

CAPITOLO 7

EQUAZIONI ADIMENSIONALIZZATE

7.1. GENERALITÀ

I **numeri caratteristici** o **numeri adimensionali** sono quantità senza dimensioni ottenuti da combinazioni di grandezze fisiche. Come rapporti sono un indice della importanza delle grandezze che si trovano al numeratore rispetto a quelle che si trovano al denominatore; spesso possono, caso per caso, anche assumere interpretazioni fisiche differenti e costituire rapporti fra, per esempio, velocità, forze, energie. Essi hanno grande importanza operativa, sia nell'indagine teorica sia in quella sperimentale, in tutti i campi dell'ingegneria, ma il loro uso è sistematico soprattutto nei problemi di fluidodinamica, con fluidi incompressibili e compressibili, di termofluidodinamica e di magnetofluidodinamica.

I numeri adimensionali consentono di stabilire un concetto di confrontabilità fra due sistemi: uno è costituito dall'opera ingegneristica che deve essere realizzata e l'altro è formato da un modello **simile**, o costruito materialmente in scala ridotta oppure non materialmente esistente ma concepito solo per via numerica. Mediante il modello si riescono, così, a osservare e a raccogliere molte informazioni preliminari sulle grandezze fisiche caratteristiche dell'opera da realizzare; infatti, in una prima fase vengono individuati i numeri adimensionali che caratterizzano il fenomeno da studiare, in una fase successiva viene analizzato solo il comportamento del modello e infine, mediante l'uguaglianza dei numeri adimensionali, ogni grandezza fisica del modello viene trasferita con legge biunivoca in una corrispondente grandezza della futura realizzazione.

7.2. NUMERI ADIMENSIONALI FLUIDODINAMICI

Sostanzialmente i numeri adimensionali possono essere riuniti in due classi principali: la prima comprende quelli che dipendono solo dalle proprietà di stato del fluido, mentre la seconda raggruppa tutti gli altri, cioè quelli che dipendono anche dalle condizioni dinamiche o geometriche. A loro volta i numeri della seconda classe possono essere distinti in due sottoclassi, di cui la prima comprende i numeri composti dal rapporto di due grandezze omogenee e quindi ne esprime l'importanza relativa e la seconda i numeri ottenuti da un puro processo di adimensionalizzazione con grandezze di varia natura.

Nel seguito vengono riassunte le principali caratteristiche dei numeri adimensionali che hanno attinenza con i fenomeni di natura fluidodinamica.

7.2.1. NUMERO DI MACH

Il numero di Mach ha la seguente espressione

$$M = \frac{u}{c} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{\text{s}}{\text{m}} = - - \right]$$

dove u è la velocità del fluido e c è la velocità del suono al suo interno. Esso appartiene a quel gruppo di numeri adimensionali i cui valori sono funzione dello stato termodinamico (c) e dinamico (u) del fluido. Anche se esistono tre interpretazioni del numero di Mach (una dinamica, una cinematica e una energetica), ci si soffermerà su quella cinematica perché riveste maggiore interesse.

Nell'interpretazione **cinematica** il numero di Mach è considerato, nella sua espressione originale, come rapporto fra velocità: se $u < c$ ($M < 1$) il moto del fluido è detto **subsonico**, mentre invece se $u > c$ ($M > 1$) è detto **supersonico**. I due tipi di moto devono essere studiati separatamente perché i fenomeni che si sviluppano nelle due condizioni sono sostanzialmente differenti. Se si prende come esempio un corpo qualsiasi che si muove all'interno di un fluido, le perturbazioni che esso crea si propagano (come visto nel § 1.13) con la velocità del suono; quindi se il corpo avanza con $M < 1$ il fluido avverte con un certo anticipo l'arrivo del corpo e riesce a modificare la sua pressione e la sua massa volumica in modo graduale, mentre invece se il moto del corpo procede con $M > 1$ il fluido non percepisce nessun segnale dell'arrivo del corpo e quando esso arriva è costretto a modificare la pressione in modo repentino creando davanti ad esso un'onda di pressione (onda d'urto).

Nel § 1.13 si era anche visto che la velocità del suono c è un indice della compressibilità del fluido con delle situazioni limiti tali che se $c = 0$ il fluido è perfettamente elastico e se $c = \infty$ il fluido è perfettamente incompressibile. La condizione di incompressibilità però è accettabile anche in tutti quei fenomeni che si sviluppano con $M < 0.3$; infatti le variazioni relative di massa volumica risultano trascurabili rispetto a quelle di velocità e il fluido può essere considerato incompressibile. Un valore basso del numero di Mach può dipendere o dal fatto che il fluido ha una velocità bassa o dal fatto che la velocità del suono all'interno del fluido è elevata.

7.2.2 NUMERO DI REYNOLDS

Il numero di Reynolds ha la seguente espressione

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{m} \frac{\text{m, s}}{\text{kg}} = - - \right]$$

dove ρ è la massa volumica, u è la velocità e μ è la viscosità dinamica del fluido e L è una grandezza caratteristica del problema in esame. Esso appartiene a quel gruppo di numeri adimensionali i cui valori sono funzione dello stato termodinamico (ρ , μ), dinamico (u) e geometrico (L) del fluido. Esistono due interpretazioni: una dinamica e una cinematica.

Nell'interpretazione **dinamica** esso è considerato come il rapporto fra due forze: quella d'inerzia e quella viscosa (di natura dissipativa); al numeratore infatti si trova la massa volumica e al denominatore si trova la viscosità dinamica, caratteristica del fluido che fa insorgere le forze dissipative.

Valori molto piccoli di Re indicano quindi che le forze d'inerzia nel problema studiato sono trascurabili rispetto a quelle di tipo viscoso. Se anche il numero di Mach è piccolo ($M < 0.3$), si è nel campo dei problemi riguardanti la lubrificazione (vedi § 8.7) con fluidi incompressibili (di solito oli lubrificanti) e con forze viscosse preponderanti rispetto a quelle d'inerzia.

Valori molto grandi di Re indicano invece problemi nei quali le forze viscosse possono essere trascurate rispetto a quelle d'inerzia; in tali condizioni il fluido può essere ritenuto ideale, cioè privo di viscosità.

Nell'interpretazione **cinematica** il numero di Reynolds diventa

$$Re = \frac{u L}{\nu}$$

dove ν è la viscosità cinematica. Il rapporto ν/L ha le dimensioni di una velocità, per cui Re può essere considerato come il rapporto fra la velocità u che effettivamente ha la massa del fluido e la velocità con cui si propagano le azioni tangenziali all'interno del fluido. Il rapporto ν/L ha nel numero di Reynolds lo stesso ruolo della velocità del suono c nel numero di Mach; poiché detto rapporto è molto piccolo nei fluidi reali, le tensioni tangenziali non si propagano in modo veloce, anzi rimangono confinate in una zona molto ristretta vicina a quella in cui hanno origine (per esempio nell'interno dello strato limite di una parete).

7.2.3. NUMERO DI FROUDE

Il numero di Froude ha la seguente espressione

$$Fr = \frac{u^2}{gL} \quad \left[\frac{m^2}{s^2} \frac{s^2}{m} \frac{1}{m} = - \right]$$

dove u è la velocità della massa fluida, g è l'accelerazione di gravità e L è una grandezza caratteristica del problema in esame. Esso appartiene a quel gruppo di numeri adimensionali i cui valori sono funzione dello stato dinamico (u , g) e geometrico (L) del fluido. Anche se esistono due interpretazioni del numero di Froude (una dinamica e una cinematica), ci si soffermerà su quella dinamica perché riveste maggiore interesse.

Nell'interpretazione **dinamica** il numero di Froude può essere considerato come un rapporto fra due forze: quella d'inerzia, agente sulla particella fluida, che è proporzionale a $\rho \cdot u^2 \cdot L^2$ e quella di gravità che è proporzionale a $\rho \cdot g \cdot L^3$. Compare quindi in tutti quei problemi nei quali il peso proprio della massa fluida non può essere trascurato rispetto alle altre forze, soprattutto quella d'inerzia.

7.3. EQUAZIONE DI CONTINUITÀ ADIMENSIONALIZZATA

Si prenda come riferimento il caso di una sfera di diametro D immersa in un fluido di massa volumica ρ_∞ che si muove con velocità U_∞ ad una temperatura T_∞ .

Allo scopo di adimensionalizzare l'equazione di continuità (3.4.2), tutte le lunghezze vengono rapportate ad una lunghezza arbitraria di riferimento L , che nel caso in esame corrisponde al diametro D della sfera ($L = D$), tutte le velocità sono rapportate alla velocità di riferimento (velocità indisturbata del fluido) U_∞ , il tempo a quello necessario al fluido per percorrere la lunghezza di riferimento con la velocità di riferimento (L/U_∞) e la massa volumica a quella del fluido in condizioni di riferimento ρ_∞ . Se con l'asterisco vengono indicate le quantità adimensionali, si ha per le lunghezze

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad z^* = \frac{z}{L},$$

per le velocità

$$u^* = \frac{u}{U_\infty}, \quad v^* = \frac{v}{U_\infty}, \quad w^* = \frac{w}{U_\infty},$$

per il tempo

$$t^* = t \frac{U_\infty}{L}$$

e per la massa volumica

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty} .$$

L'equazione di continuità (3.4.2)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{u}) = 0$$

diventa allora

$$\frac{\rho_\infty U_\infty}{L} \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_\infty U_\infty}{L} \text{div}(\rho^* \bar{u}^*) = 0$$

e, semplificando il termine $\rho_\infty U_\infty / L$, si ottiene

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \text{div}(\rho^* \bar{u}^*) = 0 ; \quad (7.3.1)$$

per il fluido incompressibile la (7.3.1) diventa

$$\text{div}(\bar{u}^*) = 0 . \quad (7.3.2)$$

7.4. EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES ADIMENSIONALIZZATE

Per adimensionalizzare le equazioni di Navier-Stokes è necessario trovare un ulteriore termine di riferimento per la pressione; esso solitamente viene preso il doppio della pressione dinamica indisturbata (4.4.3.1)

$$p^* = \frac{p}{\rho U_\infty^2} .$$

Le equazioni di Navier-Stokes (5.5.10)

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\text{grad}(p) + \mu \nabla^2 \bar{u} + \rho \bar{g} ,$$

in cui vengono considerate le forze dovute al campo gravitazionale (forze peso) $\rho \cdot \bar{F}_m = \rho \cdot \bar{g}$, diventano allora

$$\frac{\rho U_\infty^2}{L} \frac{D\bar{u}^*}{Dt^*} = -\frac{\rho U_\infty^2}{L} \text{grad}(p^*) + \frac{\mu U_\infty}{L^2} \nabla^2 \bar{u}^* + \rho \bar{g} .$$

Dividendo tutti i membri per $\rho U_\infty^2 / L$ si ricava

$$\frac{D\bar{u}^*}{Dt^*} = -\text{grad}(p^*) + \frac{\mu}{\rho U_\infty L} \nabla^2 \bar{u}^* + \frac{gL}{U_\infty^2} \bar{e}$$

dove $\bar{e}$ è il versore dell'accelerazione di gravità g ed osservando che

$$\frac{\mu}{\rho U_{\infty} L} = \frac{1}{Re} \quad , \quad \frac{gL}{U_{\infty}^2} = \frac{1}{Fr}$$

si ha

$$\frac{D\bar{u}^*}{Dt^*} = -\text{grad}(p^*) + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{u}^* + \frac{1}{Fr} \bar{e} . \quad (7.4.1)$$

Se il peso proprio del fluido può essere trascurato ($Fr \sim \infty$), la relazione (7.4.1) diventa

$$\frac{D\bar{u}^*}{Dt^*} = -\text{grad}(p^*) + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{u}^* . \quad (7.4.2)$$

Se due flussi hanno lo stesso numero di Reynolds, essi sono detti simili; bisogna però stare attenti all'interpretazione che deve essere data a questa affermazione, nel senso che non bisogna generalizzare dicendo che i flussi presentano sempre lo stesso rapporto fra forze d'inerzia e forze viscosse.

Infatti, nei casi per esempio di moto a falde parallele fra due lastre parallele o in un tubo (moti di Couette o di Poiseuille che verranno trattati rispettivamente nel § 8.4. e nel § 8.5), i flussi sono governati dalle forze di pressione e dalle forze viscosse, mentre le forze d'inerzia sono dappertutto nulle; ci si trova quindi nella contraddizione che, pur potendo trovare un valore differente da zero per il numero di Reynolds in base ai valori della massa volumica, della velocità indisturbata, della viscosità e della lunghezza di riferimento, le forze d'inerzia sono nulle. Il numero di Reynolds in questi esempi deve essere interpretato non in modo dinamico, ma cinematico come rapporto fra la velocità del fluido e la velocità con cui si propagano le tensioni tangenziali all'interno del fluido.

Affinché due flussi siano simili, non basta che abbiano lo stesso numero di Reynolds, ma occorre che sia uguale anche l'interpretazione che di esso viene fatta. I moti di Couette e di Poiseuille possono essere confrontati fra loro, ma non con moti di tipo generico in cui hanno rilevanza le forze d'inerzia.