

CAPITOLO 6

EQUAZIONI IN FORMA INTEGRALE

6.1. GENERALITÀ

I fenomeni di trasporto assumono una notevole importanza non solo perché intervengono in molti settori delle scienze naturali, ma anche perché determinano il funzionamento di molti impianti creati e costruiti dall'uomo. Di conseguenza è logico, e anche indispensabile, conoscere a fondo questi fenomeni allo scopo di prevedere il comportamento, e quindi di migliorarne la progettazione, delle apparecchiature che li utilizzano. Questa indagine può essere di solito effettuata con due metodologie sperimentali differenti: quella fisica e quella numerica; la prima misura direttamente il fenomeno o si basa sulla costruzione di un suo modello fisico, nella maggior parte dei casi in scala, mentre la seconda crea un modello puramente virtuale.

Il vantaggio del modello fisico è evidente, perché i dati ottenuti non sono frutto di estrapolazioni e quindi la previsione sul comportamento del sistema è accurato; però molto spesso non è possibile ricorrere alla sperimentazione fisica per diverse ragioni, come la scarsa affidabilità delle misure dovuta alle perturbazioni che lo strumento di misura arreca al sistema, o l'elevato costo di laboratori attrezzati ad eseguire misure di precisione sempre più spinta.

Accanto alla sperimentazione di laboratorio si sono allora sviluppate tecniche di calcolo che consentono di ottenere una schematizzazione del fenomeno in esame partendo dalle leggi fisiche che lo descrivono. Data la complessità delle leggi e delle geometrie di solito coinvolte, la soluzione delle equazioni viene ormai eseguita solo per via numerica, in quanto questa operazione diventa sempre più agevole sia per gli sviluppi dell'analisi numerica che affronta in modo nuovo e specifico questi problemi, tanto da parlare di **fluidodinamica computazionale**, sia per il continuo aumento della memoria e della velocità di esecuzione dei calcolatori.

E' evidente che questa seconda tecnica non può sostituire completamente la prima, ma il finalizzare le prove sperimentali solo alla verifica di alcuni risultati numerici e non allo studio completo del fenomeno riesce a ridurre anche notevolmente i costi di produzione.

Per risolvere **problemi di campo**, cioè per analizzare in dettaglio il flusso del fluido (velocità, pressione, ecc.) in ogni punto dello spazio in cui è contenuto, le equazioni vengono risolte numericamente nella forma differenziale vista nei capitoli 3, 4 e 5; di questo argomento, molto complesso e articolato, non si darà alcun cenno. Mentre invece per avere nel volume preso in esame (un serbatoio, uno scambiatore di calore, una pompa, ecc.) un bilancio complessivo delle quantità in gioco (forze, portate, potenze, ecc.), le equazioni vengono utilizzate nella forma integrale; in questo capitolo si vedrà come questa operazione venga effettuata.

6.2. BILANCIO DELLA MASSA

Se si integra l'equazione di continuità (3.4.2)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\bar{u} \rho) \quad (3.4.2)$$

su un volume V variabile nel tempo e se si usa il teorema della divergenza, si ottiene

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div}(\bar{u} \rho) dV \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \bar{u} \rho dS . \quad (6.2.1)$$

Il teorema della divergenza dice che l'integrale di un vettore generico $\bar{\psi}$ esteso sulla superficie S (linea l) di contorno di un certo volume V (superficie S) è uguale all'integrale esteso sul volume V (superficie S) della divergenza del vettore $\bar{\psi}$; la superficie S (linea l) deve essere orientata con la normale $\bar{n}$ diretta verso l'esterno del volume V (superficie S). Si ha allora

$$\int_S \bar{\psi} \bar{n} dS = \int_V \operatorname{div}(\bar{\psi}) dV \quad \int_l \bar{\psi} \bar{n} dl = \int_S \operatorname{div}(\bar{\psi}) dS$$

La relazione (6.2.1) può essere sfruttata in numerose applicazioni pratiche con integrazione diretta su quantità discrete di fluido; il primo fattore rappresenta la variazione di massa subita nel tempo dal volume di controllo V , mentre il secondo rappresenta la portata massica che attraversa la superficie esterna S . Dal momento che per definizione la normale $\bar{n}$ alla superficie esterna è positiva nel verso uscente dal volume V , anche la superficie infinitesima orientata $d\bar{S}$, pari a

$$d\bar{S} = \bar{n} dS ,$$

è positiva se orientata nel verso uscente dal volume V .

Se la massa volumica ρ è considerata uniformemente distribuita all'interno del volume di controllo V , la (6.2.1) può anche essere scritta nel seguente modo

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \bar{u} \rho d\bar{S} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \int_V dV \right) = - \int_S \bar{u} \rho d\bar{S} \quad \rightarrow \quad \rho \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_S \bar{u} \rho d\bar{S} \quad (6.2.2)$$

In caso di fluido incompressibile, con $\rho = \text{cost}$ nel tempo e nello spazio, la relazione (6.2.2) diventa

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_S \bar{u} \rho d\bar{S} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial t} = - \int_S \bar{u} d\bar{S} \quad (6.2.3)$$

dove il primo fattore rappresenta la variazione nel tempo del volume di controllo, mentre il secondo rappresenta la portata volumetrica che attraversa la superficie esterna S ; se il volume di controllo viene mantenuto costante nel tempo, si ottiene

$$\int_S \bar{u} d\bar{S} = 0 . \quad (6.2.4)$$

In caso di moto stazionario, la (6.2.1) diventa invece

$$\int_S \bar{u} \rho d\bar{S} = 0 \quad (6.2.5)$$

che per fluido incompressibile si trasforma nella (6.2.4).

Per comodità di calcolo è consigliabile, dove possibile, prendere la superficie del volume di controllo con il verso $\bar{n}$ sulla retta d'azione delle velocità $\bar{u}$ (ovvero delle linee di corrente) in modo tale che il prodotto scalare $\bar{u} \cdot d\bar{S}$ sia o negativo, in caso di entrata di fluido nel volume di controllo (vettori $\bar{u}$ e $d\bar{S}$ fra loro controversi), o positivo,

in caso di uscita di fluido dal volume di controllo (vettori $\bar{u}$ e $d\bar{S}$ fra loro equiversi). Infatti, nel caso di vettori fra loro controversi (fig. 6.1.a), dalla definizione di prodotto scalare si ha

$$\bar{u} d\bar{S} = \cos(\beta) |\bar{u} d\bar{S}| = \cos(180^\circ) |\bar{u} d\bar{S}| = -u dS \quad (6.2.6.a)$$

e, nel caso di vettori fra loro equiversi (fig. 6.1.b), si ha

$$\bar{u} d\bar{S} = \cos(\beta) |\bar{u} d\bar{S}| = \cos(0^\circ) |\bar{u} d\bar{S}| = u dS \quad (6.2.6.b)$$

dove β è l'angolo compreso fra $\bar{u}$ e $d\bar{S}$.

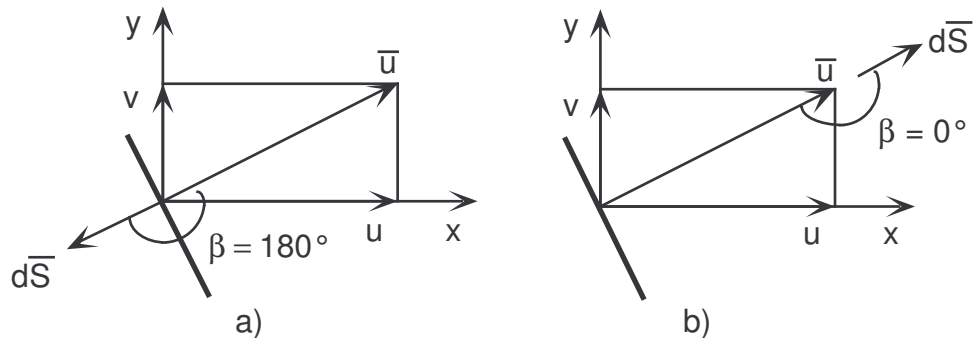


Fig. 6.1.- Fluido passante attraverso la superficie esterna di un volume di controllo: a) entrante; b) uscente.-

6.3. BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Nell'analisi fin qui effettuata sulle equazioni del moto dei fluidi si era fatta una distinzione fra i comportamenti del fluido non viscoso, che segue la legge di Eulero (capitolo 4), e del fluido viscoso, che segue la legge di Navier-Stokes (capitolo 5); questa distinzione verrà mantenuta anche per la determinazione delle equazioni in forma integrale.

6.3.1. FLUIDO NON VISCOSO

Se si integra l'equazione di Eulero (4.2.3)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u} \rho) + \nabla \cdot (\bar{u} \rho \bar{u}) = -\text{grad}(p) + \rho \bar{F}_m \quad (4.2.3)$$

su un volume V variabile nel tempo e se si ricorre ai teoremi della divergenza (vedi § 6.2) e del gradiente (vedi § 2.2), si ottiene la relazione

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\bar{u} \rho) dV + \int_V \nabla \cdot (\bar{u} \rho \bar{u}) dV &= - \int_V \text{grad}(p) dV + \int_V \rho \bar{F}_m dV \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{u} \rho dV + \int_S (\bar{u} \rho \bar{u}) d\bar{S} &= - \int_S p d\bar{S} + \int_V \rho \bar{F}_m dV \end{aligned} \quad (6.3.1.1)$$

che può essere sfruttata in numerose applicazioni pratiche con integrazione diretta su quantità discrete di fluido. L'ultimo termine rappresenta le forze generiche globali di massa che il volume di controllo scambia con l'ambiente esterno e possono essere date dalle forze di gravità $\bar{F}_g$, d'inerzia $\bar{F}_i$, di azione $\bar{F}_a$ e di reazione $\bar{F}_r$

$$\int_V \rho \bar{F}_m dV = \bar{F}_g + \bar{F}_i + \bar{F}_a + \bar{F}_r = m \bar{g} - m \bar{a} - \bar{F} + \bar{R} \quad (6.3.1.2)$$

dove m è la massa del sistema compreso nel volume di controllo, $\bar{g}$ è l'accelerazione di gravità, $\bar{a}$ è l'accelerazione del sistema, $\bar{F}$ è l'azione del sistema sull'ambiente esterno e $\bar{R}$ è la reazione dell'ambiente esterno sul sistema; il segno negativo della forza d'inerzia è dovuto ovviamente al fatto che essa si oppone al moto e quello dell'azione è dovuto al fatto che il suo verso va dal sistema all'ambiente esterno. Sostituendo la (6.3.1.2) nella (6.3.1.1) infine si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{u} \rho dV + \int_S (\bar{u} \rho \bar{u}) d\bar{S} = - \int_S p d\bar{S} + m \bar{g} - m \bar{a} - \bar{F} + \bar{R} . \quad (6.3.1.3)$$

Nel caso di moto stazionario e di presenza solo di una forza di azione e di reazione, la (6.3.1.3) diventa

$$\int_S (\bar{u} \rho \bar{u}) d\bar{S} = - \int_S p d\bar{S} - \bar{F} + \bar{R} . \quad (6.3.1.4)$$

Molto spesso nei calcoli si fa uso della (6.3.1.3) o della (6.3.1.4) facendo ricorso alle loro componenti lungo gli assi cartesiani; bisogna allora fornire alcuni semplici chiarimenti su come vengono determinati i segni delle forze dovute alla velocità e alla pressione.

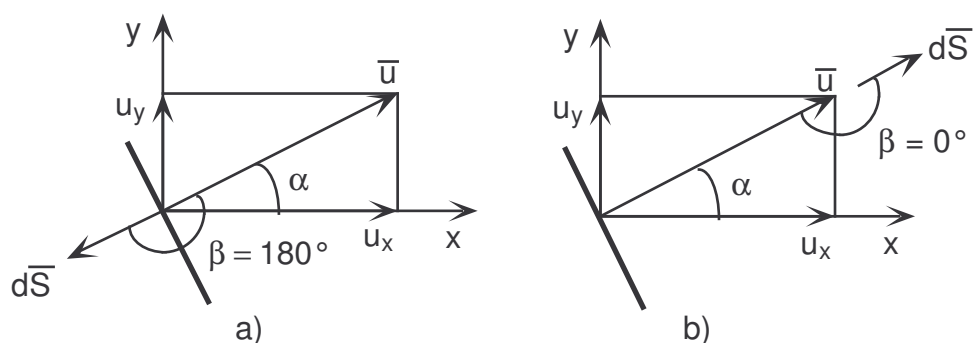


Fig. 6.2.- Fluido passante attraverso la superficie esterna di un volume di controllo: a) entrante; b) uscente.-

La forza dovuta alla velocità è formata (vedi nel § 4.2 come viene determinata la quantità di moto) da un primo vettore velocità che riassume le componenti della portata massica e da un secondo vettore, moltiplicato scalarmente per la superficie, che riassume le componenti della quantità di moto. Esistono quindi due segni legati alla velocità; il primo è insito nel verso del deflusso del fluido e viene determinato mediante la scomposizione del vettore velocità in base alla conoscenza del suo angolo di inclinazione α rispetto all'asse x , mentre invece il secondo viene determinato come nell'equazione di continuità: dopo aver scelto i vettori della normale alla superficie e della velocità sulla stessa retta di azione, il valore assoluto del prodotto assume il segno negativo se i versi dei due vettori sono discordi e positivo se sono concordi.

Per esempio, nel caso bidimensionale di fluido entrante attraverso la superficie esterna del volume di controllo (vedi fig. 6.2.a), se si assume che la massa volumica ρ e la velocità u siano costanti su tutta la sezione S , si ha

$$\text{in } x \quad \int_S u_x \rho \cos(\beta) |\bar{u} d\bar{S}| = \int_S u_x \rho \cos(180^\circ) u dS = \int_S \cos(\alpha) u \rho (-u dS) =$$

$$= \int_S -\cos(\alpha) \rho u^2 dS = -\cos(\alpha) \rho u^2 S \quad (6.3.1.5.a)$$

$$\begin{aligned} \text{in } y \quad \int_S u_y \rho \cos(\beta) |\bar{u} d\bar{S}| &= \int_S u_y \rho \cos(180^\circ) u dS = \int_S \sin(\alpha) u \rho (-u dS) = \\ &= \int_S -\sin(\alpha) \rho u^2 dS = -\sin(\alpha) \rho u^2 S \quad (6.3.1.5.b) \end{aligned}$$

e di fluido uscente attraverso la superficie esterna del volume di controllo (vedi fig. 6.2.b), se si assume che la massa volumica ρ e la velocità u siano costanti su tutta la sezione S , si ha

$$\begin{aligned} \text{in } x \quad \int_S u_x \rho \cos(\beta) |\bar{u} d\bar{S}| &= \int_S u_x \rho \cos(0^\circ) u dS = \int_S \cos(\alpha) u \rho (+u dS) = \\ &= \int_S +\cos(\alpha) \rho u^2 dS = +\cos(\alpha) \rho u^2 S \quad (6.3.1.5.c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{in } y \quad \int_S u_y \rho \cos(\beta) |\bar{u} d\bar{S}| &= \int_S u_y \rho \cos(0^\circ) u dS = \int_S \sin(\alpha) u \rho (+u dS) = \\ &= \int_S +\sin(\alpha) \rho u^2 dS = +\sin(\alpha) \rho u^2 S \quad (6.3.1.5.d) \end{aligned}$$

dove u_x e u_y sono le componenti del vettore $\bar{u}$ in x e in y e dove u e dS sono i valori assoluti dei vettori $\bar{u}$ e rispettivamente $d\bar{S}$.

La forza dovuta alla pressione è orientata come la superficie sulla quale essa insiste (da ricordare che in precedenza si era preso il verso positivo della pressione contrario a quello della normale esterna) e quindi non è difficile determinare le sue componenti.

Per esempio, nel caso bidimensionale di fig. 6.3 si ha

$$\begin{aligned} \text{in } x \quad &\int_S p \cos(\gamma) |d\bar{S}| \\ \text{in } y \quad &\int_S p \sin(\gamma) |d\bar{S}| \end{aligned}$$

dove γ è l'angolo compreso fra $d\bar{S}$ e l'asse x . Se però è dato solo l'angolo di inclinazione α della velocità $\bar{u}$ rispetto all'asse x e se i vettori $\bar{u}$ e $d\bar{S}$ si trovano entrambi sulla stessa retta d'azione, è possibile risalire da γ ad α (vedi fig. 6.3) mediante la relazione

$$\gamma = \alpha + \beta$$

valida sia per l'entrata, dove $\beta = 180^\circ$, sia per l'uscita, dove $\beta = 0^\circ$.

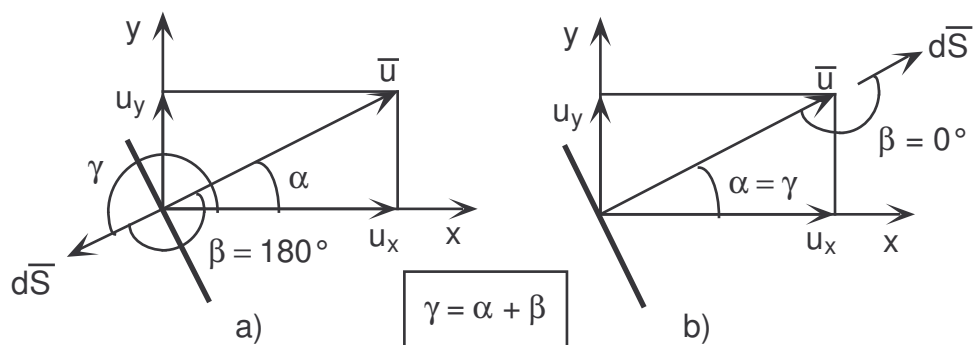


Fig. 6.3.- Fluido passante attraverso la superficie esterna di un volume di controllo: a) entrante; b) uscente.-

Quindi, se si assume che la pressione p sia costante su tutta la sezione S , per l'entrata si ottiene

$$\text{in } x \quad \int_S p \cos(\gamma) |d\vec{S}| = \int_S p \cos(\alpha + 180^\circ) dS = \int_S -p \cos(\alpha) dS = -p \cos(\alpha) S \quad (6.3.1.6.a)$$

$$\text{in } y \quad \int_S p \sin(\gamma) |d\vec{S}| = \int_S p \sin(\alpha + 180^\circ) dS = \int_S -p \sin(\alpha) dS = -p \sin(\alpha) S \quad (6.3.1.6.b)$$

e per l'uscita si ottiene

$$\text{in } x \quad \int_S p \cos(\gamma) |d\vec{S}| = \int_S p \cos(\alpha + 0^\circ) dS = \int_S +p \cos(\alpha) dS = +p \cos(\alpha) S \quad (6.3.1.6.c)$$

$$\text{in } y \quad \int_S p \sin(\gamma) |d\vec{S}| = \int_S p \sin(\alpha + 0^\circ) dS = \int_S +p \sin(\alpha) dS = +p \sin(\alpha) S \quad (6.3.1.6.d)$$

In definitiva sommando le (6.3.1.5) e (6.3.1.6) per una sezione di entrata si ha

$$\text{in } x \quad -\cos(\alpha) (\rho u^2 + p) S \quad (6.3.1.7.a)$$

$$\text{in } y \quad -\sin(\alpha) (\rho u^2 + p) S \quad (6.3.1.7.b)$$

e per una sezione di uscita si ha

$$\text{in } x \quad +\cos(\alpha) (\rho u^2 + p) S \quad (6.3.1.7.c)$$

$$\text{in } y \quad +\sin(\alpha) (\rho u^2 + p) S \quad (6.3.1.7.d)$$

dove in questo caso u^2 e S rappresentano rispettivamente il quadrato del valore assoluto del vettore velocità e il valore assoluto della superficie.

6.3.2. FLUIDO VISCOSO

Se si integra l'equazione di Navier-Stokes (5.5.2)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{u} \rho) + \nabla \cdot (\bar{u} \rho \bar{u}) = \nabla \cdot \bar{\sigma} + \rho \bar{F}_m \quad (5.5.2)$$

su un volume V variabile nel tempo e se si ricorre ai teoremi della divergenza (vedi § 6.2) e del gradiente (vedi § 2.2), si ottiene la relazione

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u} \rho) dV + \int_V \nabla \cdot (\bar{u} \rho \bar{u}) dV &= \int_V \nabla \cdot \bar{\sigma} dV + \int_V \rho \bar{F}_m dV \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{u} \rho dV + \int_S (\bar{u} \rho \bar{u}) d\vec{S} &= \int_S \bar{\sigma} d\vec{S} + \int_V \rho \bar{F}_m dV \quad (6.3.2.1) \end{aligned}$$

che può essere sfruttata in numerose applicazioni pratiche con integrazione diretta su quantità discrete di fluido. Il terzo termine relativo alle forze che il volume di controllo scambia con l'ambiente esterno tramite le tensioni gravanti sulla sua superficie esterna può essere divisa, in base alle (5.4.6), in una forza dovuta alla pressione p e in una forza dovuta alle tensioni deviatoriche $\bar{\sigma}^*$

$$\int_S \bar{\sigma} d\vec{S} = - \int_S p d\vec{S} + \int_S \bar{\sigma}^* d\vec{S} \quad (6.3.2.2)$$

Sostituendo la (6.3.1.2) e la (6.3.2.2) nella (6.3.2.1) infine si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \bar{u} \rho dV + \int_S (\bar{u} \rho \bar{u}) d\bar{S} = - \int_S p d\bar{S} + \int_S \bar{\sigma}^* d\bar{S} + m \bar{g} - m \bar{a} - \bar{F} + \bar{R} \quad (6.3.2.3)$$

con il significato già visto dei simboli; nel caso di moto stazionario e di presenza solo della gravità, la (6.3.2.3) diventa

$$\int_S (\bar{u} \rho \bar{u}) d\bar{S} = - \int_S p d\bar{S} + \int_S \bar{\sigma}^* d\bar{S} + m \bar{g} . \quad (6.3.2.4)$$

Per quanto riguarda la determinazione dei segni relativi alle forze dovute alla velocità e alla pressione valgono le indicazioni viste nel precedente § 6.3.1. Invece le forze dovute alle tensioni seguono la convenzione dei versi positivi delle tensioni indicate nel § 1.5 e riportate in fig. 6.4.

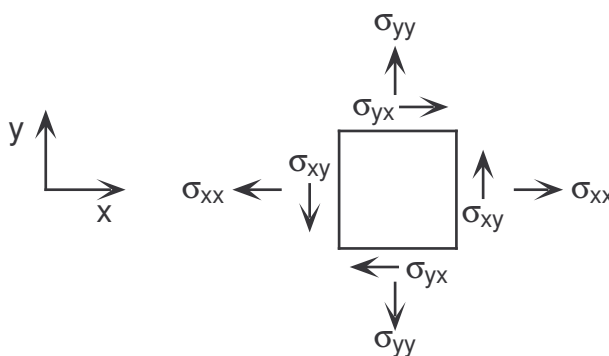


Fig. 6.4.- Tensioni normali e tangenziali positive in un sistema bidimensionale.-

6.4. BILANCIO DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Per applicazioni nel settore delle macchine risulta talvolta utile usare la legge di bilancio del momento della quantità di moto rispetto agli assi coordinati che viene ottenuta moltiplicando vettorialmente quella di bilancio della quantità di moto per i raggi. Nel caso di moto stazionario, di fluido non viscoso e di presenza delle sole forze di azione e di reazione dalla (6.3.1.4) si ottiene

$$\bar{r} \times \left(\int_S (\bar{u} \rho \bar{u}) d\bar{S} = - \int_S p d\bar{S} - \bar{F} + \bar{R} \right) \rightarrow \int_S \bar{r} \times (\bar{u} \rho \bar{u}) d\bar{S} = - \int_S \bar{r} \times p d\bar{S} - \bar{M}_f + \bar{M}_r \quad (6.4.1)$$

dove $\bar{M}_f$ e $\bar{M}_r$ rappresentano rispettivamente il momento del fluido sull'ambiente esterno e il momento dell'ambiente esterno sul fluido.