(r, z) = w_{\max}(z) \left[1 - \left(\frac{r}{R(z)}\right)^2\right] = w_{\max}(z) \left[1 - \left(\frac{2r}{D(z)}\right)^2\right];$$

la relazione fra velocità media e velocità massima in una data sezione è

$$w_{\max}(z) = 2 w_m(z).$$



a) Dalla definizione di portata volumetrica (3.4) si ha

$$w_{m1} = \frac{G_v}{S_1} = \frac{G_v}{\frac{\pi D_1^2}{4}} = \frac{0.025}{\frac{\pi \times 0.22^2}{4}} = 0.6577 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad w_{m2} = \frac{G_v}{S_2} = \frac{G_v}{\frac{\pi D_2^2}{4}} = \frac{0.025}{\frac{\pi \times 0.12^2}{4}} = 2.210 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e quindi

$$w_{\max 1} = 2 w_{m1} = 2 \times 0.6577 = 1.32 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad w_{\max 2} = 2 w_{m2} = 2 \times 2.210 = 4.42 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

b) Sempre dalla definizione di portata volumetrica (3.4) si ha

$$G_v = w_m(z) S(z) = \frac{w_{\max}(z)}{2} S(z) = \frac{w(r, z)}{2 \left[1 - \left(\frac{2r}{D(z)}\right)^2\right]} \frac{\pi D(z)^2}{4} \rightarrow w(r, z) = G_v \frac{8 \left[1 - \left(\frac{2r}{D(z)}\right)^2\right]}{\pi D(z)^2}.$$

c) In corrispondenza della coordinata assiale

$$z = \frac{L}{2} = \frac{500}{2} = 250 \text{ mm},$$

in cui il diametro vale

$$D(z) = D_1 - (D_1 - D_2) \frac{z}{L} = 220 - (220 - 120) \times \frac{250}{500} = 170 \text{ mm},$$

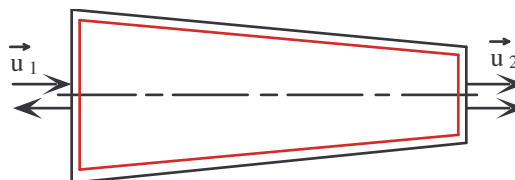
e in corrispondenza della coordinata e radiale

$$r = \frac{1}{2} \frac{D(z)}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{170}{2} = 42.5 \text{ mm}$$

si ha

$$w(r, z) = G_v \frac{8 \left[1 - \left(\frac{2r}{D(z)}\right)^2\right]}{\pi D(z)^2} = 0.025 \times \frac{8 \left[1 - \left(\frac{2 \times 0.04250}{0.17}\right)^2\right]}{\pi \times 0.170^2} = 1.65 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

d) Dapprima si sceglie un volume di controllo (nella figura è riportata con linee colorate in rosso una possibilità).



Dal bilancio della quantità di moto (6.7) per un fluido non viscoso, per un moto stazionario e per un volume di controllo fermo, si ha

$$\vec{F} = - \int_S \vec{u} \rho \vec{u} d\vec{S} - \int_S p d\vec{S} + \vec{G}$$

dove $\vec{F}$ è la forza esercitata dal fluido sulle pareti e $\vec{G}$ è il peso del fluido. Data la simmetria del sistema, si sviluppa una forza solo lungo la direzione z.

Il primo integrale lungo la z diventa

$$\int_S \vec{u} \rho \vec{u} d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{u} \rho \vec{u} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{u} \rho \vec{u} d\vec{S}$$

in quanto il fluido passa attraverso le sezioni (1) e (2). Se la massa volumica viene considerata costante nelle singole sezioni, si ha

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \vec{u} \rho \vec{u} d\vec{S} &= \int_{S_1} u_1 \cos\alpha_1 \rho (-u_1 dS) = -\rho \cos\alpha_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} u_1^2 r dr d\varphi = \\ &= -2\pi \rho \cos\alpha_1 \int_0^{R_1} \left\{ G_v \frac{8 \left[1 - \left(\frac{2r}{D_1} \right)^2 \right]^2}{\pi D_1^2} \right\} r dr = \\ &= -2\pi \rho \cos\alpha_1 \frac{G_v^2 8^2}{\pi^2 D_1^4} \left(\int_0^{R_1} r dr - \frac{8}{D_1^2} \int_0^{R_1} r^3 dr + \frac{16}{D_1^4} \int_0^{R_1} r^5 dr \right) = \\ &= -\frac{128 \rho \cos\alpha_1 G_v^2 D_1^2}{\pi D_1^4} = -\frac{16}{3\pi} \rho \cos\alpha_1 \frac{G_v^2}{D_1^2} = -\frac{16}{3 \times \pi} \times 1000 \times \cos(0^\circ) \times \frac{0.025^2}{0.22^2} = -21.92 \text{ N} \end{aligned}$$

perché il prodotto scalare è negativo (i versori della velocità e della superficie infinitesima hanno verso discordo) e

$$\int_{S_2} \vec{u} \rho \vec{u} d\vec{S} = \dots = \frac{16}{3\pi} \rho \cos\alpha_2 \frac{G_v^2}{D_2^2} = \frac{16}{3 \times \pi} \times 1000 \times \cos(0^\circ) \times \frac{0.025^2}{0.12^2} = 73.68 \text{ N}$$

perché il prodotto scalare è positivo (i versori della velocità e della superficie infinitesima hanno verso concorde).

[Nota. Se si fosse presa costante nelle singole sezioni anche la velocità, si sarebbe ottenuto

$$\int_{S_1} \vec{u} \rho \vec{u} d\vec{S} = \int_{S_1} u_{m1} \cos\alpha_1 \rho (-u_{m1} dS) = -\rho \cos\alpha_1 u_{m1}^2 \frac{\pi D_1^2}{4} = -1000 \times \cos(0^\circ) \times 0.6577^2 \times \frac{\pi \times 0.22^2}{4} = -16.44 \text{ N}$$

perché il prodotto scalare è negativo (i versori della velocità e della superficie hanno verso discordo) e

$$\int_{S_2} \vec{u} \rho \vec{u} d\vec{S} = \int_{S_2} u_{m2} \cos\alpha_2 \rho (+u_{m2} dS) = +\rho \cos\alpha_2 u_{m2}^2 \frac{\pi D_2^2}{4} = +1000 \times \cos(0^\circ) \times 2.210^2 \times \frac{\pi \times 0.12^2}{4} = +55.24 \text{ N}$$

perché il prodotto scalare è positivo (i versori della velocità e della superficie hanno verso concorde). Gli errori percentuali sono quindi rispettivamente

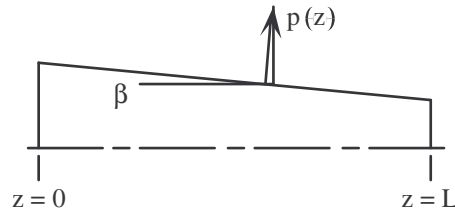
$$\frac{-21.92 - (-16.44)}{-21.92} = 25 \% \quad , \quad \frac{73.68 - 55.24}{73.68} = 25 \% \quad .]$$

Il secondo integrale lungo la z diventa

$$\int_S p d\vec{S} = \int_{S_1} p d\vec{S} + \int_{S_2} p d\vec{S} + \int_{S_M} p d\vec{S}$$

in quanto il fluido agisce sulle sezioni (1) e (2) e sul mantello M del tubo. Se la pressione viene considerata costante nelle sezioni (1) e (2), si ha

$$\begin{aligned} \int_{S_1} p d\vec{S} &= -\frac{\pi}{4} \cos\alpha_1 p_1 D_1^2 = -\frac{\pi}{4} \times \cos(0^\circ) \times (102000 - 101325) \times 0.22^2 = -25.66 \text{ N} \\ \int_{S_2} p d\vec{S} &= +\frac{\pi}{4} \cos\alpha_2 p_2 D_2^2 = +\frac{\pi}{4} \times \cos(0^\circ) \times (101325 - 101325) \times 0.12^2 = 0 \text{ N} \end{aligned}$$



Sul mantello, invece, dove l'angolo di inclinazione β (vedi figura) è dato da

$$\sin\beta = \frac{D_1 - D_2}{2L} = \frac{0.22 - 0.12}{2 \times 0.5} = 0.10 \quad \rightarrow \quad \beta = 5.74^\circ ,$$

si ha

$$\begin{aligned} \int_{S_M} p(z) d\vec{S} &= \int_0^L p(z) \sin\beta \pi D(z) dz = \int_0^L (p_1 - p_{atm}) \left(1 - \frac{z}{L}\right) \sin\beta \pi \left[D_1 - (D_1 - D_2) \frac{z}{L} \right] dz = \\ &= (p_1 - p_{atm}) \sin\beta \pi \left[D_1 \int_0^L dz - \frac{2D_1 - D_2}{L} \int_0^L z dz + \frac{D_1 - D_2}{L^2} \int_0^L z^2 dz \right] = \\ &= (p_1 - p_{atm}) \sin\beta \pi L \left(D_1 - \frac{2D_1 - D_2}{2} + \frac{D_1 - D_2}{3} \right) = (p_1 - p_{atm}) \sin\beta \pi L \left(\frac{D_1}{3} + \frac{D_2}{6} \right) = \\ &= (102000 - 101325) \times 0.10 \times \pi \times 0.5 \times \left(\frac{0.22}{3} + \frac{0.12}{6} \right) = 9.896 \text{ N} . \end{aligned}$$

L'equazione del bilancio della quantità di moto in direzione z , perché $G_z = 0$, si riduce allora a

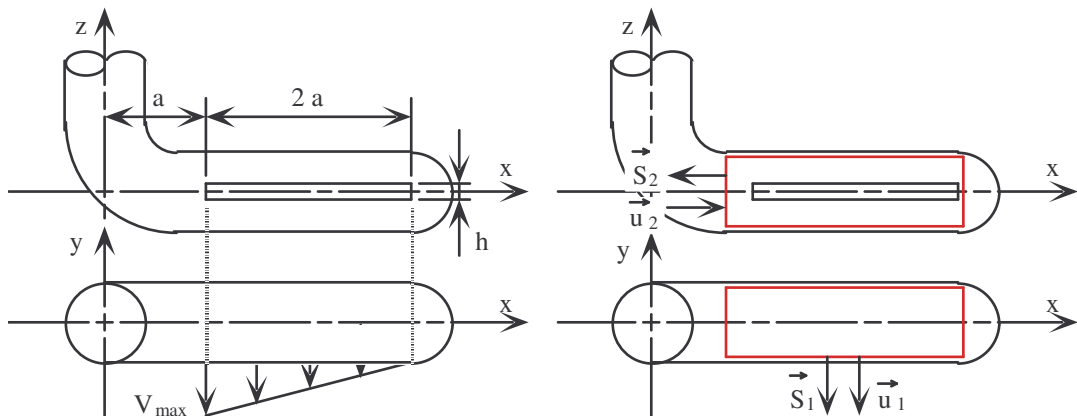
$$\vec{F} = - \int_S \vec{u} \rho \vec{u} d\vec{S} - \int_S p d\vec{S} + \vec{G} \quad \rightarrow \quad F_z = 21.92 - 73.68 + 25.66 - 0 - 9.896 = -36.0 \text{ N} .$$

L'azione esercitata dall'acqua sul tubo convergente è quindi diretta lungo l'asse del tubo stesso nel verso contrario al flusso; è ben noto, infatti, che le lance antincendio tendono a portare all'indietro i pompieri che le sorreggono.

Esercizio 6.2.11

Il tubo mostrato in figura ha nella sua parte orizzontale una fessura, partente dalla posizione $a = 50 \text{ mm}$, di altezza $h = 5 \text{ mm}$ e di larghezza $2a$, attraverso cui esca una portata d'acqua pari a $G_v = 0.25 \text{ litri/s}$ con una velocità linearmente proporzionale alla coordinata x . Nel caso in cui le forze viscose siano trascurate, calcolare: a) la velocità massima $V_{\max}$; b) il momento torcente M_a rispetto all'asse z esercitato dal fluido sul tubo; c) la forza F esercitata dal fluido sul tubo; d) il braccio b della forza.

[Suggerimento: l'equazione di bilancio del momento della quantità di moto è semplicemente ottenuto moltiplicando l'equazione di bilancio della quantità di moto per il braccio rispetto all'asse.]



- a) La legge della velocità, essendo lineare, all'uscita della fessura è data dalla relazione

$$v(x) = -(p x + q) \quad \text{per} \quad a \leq x \leq 3a ,$$

in cui le costanti p e q sono determinate dalle condizioni al contorno

$$\begin{aligned} v|_{x=3a} &= 0 & \rightarrow & - (p \cdot 3a + q) = 0 & \rightarrow & -p \cdot 3a - V_{\max} + p \cdot a = 0 & \rightarrow & p = -\frac{V_{\max}}{2a} \\ v|_{x=a} &= -V_{\max} & \rightarrow & - (p \cdot a + q) = -V_{\max} & \rightarrow & q = V_{\max} - p \cdot a & \rightarrow & q = V_{\max} + \frac{V_{\max}}{2} = \frac{3}{2} V_{\max} \end{aligned} ;$$

la legge della velocità assume allora l'espressione seguente

$$v(x) = - (p \cdot x + q) = -\frac{V_{\max}}{2a} x - \frac{3}{2} V_{\max} = \frac{V_{\max}}{2} \left(\frac{x}{a} - 3 \right) .$$

La portata volumetrica diventa allora

$$\begin{aligned} G_v &= \int_a^{3a} \int_0^h v(x) dx dy = h \int_a^{3a} \frac{V_{\max}}{2} \left(\frac{x}{a} - 3 \right) dx = \\ &= \frac{V_{\max}}{2} h \left(\frac{1}{a} \int_a^{3a} x dx - 3 \int_a^{3a} dx \right) = \frac{V_{\max}}{2} h \left(\frac{1}{a} 4a^2 - 6a \right) = -V_{\max} h a . \end{aligned}$$

[Nota. Dato l'andamento lineare della velocità, la portata può essere trovata come prodotto della velocità media V_m per l'area S della sezione di passaggio

$$G_v = -V_m S = -\frac{V_{\max} + V_{\min}}{2} h \cdot 2a = -V_{\max} h a .]$$

Allora la velocità massima diventa

$$V_{\max} = \frac{G_v}{h a} = \frac{0.00025}{0.005 \times 0.05} = 1 \frac{m}{s}$$

e la legge della velocità può essere scritta anche in funzione della portata volumetrica

$$v(x) = \frac{V_{\max}}{2} \left(\frac{x}{a} - 3 \right) = -\frac{G_v}{2 h a} \left(\frac{x}{a} - 3 \right) .$$

b) Dopo aver scelto un volume di controllo (nella figura è riportata con linee colorate in rosso una possibilità), dal bilancio del momento della quantità di moto (6.10) per un fluido non viscoso, per un moto stazionario e per un volume di controllo fermo e se la pressione esterna è costante (integrale della pressione nullo), si ha

$$\int_S \vec{x} \times \vec{u} \rho \vec{u} d\vec{S} + \vec{M}_a = 0$$

dove $\vec{x}$ è la distanza dell'elemento infinitesimo di area $d\vec{S}$ dall'asse di rotazione. Considerando l'equilibrio attorno all'asse z , l'integrale è differente da zero solo nel tratto di superficie esterna corrispondente alla fessura $\vec{S}_1$, perché nel tratto corrispondente alla tubazione $\vec{S}_2$ il momento attorno a z è nullo dato che il seno dell'angolo α , compreso fra $\vec{x}$ e $\vec{u}$, vale

$$\sin \alpha = \sin(180^\circ) = 0 .$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_S \vec{x} \times \vec{u} \rho \vec{u} d\vec{S} &= \int_0^h \int_a^{3a} \sin(-90^\circ) x u(x) \rho [u(x) dx] dz = -\rho \frac{V_{\max}^2}{4} h \int_a^{3a} \left(\frac{x}{a} - 3 \right)^2 x dx = \\ &= -\rho \frac{V_{\max}^2}{4} h \int_a^{3a} \left(\frac{x^3}{a^2} - 6 \frac{x^2}{a} + 9x \right) dx = -\rho \frac{V_{\max}^2}{4} h (20a^2 - 52a^2 + 36a^2) = -\rho V_{\max}^2 h a^2 \end{aligned}$$

e quindi

$$\vec{M}_a = - \int_S \vec{x} \times \vec{u} \rho \vec{u} d\vec{S} = \rho V_{\max}^2 h a^2 = 1000 \times 1^2 \times 0.005 \times 0.05^2 = 0.0125 \text{ N.m} ;$$

il momento è positivo e farebbe ruotare in senso orario attorno all'asse z .

c) Utilizzando lo stesso volume di controllo, dal bilancio della quantità di moto (6.8) per un fluido non viscoso, per un moto stazionario e per un volume di controllo fermo e se la pressione esterna è costante (integrale della pressione nullo), si ha

$$\int_S \vec{u} \rho \vec{u} d\vec{S} + \vec{F} = 0 .$$

Considerando l'equilibrio attorno all'asse y, l'integrale è differente da zero solo nel tratto di superficie esterna corrispondente alla fessura $\vec{S}_1$, perché nel tratto corrispondente alla tubazione $\vec{S}_2$ il contributo è nullo dato che la velocità giace lungo l'asse x. Allora

$$\begin{aligned} \int_S \vec{u} \rho \vec{u} d\vec{S} &= \int_0^h \int_a^{3a} -u(x) \rho [u(x) dx] dz = -\rho \frac{V_{\max}^2}{4} h \int_a^{3a} \left(\frac{x}{a} - 3 \right)^2 dx = \\ &= -\rho \frac{V_{\max}^2}{4} h \int_a^{3a} \left(\frac{x^2}{a^2} - 6 \frac{x}{a} + 9 \right) dx = -\rho \frac{V_{\max}^2}{4} h \left(\frac{26}{3} a - 24 a + 18 a \right) = -\frac{2}{3} \rho V_{\max}^2 h a \end{aligned}$$

e quindi

$$\vec{F} = - \int_S \vec{u} \rho \vec{u} d\vec{S} = \frac{2}{3} \rho V_{\max}^2 h a = \frac{2}{3} \times 1000 \times 1^2 \times 0.005 \times 0.05 = 0.167 \text{ N} ;$$

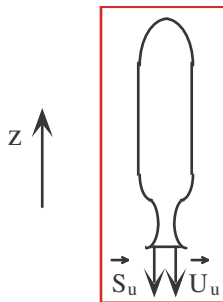
la forza è positiva e farebbe ruotare il tubo in senso orario attorno all'asse z.

d) Il braccio della forza $\vec{F}$ è dato da

$$b = \frac{M_a}{F} = \frac{\rho V_{\max}^2 h a^2}{\frac{2}{3} \rho V_{\max}^2 h a} = \frac{3}{2} a = \frac{3}{2} \times 0.05 = 0.075 \text{ m} .$$

Esercizio 6.2.12

Un piccolo razzo, di massa iniziale $m_0 = 400 \text{ kg}$ (di cui una parte è data dalla tara $m_r = 200 \text{ kg}$ e il restante dal combustibile e dal comburente $m_g = 200 \text{ kg}$), è lanciato verso l'alto. Se la portata massica dei gas è $G_g = 5 \text{ kg/s}$, se i gas escono alla velocità relativa $\vec{U}_u = 3500 \text{ m/s}$ e se si trascura la resistenza dell'aria, calcolare l'accelerazione iniziale del razzo a_a e la sua velocità w dopo il tempo $t = 10 \text{ s}$.



Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura è riportata con linee di colore rosso una possibilità), dalla equazione di bilancio della quantità di moto (6.8) per un fluido non viscoso, per un moto stazionario e per un volume di controllo in moto con il razzo e non dipendente dal tempo, se la pressione esterna è costante (integrale della pressione nullo), si ha

$$\int_S \vec{U} \rho \vec{U} d\vec{S} = m \vec{g} - m \vec{a} .$$

dove $\vec{U}$ è la velocità del fluido rispetto al volume di controllo in moto solidale con il razzo, $\vec{g}$ è l'accelerazione di gravità e $\vec{a}$ è l'accelerazione del sistema razzo.

Il primo termine, se la velocità viene considerata costante nella sezione S_u dell'ugello, diventa

$$\int_S \vec{U} \rho \vec{U} d\vec{S} \rightarrow -W_u \int_{S_u} \rho \vec{U} d\vec{S} = -W_u G_g$$

dove $-W_u$ è la componente lungo la z della velocità $\vec{U}$ e G_g è la portata massica dei gas; il secondo e il terzo rispettivamente diventano

$$m \vec{g} \rightarrow -m g_z = -(m_0 - G_g t) g_z , \quad m \vec{a} \rightarrow m a_z = (m_0 - G_g t) a_z$$

perché la componente dell'accelerazione di gravità g_z è diretta nel verso negativo della coordinata z e dove la

massa m all'interno del volume di controllo nel tempo varia con la legge

$$m = m_0 - G_g t .$$

In definitiva la legge dell'accelerazione del razzo è data da

$$-W_u G_g + g_z (m_0 - G_g t) + a_z (m_0 - G_g t) = 0 \quad \rightarrow \quad a_z = -g_z + \frac{W_u G_g}{m_0 - G_g t} \quad (A)$$

e al tempo $t = 0$ si ha

$$a_z = -g_z + \frac{W_u G_g}{m_0} = -9.80665 + \frac{3500 \times 5}{400} = 33.9 \frac{m}{s^2} .$$

Per la velocità si può scrivere

$$\frac{dw}{dt} = a_z = -g_z + \frac{W_u G_g}{m_0 - G_g t}$$

e, separando le variabili e integrando, la legge della velocità del razzo diventa

$$\begin{aligned} w = \int_0^t du_z &= \int_0^t -g_z dt + \int_0^t \frac{W_u G_g}{m_0 - G_g t} dt = \int_0^t -g_z dt + \int_0^t W_u \frac{-d(m_0 - G_g t)}{m_0 - G_g t} = \\ &= -[g_z t]_0^t - [W_u \ln(m_0 - G_g t)]_0^t = -g_z t - W_u \ln\left(\frac{m_0 - G_g t}{m_0}\right) \quad (B) \end{aligned}$$

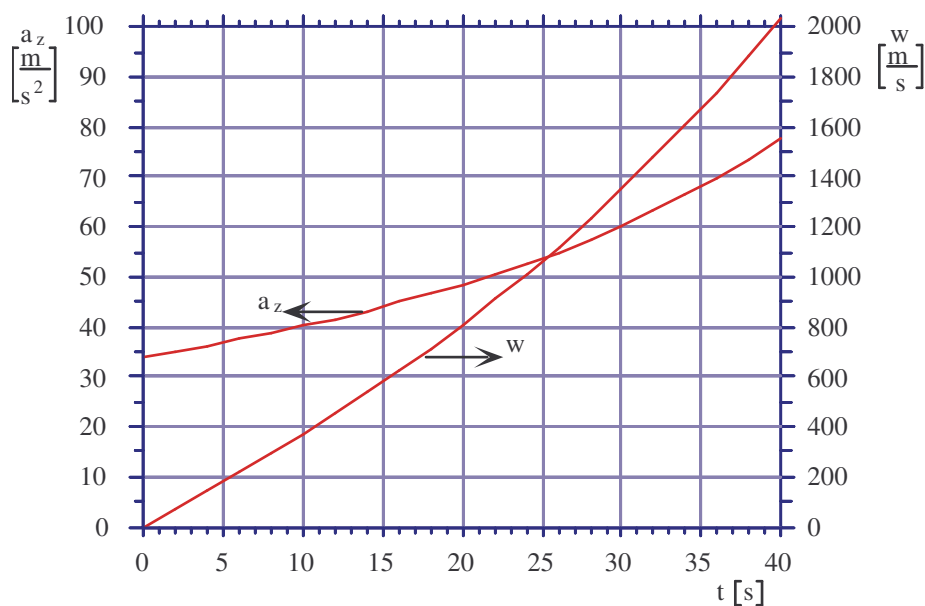
e al tempo $t = 10$ s si ha

$$w = -g_z t - W_u \ln\left(\frac{m_0 - G_g t}{m_0}\right) = -9.80665 \times 10 - 3500 \times \ln\left(\frac{400 - 5 \times 10}{400}\right) = -98.1 + 467 = 369 \frac{m}{s} .$$

Le leggi (A) e (B) sono valide fino all'esaurimento del combustibile e del comburente, cioè fino a quando la massa del sistema diventa uguale a quella della tara $m = m_r$; il tempo necessario a bruciare tutto il combustibile con il comburente di bordo vale

$$m_r = m_0 - G_g t \quad \rightarrow \quad t = \frac{m_0 - m_r}{G_g} = \frac{400 - 200}{5} = 40 \text{ s}$$

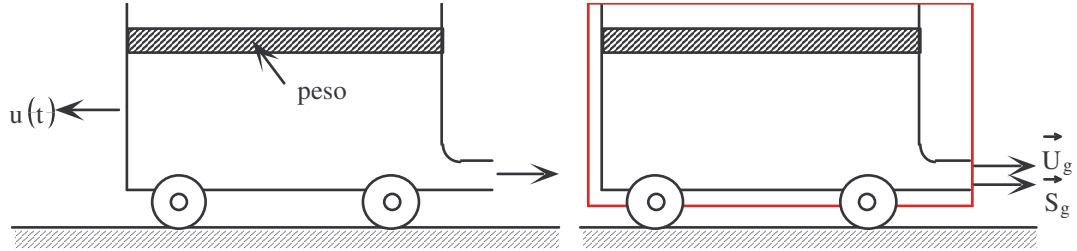
e fino a tale tempo le leggi assumono i valori riportati nel diagramma seguente.



I risultati sono puramente indicativi ed anche lontani dalla verità perché alle velocità riscontrate (2000 m/s) le resistenze d'avanzamento nell'atmosfera sono molto elevate; tutt'al più l'impostazione teorica potrebbe andare bene fuori dall'atmosfera terrestre.

Esercizio 6.2.13

Il carrello mostrato in figura possiede posteriormente un getto, contiene un fluido di massa volumica costante, ha una massa $m_c = 200$ kg e al tempo $t = 0$ ha una massa totale (carrello + fluido) $m_0 = 400$ kg. Il lento movimento di un peso crea attraverso il foro una portata massica $G_m = 5$ kg/s e una velocità relativa di uscita rispetto al carrello $U_g = 1$ m/s costanti nel tempo. Se si trascurano la resistenza dell'aria e l'attrito delle ruote, calcolare: a) le espressioni della accelerazione a_x e della velocità u del carrello in funzione del tempo; b) il tempo di svuotamento del carrello; c) la velocità e l'accelerazione nell'istante in cui il carrello è vuoto.



a) Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura è riportata con linee colorate in rosso una possibilità), dal bilancio della quantità di moto per un fluido non viscoso (6.8), per un moto stazionario e per un volume di controllo in moto con il carrello e non dipendente dal tempo, se la pressione esterna è costante (integrale della pressione nullo), si ha

$$\int_S \bar{U} \rho \bar{U} d\bar{S} + m \bar{a} = 0.$$

dove $\bar{U}$ è la velocità del fluido rispetto al volume di controllo in moto solidale con il carrello e $\bar{a}$ è l'accelerazione del sistema carrello.

Il primo termine, se la velocità e la massa volumica vengono considerate costanti nella sezione S_g del getto, diventa

$$\int_S \bar{U} \rho \bar{U} d\bar{S} \rightarrow U_g \int_{S_g} \rho \bar{U} d\bar{S} = U_g G_m$$

dove U_g è la componente lungo la x della velocità $\bar{U}$ e G_m è la portata massica dell'acqua, mentre il secondo diventa

$$m \bar{a} \rightarrow -m a_x = -(m_0 - G_m t) a_x$$

perché l'accelerazione a_x è diretta nel verso negativo della coordinata x e dove la massa m all'interno del volume di controllo nel tempo varia con la legge

$$m = m_0 - G_m t.$$

In definitiva la legge dell'accelerazione del carrello è data da

$$U_g G_m - (m_0 - G_m t) a_x = 0 \rightarrow a_x = \frac{U_g G_m}{m_0 - G_m t} \quad (A)$$

Per la velocità si può scrivere

$$\frac{du}{dt} = a_x = \frac{U_g G_m}{m_0 - G_m t}$$

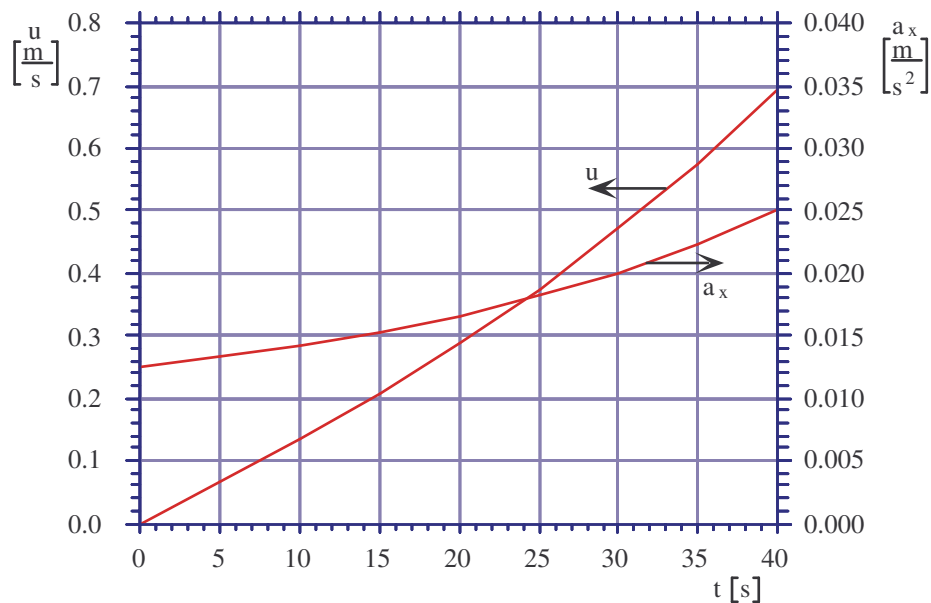
e, separando le variabili e integrando, la legge della velocità del carrello diventa

$$\begin{aligned} \int_0^u du &= U_g \int_0^t \frac{G_m}{m_0 - G_m t} dt \rightarrow \int_0^u du = U_g \int_0^t \frac{d(m_0 - G_m t)}{m_0 - G_m t} \rightarrow [u]_0^u = -U_g [\ln(m_0 - G_m t)]_0^t \rightarrow \\ &\rightarrow u = -U_g \ln\left(\frac{m_0 - G_m t}{m_0}\right) = U_g \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - G_m t}\right). \quad (B) \end{aligned}$$

b) Le leggi (A) e (B) sono valide fino all'esaurimento dell'acqua, cioè fino a quando la massa del sistema diventa uguale a quella del carrello m_c ; il tempo necessario a vuotare il liquido di bordo vale

$$m_c = m_0 + G_m t \quad \rightarrow \quad t = \frac{m_0 + m_c}{G_m} = \frac{400 - 200}{5} = 40 \text{ s} .$$

e fino a tale tempo le leggi assumono i valori riportati nel diagramma seguente.



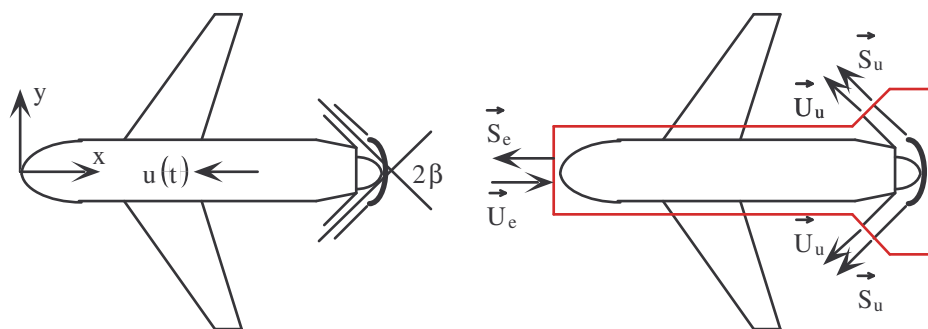
c) Al tempo $t = 40$ s, quando il carrello è vuoto, l'accelerazione e la velocità assumono i valori seguenti

$$a_x = \frac{U_g G_m}{m_0 - G_m t} = \frac{1 \times 5}{400 - 5 \times 40} = 0.025 \frac{m}{s^2}$$

$$u = U_g \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - G_m t} \right) = 1 \times \ln \left(\frac{400}{400 - 5 \times 40} \right) = 0.693 \frac{m}{s} .$$

Esercizio 6.2.14

Per diminuire la velocità di atterraggio $u_0 = 50$ m/s di un velivolo di massa totale pari a $m = 40000$ kg, gli invertitori di spinta mostrati in figura dividono il getto in due getti simmetrici e li dirigono verso l'avanti ruotandoli di un angolo pari a $180^\circ - \beta$ con $\beta = 30^\circ$. Trascurando i momenti della quantità di moto dovuti alla resistenza dell'aria e all'aria di alimentazione del motore e sapendo che la portata massica dei gas è $G_g = 300$ kg/s e che la loro velocità relativa di uscita rispetto al velivolo è $U_u = 400$ m/s, calcolare: a) la decelerazione a_x del velivolo; b) il tempo t di frenata e lo spazio s percorso. Si trascura il consumo di carburante durante la frenata.



a) Dopo aver scelto il volume di controllo (nella figura è riportata con linee colorate in rosso una possibilità), dal bilancio della quantità di moto per un fluido non viscoso (6.8), per un moto stazionario e per un volume di controllo in moto con il velivolo e non dipendente dal tempo, se la pressione esterna è costante (integrale della pressione nullo), si ha

$$\int_S \bar{U} \rho \bar{U} d\bar{S} + m \bar{a} = 0 .$$

dove $\bar{U}$ è la velocità del fluido rispetto al volume di controllo in moto solidale con il velivolo e $\bar{a}$ è la accelerazione del sistema velivolo.

Il primo termine, se la velocità e la massa volumica vengono considerate costanti nella sezione S_u degli in-

vertitori, diventa

$$\int_S \vec{U} \rho \vec{U} d\vec{S} \rightarrow U_u \cos(\pi - \beta) \int_{S_g} \rho \vec{U} d\vec{S} = -\cos\beta U_u G_g$$

dove $U_u \cos(\pi - \beta)$ è la componente lungo la x della velocità $\vec{U}$ e G_g è la portata massica dei gas, mentre il secondo diventa

$$m \vec{a} \rightarrow -m a_x$$

perché l'accelerazione a_x è diretta nel verso negativo della coordinata x.

In definitiva la legge dell'accelerazione del velivolo è data da

$$-\cos\beta U_u G_g - m a_x = 0 \rightarrow a_x = -\cos\beta \frac{U_u G_g}{m} = -\cos(30^\circ) \times \frac{400 \times 300}{40000} = -2.598 \frac{m}{s^2} . \quad (A)$$

Per la velocità si può scrivere

$$\frac{du}{dt} = a_x = -\cos\beta \frac{U_u G_g}{m}$$

e, separando le variabili, integrando e trascurando la diminuzione della massa del velivolo dovuta al combustibile bruciato, la legge della velocità del carrello diventa

$$\int_{u_0}^u du = -\cos\beta \frac{U_u G_g}{m} \int_0^t dt \rightarrow u = u_0 - \cos\beta \frac{U_u G_g}{m} t . \quad (B)$$

b) Le leggi (A) e (B) sono valide fino alla fermata del velivolo, cioè fino a quando $u = 0$; allora il tempo di frenata diventa

$$0 = u_0 - \cos\beta \frac{U_u G_g}{m} t \rightarrow t = \frac{u_0 m}{\cos\beta U_u G_g} = \frac{50 \times 40000}{\cos(30^\circ) \times 400 \times 300} = 19.25 \text{ s}$$

e lo spazio percorso diventa

$$s = u_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2 = 50 \times 19.25 + \frac{1}{2} \times (-2.598) \times 19.25^2 = 481 \text{ m} .$$