

CAPITOLO 8

SOLUZIONE ANALITICA DELLE EQUAZIONI DI NAVIER - STOKES

8.1. GENERALITÀ

In generale, il problema di trovare soluzioni analitiche esatte delle equazioni di Navier - Stokes (5.5.10) valide per un fluido incompressibile

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\text{grad}(p) + \mu \nabla^2 \bar{u} + \rho \bar{F}_m$$

dove

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) + \rho \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)$$

presenta difficoltà matematiche insormontabili; esse sono soprattutto insite nella non linearità del termine cosiddetto **convettivo** $\rho \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)$. Tuttavia è possibile trovare soluzioni esatte in certi casi particolari, per esempio quando si può trascurare oppure quando si annulla il termine convettivo. In questo capitolo verranno trattate alcune di queste soluzioni esatte.

E' bene però subito precisare che le soluzioni, date per valori arbitrari delle velocità, della viscosità, della pressione e delle dimensioni, sono valide solo se il numero di Reynolds è inferiore al valore critico (vedi § 9.1), cioè fino a che il moto è **laminare**; se si supera il valore critico, il moto diventa **turbolento** e il campo della velocità può modificarsi in modo sostanziale.

8.2. MOTO A FALDE PARALLELE

I moti a falde parallele costituiscono una classe particolarmente semplice: in essi è differente da zero solo una componente della velocità, perché tutte le particelle fluide si muovono in un'unica direzione. Se per esempio si pone che dappertutto sia identicamente $u = v = 0$ e che il moto sia pienamente sviluppato ($w = \text{cost}$ nella direzione del moto z), dall'equazione di continuità (3.4.4) per fluidi incompressibili si ricava

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ;$$

inoltre dalla prima e dalla seconda delle equazioni di Navier - Stokes (5.5.9), in assenza di forze di massa $F_{mx} = F_{my} = F_{mz} = 0$, si ottiene

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho F_{mx} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho F_{my} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

mentre la terza si riduce a

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho F_{mz} \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Se si vuole poi determinare il campo di velocità all'interno di un canale fra due pareti infinite parallele ferme, come rappresentato in fig. 8.1, in situazione stazionaria e con andamento della velocità costante lungo la x, l'equazione si riduce ulteriormente nel modo seguente

$$- \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (8.2.1)$$

con le condizioni al contorno

$$w = 0 \quad \text{per} \quad y = \pm Y$$

che rappresentano i vincoli di non scorrimento sulle pareti delle lastre (entrambe ferme).

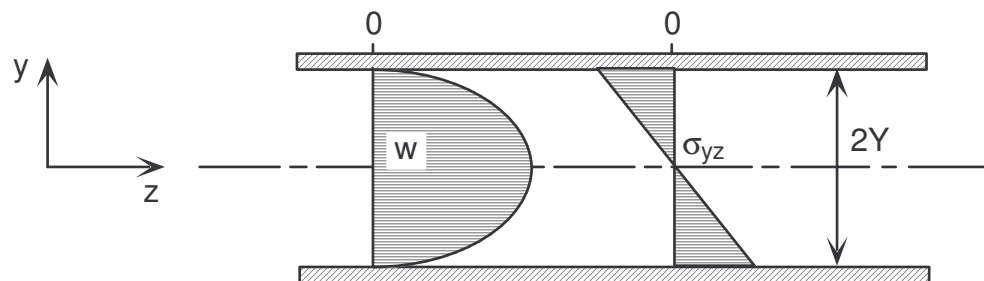


Fig. 8.1.- Moto a falde parallele fra due pareti ferme.-

Integrando due volte la (8.2.1) nella funzione cercata w, si ottiene

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y + a \quad w = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{y^2}{2} + a y + b ; \quad (8.2.2)$$

le condizioni al contorno imposte alla velocità consentono di scrivere le due equazioni

$$w(-Y) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{Y^2}{2} - a Y + b = 0 \quad w(+Y) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{Y^2}{2} + a Y + b = 0$$

da cui è possibile ricavare le due costanti d'integrazione

$$a = 0 \quad b = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{Y^2}{2} ; \quad (8.2.3)$$

infine, inserendo le costanti (8.2.3) nell'integrale generale (8.2.2), si ricava la soluzione particolare cercata

$$w = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (Y^2 - y^2) . \quad (8.2.4)$$

In funzione della diminuzione di pressione lungo la direzione z e del valore della viscosità del fluido si ottiene il profilo parabolico disegnato in fig. 8.1. Il gradiente della pressione $\partial p / \partial z$ (negativo) lungo la direzione di avanzamento del fluido serve a vincere le perdite di attrito viscoso interno e quindi a mantenere costante in tutte le sezioni normali alla z il profilo della velocità w .

Sostituendo nella (8.2.4) le quantità adimensionali introdotte nei §§ 7.3 e 7.4

$$w = W w^* \quad p = p^* \quad z = Y z^* \quad y = Y y^* \quad Re = \frac{\rho W Y}{\mu}$$

con W e con Y grandezze di riferimento, si ha

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (Y^2 - y^2) \rightarrow W w^* = \frac{1}{2\mu} \frac{\rho W^2}{Y} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) Y^2 (1 - y^{*2}) \rightarrow \\ &\rightarrow w^* = \frac{1}{2} \frac{\rho W Y}{\mu} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) (1 - y^{*2}) = \frac{Re}{2} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) (1 - y^{*2}) . \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

La portata volumetrica per una larghezza X delle lastre in termini dimensionali è

$$\begin{aligned} G_v &= \int_{-Y}^{+Y} w X dy = \int_{-Y}^{+Y} \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (Y^2 - y^2) X dy = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) X \left(Y^2 [y]_{-Y}^{+Y} - \frac{1}{3} [y^3]_{-Y}^{+Y} \right) = \\ &= \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) X \left(2 Y^3 - \frac{2}{3} Y^3 \right) = \frac{2}{3\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) X Y^3 \end{aligned} \quad (8.2.6)$$

e, introducendo la quantità adimensionale

$$G_v = W X 2 Y G_v^* ,$$

in termini adimensionali è

$$\begin{aligned} G_v &= \frac{2}{3\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) X Y^3 \rightarrow W X 2 Y G_v^* = \frac{2}{3\mu} \frac{\rho W^2}{Y} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) X Y^3 \rightarrow \\ &\rightarrow G_v^* = \frac{1}{3} \frac{\rho W Y}{\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{Re}{3} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) . \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

La velocità media (3.3.4) in termini dimensionali diventa

$$w_m = \frac{G_v}{S_n} = \frac{\frac{2}{3\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) X Y^3}{2 X Y} = \frac{1}{3\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) Y^2 \quad (8.2.8)$$

e in termini adimensionali diventa

$$w_m = \frac{1}{3\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) Y^2 \quad \rightarrow \quad W w^*_m = \frac{1}{3\mu} \frac{\rho W^2}{Y} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) Y^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad w^*_m = \frac{1}{3} \frac{\rho W Y}{\mu} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) = \frac{Re}{3} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) . \quad (8.2.9)$$

Le tensioni tangenziali agenti all'interno del fluido e fra fluido e pareti sono date dalle relazioni (5.4.6); unica tensione differente da zero è la σ_{yz} in quanto $\partial w / \partial y$ è l'unico gradiente di velocità non nullo. Introducendo il gradiente di velocità, ottenuto o derivando la velocità (8.2.4) rispetto a y

$$w = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (Y^2 - y^2) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) y$$

o inserendo la costante (8.2.3) nella (8.2.2), la tensione assume il valore

$$\sigma_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \mu \left[-\frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) y \right] = - \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) y . \quad (8.2.10)$$

Poiché il gradiente della pressione $\partial p / \partial z$ è negativo lungo la direzione di avanzamento del fluido, la tensione è negativa nel campo delle y positive e viceversa è positiva nel campo delle y negative assumendo l'andamento lineare riportato nella fig. 8.1. Il diagramma viene letto nel modo seguente: partendo dalla lastra inferiore dove $y = -Y$, lo strato di fluido superiore, più veloce, provoca sullo strato inferiore, meno veloce, una tensione di trascinamento nel verso positivo delle z ; questa azione diminuisce fino al valore $y = 0$, perché le differenze di velocità si attenuano, finché inverte il segno in quanto lo strato di fluido superiore, meno veloce, provoca sullo strato inferiore, più veloce, una tensione di frenatura nel verso negativo delle z . Se si procede dalla lastra superiore a quella inferiore, cioè nel verso delle y negative, il diagramma deve essere letto modificando i segni delle tensioni; assume quindi importanza fondamentale il verso della normale, fra strato passivo (su cui viene determinata la tensione) e strato attivo (che provoca la tensione), rispetto al verso positivo degli assi secondo cui sono stati calcolati i gradienti delle velocità.

Sulla parete solida inferiore, considerata come strato fluido fermo, agisce allora una tensione che va nel verso positivo delle z (la normale è equiversa alle y e quindi si deve rispettare il segno del diagramma di fig. 8.1 oppure la normale, positiva, ha lo stesso segno del gradiente di velocità, positivo); sulla parete solida superiore, considerata anch'essa come strato fluido fermo, agisce ancora una tensione che va nel verso positivo delle z (la normale è controversa alle y e quindi deve essere cambiato il segno del diagramma di fig. 8.1 oppure la normale, negativa, ha lo stesso segno del gradiente di velocità, negativo).

Introducendo la quantità adimensionale (da ricordare che la tensione ha le unità di misura della pressione)

$$\sigma_{yz} = \rho W^2 \sigma^*_{yz}$$

le tensioni in forma adimensionale è analoga a quella in forma dimensionale (8.2.10)

$$\sigma_{yz} = - \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) y \quad \rightarrow \quad \rho W^2 \sigma^*_{yz} = - \frac{\rho W^2 Y}{Y} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) y^* \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \sigma^*_{yz} = - \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) y^* . \quad (8.2.11)$$

8.3. MOTO DI COUETTE

Un altro caso semplice di moto a falde parallele è costituito dalla situazione, riportata in fig. 8.2, in cui una delle due pareti è in movimento lungo la z con la velocità W ; essa costituisce una modifica di quella trattata nel precedente § 8.2. Le condizioni al contorno diventano allora

$$w = W \quad \text{per} \quad y = 0 \quad , \quad w = 0 \quad \text{per} \quad y = Y$$

e rappresentano i vincoli di non scorrimento sulle pareti delle lastre (la superiore ferma e la inferiore in moto).

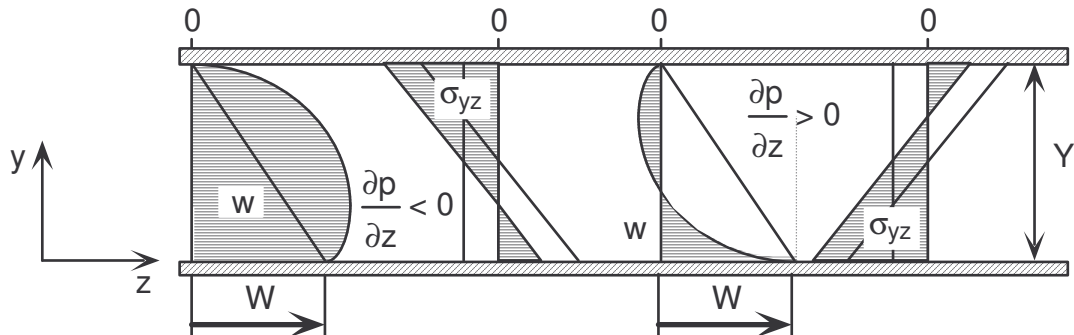


Fig. 8.2.- Moto a falde parallele fra una parete ferma ed una in movimento.-

Integrando due volte la (8.2.1) nella funzione cercata w , si ottiene

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y + a \quad \quad w = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{y^2}{2} + a y + b ; \quad (8.3.1)$$

le condizioni al contorno imposte alla velocità consentono di scrivere le due equazioni

$$w(0) = b = W \quad \quad w(Y) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{Y^2}{2} + a Y + b = 0$$

da cui è possibile ricavare le due costanti d'integrazione

$$a = -\frac{W}{Y} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{Y}{2} \quad \quad b = W ; \quad (8.3.2)$$

infine, inserendo le costanti (8.3.2) nell'integrale generale (8.3.1), si ricava la soluzione particolare cercata

$$w = W \left(1 - \frac{y}{Y} \right) + \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) y (Y - y) . \quad (8.3.3)$$

Sostituendo nella (8.3.3) le quantità adimensionali introdotte nei §§ 7.3 e 7.4

$$w = W w^* \quad p = \rho W^2 p^* \quad z = Y z^* \quad y = Y y^* \quad Re = \frac{\rho W Y}{\mu}$$

con W e con Y grandezze di riferimento, si ha

$$\begin{aligned}
w &= W \left(1 - \frac{y}{Y} \right) + \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) y (Y - y) \rightarrow \\
&\rightarrow W w^* = W (1 - y^*) + \frac{1}{2\mu} \frac{\rho W^2}{Y} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) Y^2 y^* (1 - y^*) \rightarrow \\
&\rightarrow w^* = (1 - y^*) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\rho W Y}{\mu} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) y^* \right] = (1 - y^*) \left[1 + \frac{\text{Re}}{2} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) y^* \right]. \quad (8.3.4)
\end{aligned}$$

Se viene a mancare il gradiente di pressione, le precedenti relazioni (8.3.3) e (8.3.4) si riducono rispettivamente a

$$w = W \left(1 - \frac{y}{Y} \right), \quad w^* = 1 - y^* ;$$

questo caso particolare è conosciuto come **moto di Couette**. Nel caso più generale il moto è dato dalla somma di due moti: uno di avanzamento di Couette dovuto al movimento della parete e uno cosiddetto **retrogrado** dovuto al gradiente di pressione. Infatti, se il gradiente di pressione decresce nella direzione del moto, la velocità è positiva su tutta la larghezza del canale, mentre per valori positivi la velocità su una certa porzione di canale può assumere un valore negativo (vedi fig. 8.2). In quest'ultima condizione l'effetto di spinta degli strati più veloci esercitato sulle particelle fluide in vicinanza della parete ferma è insufficiente a vincere l'influenza contraria dell'aumento della pressione.

La portata volumetrica per una larghezza X delle lastre in termini dimensionali è

$$\begin{aligned}
G_v &= \int_0^Y w X dy = \int_0^Y \left[W \left(1 - \frac{y}{Y} \right) + \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) y (Y - y) \right] X dy = \\
&= W X \left([y]_0^Y - \frac{1}{2Y} [y^2]_0^Y \right) + \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) X \left(Y \frac{1}{2} [y^2]_0^Y - \frac{1}{3} [y^3]_0^Y \right) = \\
&= W X \left(Y - \frac{Y^2}{2Y} \right) + \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) X \left(\frac{1}{2} Y^3 - \frac{1}{3} Y^3 \right) = \frac{1}{2} W X Y + \frac{1}{12\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) X Y^3 \quad (8.3.5)
\end{aligned}$$

e, introducendo la quantità adimensionale

$$G_v = W X Y G_v^*,$$

in termini adimensionali è

$$\begin{aligned}
G_v &= \frac{1}{2} W X Y + \frac{1}{12\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) X Y^3 \rightarrow \\
&\rightarrow W X Y G_v^* = \frac{1}{2} W X Y + \frac{1}{12\mu} \frac{\rho W^2}{Y} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) X Y^3 \rightarrow \\
&\rightarrow G_v^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \frac{\rho W Y}{\mu} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\text{Re}}{12} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right). \quad (8.3.6)
\end{aligned}$$

La velocità media (3.3.4) in termini dimensionali diventa

$$w_m = \frac{G_v}{S_n} = \frac{\frac{1}{2} W X Y + \frac{1}{12 \mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) X Y^3}{X Y} = \frac{1}{2} W + \frac{1}{12 \mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) Y^2 \quad (8.3.7)$$

e in termini adimensionali diventa

$$w_m = \frac{1}{2} W + \frac{1}{12 \mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) Y^2 \rightarrow W w_m^* = \frac{1}{2} W + \frac{1}{12 \mu} \frac{\rho W^2}{Y} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) Y^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow w_m^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \frac{\rho W Y}{\mu} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \text{Re} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) . \quad (8.3.8)$$

Le tensioni tangenziali agenti all'interno del fluido e fra fluido e pareti sono date dalle relazioni (5.4.7); unica tensione differente da zero è la σ_{yz} in quanto $\partial w / \partial y$ è l'unico gradiente di velocità non nullo. Introducendo il gradiente di velocità, ottenuto derivando la velocità (8.3.3) rispetto a y

$$w = W \left(1 - \frac{y}{Y} \right) + \frac{1}{2 \mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) y (Y - y) \rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{W}{Y} - \frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left(y - \frac{Y}{2} \right)$$

o inserendo la costante (8.3.2) nella (8.3.1), la tensione assume il valore

$$\sigma_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \mu \left[-\frac{W}{Y} - \frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left(y - \frac{Y}{2} \right) \right] = -\mu \frac{W}{Y} - \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left(y - \frac{Y}{2} \right) \quad (8.3.9)$$

e l'andamento riportato in fig. 8.2. Essa è formata da una parte costante, dovuta al movimento della lastra, che si oppone al moto e che quindi è diretta nel verso negativo delle z e da una parte variabile linearmente con la y , dovuta al gradiente della pressione, che può essere decrescente con la y (come nel caso precedente delle lastre ferme) oppure crescente a seconda del segno del gradiente. Procedendo nel verso positivo delle y , cioè dalla lastra in moto verso quella ferma, se il gradiente è negativo, la tensione decresce annullandosi nel punto in cui la velocità è massima e, se il gradiente è positivo, la tensione cresce annullandosi nel punto in cui la velocità è minima.

Sulla parete inferiore, se il gradiente di pressione è negativo, la tensione diventa negativa o positiva a seconda che prevalga l'influenza del moto della parete o del moto retrogrado, mentre, se il gradiente di pressione è positivo, la tensione è sempre negativa. Sulla parete superiore, invece, se il gradiente di pressione è negativo, la tensione è sempre positiva (si inverte il segno del diagramma di fig. 8.2), mentre, se il gradiente di pressione è positivo, la tensione diventa positiva o negativa a seconda che prevalga l'influenza del moto della parete o del moto retrogrado (si inverte il segno del diagramma di fig. 8.2).

Introducendo la quantità adimensionale

$$\sigma_{yz} = \rho W^2 \sigma_{yz}^* ,$$

le tensioni in forma adimensionale è analoga a quella in forma dimensionale (8.3.9)

$$\sigma_{yz} = -\mu \frac{W}{Y} - \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left(y - \frac{Y}{2} \right) \rightarrow \rho W^2 \sigma_{yz}^* = -\mu \frac{W}{Y} - \frac{\rho W^2}{Y} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) \left(y^* Y - \frac{Y}{2} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \sigma_{yz}^* = -\frac{1}{\text{Re}} - \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) \left(y^* - \frac{1}{2} \right). \quad (8.3.10)$$

8.4. MOTO DI HAGEN - POISEUILLE

Il moto all'interno di un tubo rettilineo a sezione circolare corrisponde al caso precedentemente visto fra due lastre infinite, parallele e ferme, salvo che il problema deve essere risolto mediante l'equazione di continuità (3.4.5) e le equazioni di Navier - Stokes (5.5.11) scritte in coordinate cilindriche.

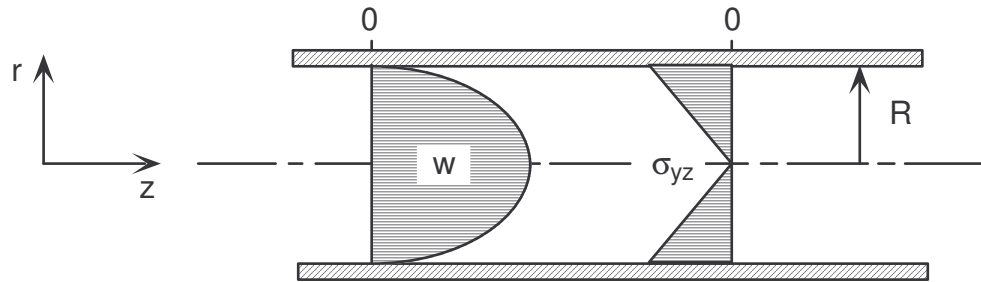


Fig. 8.3.- Moto a falde parallele all'interno di un tubo cilindrico a sezione circolare.-

Riferendosi al sistema di coordinate rappresentato in fig. 8.3 e ripetendo il ragionamento svolto nel § 8.2, si pone dapprima $u = v = 0$ e $w = \text{cost}$ nella direzione del moto z , si ottiene quindi dalla equazione di continuità

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

e dalle prime due equazioni di Navier - Stokes

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho F_{mr} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{u v}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho F_{m\vartheta} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = 0 \end{aligned}$$

e infine dalla terza si ricava

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho F_{mz} \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) &= 0 \quad \rightarrow \quad \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (8.4.1) \end{aligned}$$

con le condizioni al contorno

$$w = 0 \quad \text{per} \quad r = R \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{per} \quad r = 0 \quad ,$$

di cui la prima rappresenta il vincolo di non scorrimento sulla parete del tubo e la seconda è dovuta a ragioni di simmetria e di continuità nel profilo della velocità.

Integrando una volta la (8.4.1) nella funzione cercata w , si ottiene

$$r \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{r^2}{2} + a \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{r}{2} + \frac{a}{r} \quad (8.4.2)$$

e, allo scopo di evitare la singolarità per $r = 0$, la costante di integrazione a deve essere posta uguale a zero

$$\frac{\partial w}{\partial r}(0) = 0 \quad \rightarrow \quad a = 0 ; \quad (8.4.3)$$

integrando una seconda volta nella funzione cercata w , si ottiene

$$w = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{r^2}{4} + b \quad (8.4.4)$$

e la condizione al contorno imposta alla velocità consente di scrivere l'equazione

$$w(R) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{R^2}{4} + b = 0$$

da cui è possibile ricavare la seconda costante d'integrazione

$$b = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{R^2}{4} ; \quad (8.4.5)$$

infine, inserendo la costante (8.4.5) nell'integrale generale (8.4.4), si ricava la soluzione particolare cercata

$$w = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (R^2 - r^2) . \quad (8.4.6)$$

In funzione della diminuzione di pressione lungo la direzione z e del valore della viscosità del fluido si ottiene il profilo parabolico disegnato in fig. 8.3. Il gradiente della pressione $\partial p / \partial z$ (negativo) lungo la direzione di avanzamento del fluido serve a vincere le perdite di attrito viscoso interno e quindi a mantenere costante in tutte le sezioni normali alla z il profilo della velocità w .

Sostituendo nella (8.4.6) le quantità adimensionali

$$w = W w^* \quad p = \rho W^2 p^* \quad z = R z^* \quad r = R r^* \quad Re = \frac{\rho W R}{\mu}$$

con W e con R grandezze di riferimento, si ha

$$\begin{aligned} w = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (R^2 - r^2) &\rightarrow W w^* = \frac{1}{4\mu} \frac{\rho W^2}{R} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) R^2 (1^2 - r^{*2}) \rightarrow \\ &\rightarrow w^* = \frac{1}{4} \frac{\rho W R}{\mu} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) (1 - r^{*2}) = \frac{Re}{4} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) (1 - r^{*2}) . \end{aligned} \quad (8.4.7)$$

La portata volumetrica del tubo in termini dimensionali è data da

$$G_v = \int_0^R w 2\pi r dr = \int_0^R \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (R^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{\pi}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left(\frac{R^2}{2} [r^2]_0^R - \frac{1}{4} [r^4]_0^R \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi}{8\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^4 \quad (8.4.8)$$

e, introducendo la quantità adimensionale

$$G_v = W \pi R^2 G_v^*,$$

in termini adimensionali da

$$G_v = \frac{\pi}{8\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^4 \quad \rightarrow \quad W \pi R^2 G_v^* = \frac{\pi}{8\mu} \frac{\rho W^2}{R} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) R^4 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad G_v^* = \frac{\rho W R}{8\mu} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) = \frac{Re}{8} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right). \quad (8.4.9)$$

La velocità media (3.3.4) in termini dimensionali diventa

$$w_m = \frac{G_v}{S_n} = \frac{\frac{\pi}{8\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^4}{\pi R^2} = \frac{1}{8\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^2 \quad (8.4.10)$$

e in termini adimensionali diventa

$$w_m = \frac{1}{8\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^2 \quad \rightarrow \quad W w_m^* = \frac{1}{8\mu} \frac{\rho W^2}{R} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) R^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad w_m^* = \frac{1}{8} \frac{\rho W R}{\mu} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) = \frac{Re}{8} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right). \quad (8.4.11)$$

Le tensioni tangenziali agenti all'interno del fluido e fra fluido e pareti sono date dalle relazioni (5.4.8); unica tensione differente da zero è la σ_{rz} in quanto $\partial w / \partial r$ è l'unico gradiente di velocità non nullo. Introducendo il gradiente di velocità, ottenuto derivando la velocità (8.4.4) rispetto a r

$$w = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (R^2 - r^2) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) r,$$

o inserendo la costante (8.4.3) nella (8.4.2), la tensione assume il valore

$$\sigma_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \mu \frac{\partial w}{\partial r} = -\mu \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) r = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) r. \quad (8.4.12)$$

Poiché il gradiente della pressione $\partial p / \partial z$ è negativo lungo la direzione di avanzamento del fluido, la tensione è negativa in tutto il campo delle r assumendo l'andamento lineare riportato nella fig. 8.3. Il diagramma viene letto nel modo seguente: partendo dall'asse di simmetria dove $r = 0$, lo strato di fluido esterno, meno veloce, provoca sullo strato interno, più veloce, una tensione di frenatura nel verso negativo delle z ; questa azione aumenta fino al valore $r = R$, perché le differenze di velocità si

acuiscono. Se si procede dalla periferia al centro, cioè nel verso delle r negative, il diagramma deve essere letto modificando i segni delle tensioni; assume quindi importanza fondamentale il verso della normale, fra strato passivo (su cui viene determinata la tensione) e strato attivo (che provoca la tensione), rispetto al verso positivo degli assi secondo cui sono stati calcolati i gradienti delle velocità.

Sulla parete solida, considerata anch'essa come strato fluido fermo, agisce ancora tensione che va nel verso positivo delle z (la normale è controversa alle r e quindi deve essere cambiato il segno del diagramma di fig. 8.3 oppure la normale, negativa, ha lo stesso segno del gradiente di velocità, negativo).

Introducendo la quantità adimensionale

$$\sigma_{rz} = \rho W^2 \sigma_{rz}^*,$$

le tensioni in forma adimensionale è analoga a quella in forma dimensionale (8.4.12)

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) r & \rightarrow \rho W^2 \sigma_{rz}^* = -\frac{1}{2} \frac{\rho W^2 R}{R} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) r^* \rightarrow \\ & \rightarrow \sigma_{rz}^* = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) r^*. \quad (8.4.13) \end{aligned}$$

Nelle applicazioni di natura ingegneristica il gradiente di pressione $\partial p / \partial z$, necessario a consentire il deflusso del fluido con velocità media w_m all'interno di una tubazione, è messo in relazione a un **coefficiente di resistenza** f , di cui si riparerà nel capitolo 10.

8.5. LUBRIFICAZIONE

Il fenomeno della lubrificazione, che si verifica nei cuscinetti a strisciamento dove fra due superfici metalliche in movimento a velocità differenti viene frapposto un film di olio lubrificante, è un tipo di moto in cui le forze di natura viscosa sono predominanti rispetto a quelle d'inerzia. A alte velocità lo spessore fra le due superfici è occupato da una corrente fluida nella quale possono essere creati valori di pressione molto elevati. La conoscenza del fenomeno fluidodinamico dei cuscinetti è molto importante perché, a causa delle elevate pressioni, il film fluido può interrompersi e di conseguenza le due superfici metalliche possono venire a contatto.

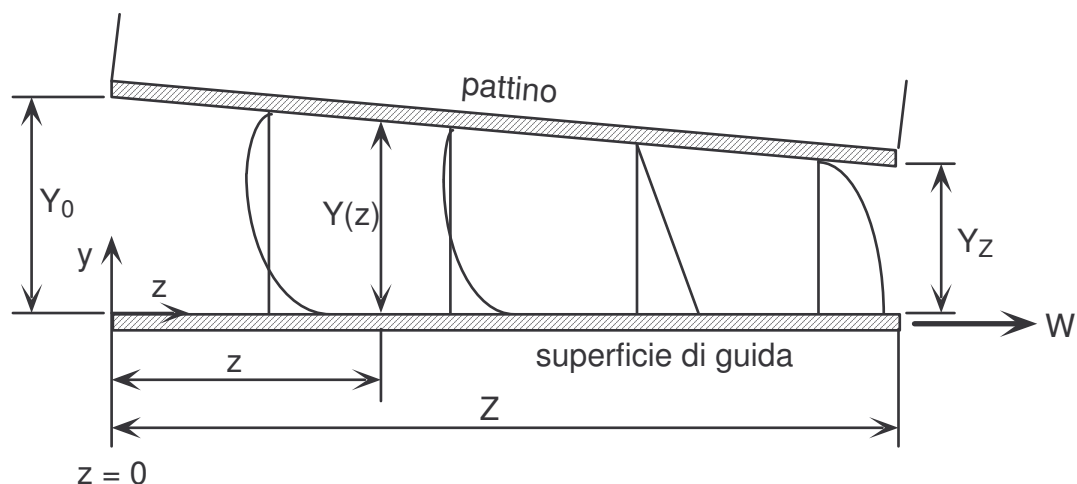


Fig. 8.4.- Andamento delle velocità.-

Lo studio del fenomeno della lubrificazione idrodinamica, come illustrato in fig. 8.4, può essere ricondotto all'analisi fluidodinamica del moto di un liquido all'interno di un meato convergente che si trova fra una superficie di guida, in moto con velocità W , e un pattino fermo. Per semplicità si assume che le due superfici in direzione x siano molto estese in modo che il moto possa essere considerato bidimensionale: si parla in questo caso di **cuscinetto infinito**, nel senso che non si considerano le variazioni della velocità e della pressione lungo la x .

In questa situazione, a una generica distanza z , l'altezza del meato Y è funzione della posizione z e della geometria del cuscinetto

$$Y = Y_0 - \frac{Y_0 - Y_Z}{Z} z = Y_0 - \alpha z, \quad (8.5.1)$$

dove Y_0 è l'altezza per $z = 0$, Y_Z l'altezza per $z = Z$ e α è la leggera inclinazione del pattino, mentre il profilo della velocità w lungo la coordinata y è dato dalla equazione (8.3.3)

$$w = W \left(1 - \frac{y}{Y} \right) - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y (Y - y)$$

e il suo andamento è riportato in fig. 8.4 per alcuni valori di z .

La portata volumetrica assume il valore

$$\begin{aligned} G_v &= \int_0^Y w \, dy = \int_0^Y \left[W \left(1 - \frac{y}{Y} \right) - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} y (Y - y) \right] dy = \\ &= W \left([y]_0^Y - \frac{1}{2Y} [y^2]_0^Y \right) - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{Y}{2} [y^2]_0^Y - \frac{1}{3} [y^3]_0^Y \right) = \\ &= W \left(Y - \frac{Y^2}{2Y} \right) - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{Y^3}{2} - \frac{Y^3}{3} \right) = \frac{1}{2} W Y - \frac{1}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} Y^3. \quad (8.5.2) \end{aligned}$$

Dall'equazione di continuità

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

integrata nell'altezza del meato Y

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_0^Y w \, dy = \frac{\partial G_v}{\partial z} = 0$$

e dalla (8.5.2) si ottiene l'equazione di Reynolds della lubrificazione

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Y^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{Y}{2} W \right) = 0. \quad (8.5.3)$$

con le seguenti condizioni al contorno

$$p = 0 \quad \text{per} \quad z = 0 \quad (Y = Y_0) \quad , \quad p = 0 \quad \text{per} \quad z = Z \quad (Y = Y_Z).$$

Dalla (8.5.1) si ha $\partial Y = -\alpha \cdot \partial z$, per cui integrando due volte la (8.5.3) nella funzione cercata p si ricava

$$\frac{Y^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{Y}{2} W + a = 0 \rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{6\mu W}{Y^2} - \frac{12\mu a}{Y^3} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial Y} = -\frac{6\mu W}{\alpha Y^2} + \frac{12\mu a}{\alpha Y^3}$$

$$p = \frac{6\mu W}{\alpha Y} - \frac{6\mu a}{\alpha Y^2} + b ; \quad (8.5.4)$$

le condizioni al contorno imposte alla velocità consentono di scrivere le due equazioni

$$p(Y_0) = \frac{6\mu}{\alpha} \left(\frac{W}{Y_0} - \frac{a}{Y_0^2} \right) + b = 0 \quad , \quad p(Y_Z) = \frac{6\mu}{\alpha} \left(\frac{W}{Y_Z} - \frac{a}{Y_Z^2} \right) + b = 0$$

da cui è possibile ricavare le due costanti d'integrazione

$$a = \frac{Y_0 Y_Z}{Y_0 + Y_Z} W \quad , \quad b = -\frac{6\mu W}{\alpha (Y_0 + Y_Z)} ; \quad (8.5.5)$$

infine, inserendo le costanti (8.5.5) nell'integrale generale (8.5.4), si ricava la soluzione particolare cercata

$$p = \frac{6\mu W}{\alpha (Y_0 + Y_Z) Y^2} \left[-Y^2 + (Y_0 + Y_Z) Y - Y_0 Y_Z \right] \quad (8.5.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{6\mu W}{Y^2} \left[1 - \frac{2 Y_0 Y_Z}{Y (Y_0 + Y_Z)} \right] . \quad (8.5.7)$$

La (8.5.1) consente di trovare l'altezza del meato Y in funzione del valore generico di z fra 0 e Z , mentre la (8.5.6) il valore della pressione e la (8.5.7) il suo gradiente, entrambi riportati in fig. 8.5.

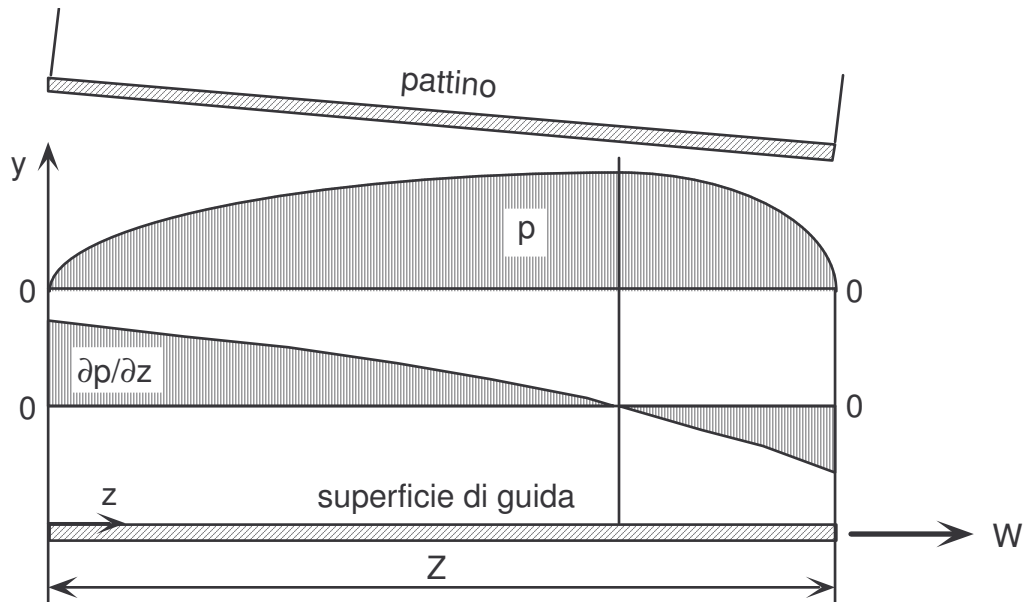


Fig. 8.5.- Distribuzione della pressione e del suo gradiente.-

La portata data dalla relazione (8.5.2), mediante la (8.5.7), diventa uguale alla costante d'integrazione a della relazione (8.5.5)

$$G_v = \frac{Y_0 Y_Z}{Y_0 + Y_Z} W .$$

L'equazione di Reynolds (8.5.3) è valida in assoluto e può essere applicata anche al caso di un cuscinetto circolare: la geometria del meato è però differente (vedi fig. 8.6) e la legge dell'altezza vale

$$Y = g + e \cos(\alpha)$$

dove $g = R - r$ è il gioco, cioè la differenza fra il raggio del cuscinetto R e il raggio del perno r , e è l'eccentricità, cioè la distanza fra i centri del cuscinetto e del perno, e α è la coordinata circonferenziale (corrispondente a z nel caso del cuscinetto piano) con origine nella posizione di altezza massima del meato.

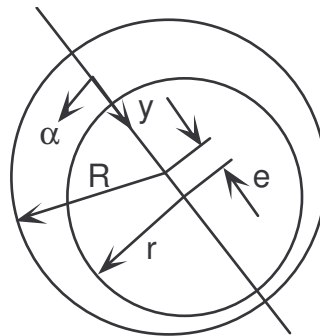


Fig. 8.6.- Cuscinetto portante a strisciamento.-

8.6. STRATO LIMITE VISCOSO

Nel § 5.1 si è parlato dell'esistenza di uno strato limite viscoso, che influenza il campo della velocità. In questo paragrafo si intende approfondire lo studio di tale fenomeno che si incontra molto spesso nei problemi di natura fluidodinamica.

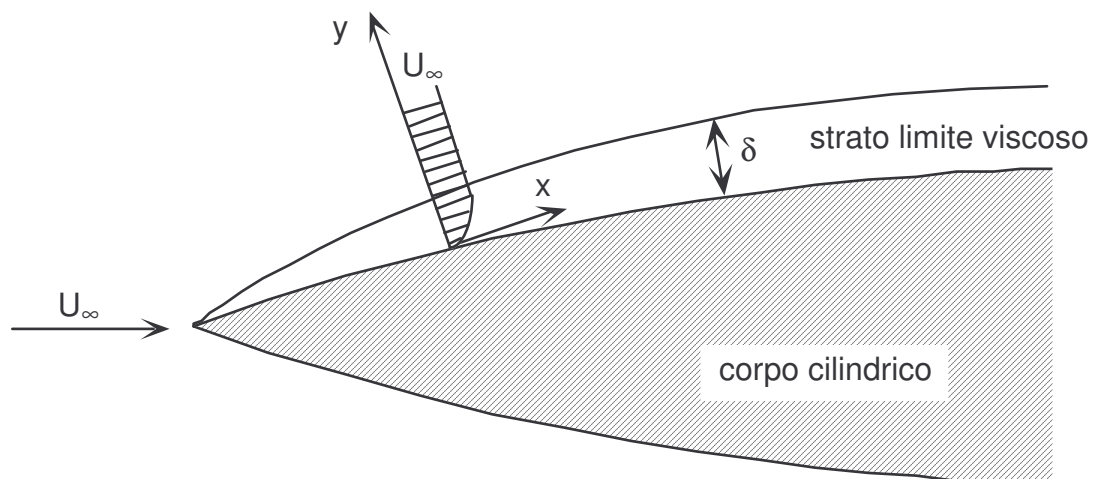


Fig. 8.7.- Strato limite viscoso lungo una parete.-

Si consideri un moto bidimensionale di un fluido, avente viscosità bassa ma tale da mantenere il flusso nel campo laminare, attorno a un corpo cilindrico sagomato (vedi fig. 8.7). A eccezione della zona nelle immediate vicinanze della superficie e-

sterna del corpo immerso, le velocità sono dell'ordine di quella del flusso indisturbato U_∞ e la distribuzione delle linee di corrente non si allontana molto da quelle di un fluido non viscoso. Tuttavia analisi sperimentali dettagliate mostrano che il fluido non scivola via ma aderisce alla parete e che il passaggio da velocità nulla a velocità imperturbata si verifica in uno strato molto sottile vicino alla parete.

Nel 1904 Prandtl propose un metodo approssimato di soluzione dividendo il campo del moto in due regioni distinte: lo strato sottile nelle immediate vicinanze del campo in cui il gradiente della velocità normale alla parete $\partial u / \partial y$ è molto elevato e la zona rimanente in cui non si verificano gradienti di velocità e dove la viscosità non assume un ruolo importante. Nello strato sottile, che in seguito verrà chiamato **strato limite viscoso**, anche se la viscosità è bassa, le tensioni tangenziali $\sigma_{yx} = \mu (\partial u / \partial y)$ raggiungono valori elevati a causa dei forti gradienti di velocità. Con questo concetto Prandtl superò il cosiddetto paradosso di d'Alembert (vedi § 1.7) in quanto qualsiasi valore della viscosità, anche piccolo, può dare luogo a resistenze e a eventuali separazioni e scie.

All'interno dello strato limite la velocità puntuale raggiunge quella indisturbata in modo asintotico, e questo è verificato sperimentalmente, per cui risulta difficile dare un'indicazione del suo spessore. Allora, come indicato nella fig. 8.8, per spessore dello strato limite δ si intende quella distanza y dalla parete in cui la velocità raggiunge il valore $u = 0.99 U_\infty$; all'esterno (dove $y > \delta$) le forze viscosse possono essere trascurate e possono essere usate le equazioni di Eulero (4.2.3) con condizioni al contorno poste alla distanza $y = \delta$ dalla parete, mentre al suo interno (dove $y < \delta$) le forze di origine viscosa sono significative e devono essere usate le equazioni di Navier - Stokes.

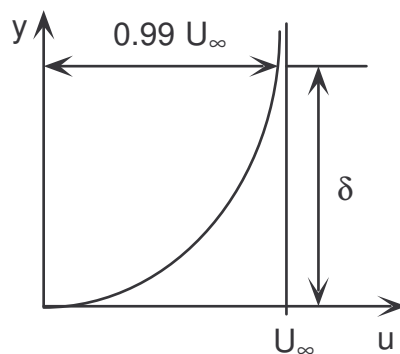


Fig. 8.8.- Profilo della velocità vicino alla parete.-

Queste equazioni, però, possono essere semplificate se lo spessore dello strato limite viscoso δ è molto piccolo rispetto alla dimensione caratteristica L del problema, per esempio la lunghezza della parete. In questo caso, se si prendono le quantità x e u di ordine 1, $O(1)$, e le quantità y e v di ordine δ , $O(\delta)$, dove $\delta \ll 1$ (l'analisi infatti è limitata allo strato limite e non esistono valori di y maggiori di δ), tutti i termini delle equazioni assumono gli ordini di grandezza seguenti

$$\begin{aligned}
 & x \quad O(1) \quad , \quad y \quad O(\delta) \\
 & u \quad O(1) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} \quad O(1) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad O\left(\frac{1}{\delta}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad O(1) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad O\left(\frac{1}{\delta^2}\right) \\
 & v \quad O(\delta) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad O(\delta) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad O(1) \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad O(\delta) \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad O\left(\frac{1}{\delta}\right) .
 \end{aligned}$$

Gli ordini di grandezza dell'equazione di continuità adimensionalizzata (7.3.2) in due dimensioni per un fluido incompressibile sono

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ,$$

mentre quelli delle equazioni di Navier - Stokes (5.5.10) in due dimensioni, in condizioni stazionarie e in assenza di forze di massa per un fluido incompressibile sono

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{\delta} \frac{1}{\delta} \quad \frac{1}{1} \quad \left[\delta^2 \right] \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{\delta^2}$$

$$\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{1}{1} \frac{1}{\delta} \frac{1}{\delta} \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \left[\delta^2 \right] \quad \frac{1}{\delta} \quad \frac{1}{\delta}$$

Da queste due ultime equazioni si nota che le quantità $\partial^2 u / \partial x^2$ e $\partial^2 v / \partial x^2$ sono piccole paragonate rispettivamente a $\partial^2 u / \partial y^2$ e $\partial^2 v / \partial y^2$ e quindi possono essere trascurate; inoltre, affinché le forze viscosi possano essere dello stesso ordine di quelle d'inerzia, il rapporto fra viscosità e massa volumica deve avere ordine $[\delta^2]$ e quindi un valore pari almeno a 1000.

Le equazioni diventano allora

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} . \quad (8.6.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

e vengono chiamate **equazioni di Prandtl** o equazioni dello strato **limite viscoso**.

8.7. LASTRA SOTTILE

Il caso più semplice di applicazione delle equazioni dello strato limite viscoso è costituito dal moto lungo una lastra sottile a incidenza zero, come rappresentato in fig. 8.9; storicamente fu anche il primo esempio applicativo della teoria di Prandtl, fu discusso da Blasius, studente di Prandtl, nella sua tesi e fu pubblicato nel 1908. Per risolvere questo problema Blasius ricorse a un'equazione più semplice di quelle offerte dalla teoria dello strato limite (8.6.1) ed assunse una situazione in cui non esistesse un gradiente di pressione (cioè in cui le forze di attrito si opponessero solamente alle forze d'inerzia) e in cui i profili adimensionali delle velocità all'interno di uno strato vicino alla parete $0 \leq y \leq \delta$, dove δ è lo spessore della zona in cui si sentono gli effetti della viscosità, restassero costanti al variare della coordinata x . Nella fig. 8.9 le altezze dello strato limite sono esagerate.

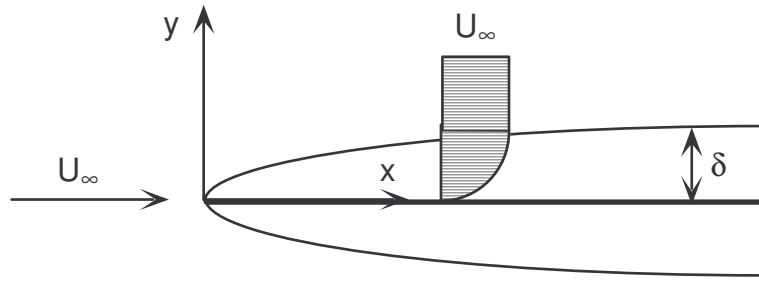


Fig. 8.9.- Strato limite lungo una lastra sottile a incidenza zero.-

L'ipotesi della mancanza di un gradiente di pressione semplifica le equazioni dimensionali dello strato limite (8.6.1) nel modo seguente

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8.7.1.a)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8.7.1.b)$$

con le condizioni al contorno seguenti

c.c. 1:	$x = 0$,	$u = U_\infty$	per tutti gli y
c.c. 2:	$y = 0$,	$u = 0$	per tutti gli x
c.c. 3:	$y = \infty$,	$u = U_\infty$	per tutti gli x
c.c. 4:	$y = 0$,	$v = 0$	per tutti gli x .

L'ipotesi della costanza dei profili riduce invece le variabili indipendenti da due $[x, y]$ a una che le comprende entrambe $[\eta]$. Questo tipo di impostazione offre l'occasione di utilizzare per la soluzione del problema il metodo di "combinazione delle variabili", il quale permette di trasformare una equazione differenziale a derivate parziali in una equazione differenziale ordinaria quando due delle condizioni addizionali possono essere riunite in una sola condizione.

Blasius assunse per la coordinata adimensionale η (qui non viene spiegata la ragione di questa assunzione) il valore

$$\eta = y \sqrt{\frac{\rho U_\infty}{\mu x}} \quad (8.7.2)$$

e dopo un lungo ragionamento che qui viene saltato trovò come soluzione del problema l'equazione

$$f(\eta) f'(\eta) + 2 f'''(\eta) = 0 \quad (8.7.3)$$

dove la derivata $f'(\eta)$ è l'andamento della velocità all'interno dello strato limite

$$f'(\eta) = \frac{u}{U_\infty} \quad (8.7.4)$$

L'equazione (8.7.3), di complessa soluzione analitica, è risolta numericamente ed offre i valori riportati nella tab. 8.1.

$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	$f(\eta)$	$f'(\eta) = \frac{u}{U_\infty}$	$f''(\eta)$	$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	$f(\eta)$	$f'(\eta) = \frac{u}{U_\infty}$	$f''(\eta)$
0.0	0.00000	0.00000	0.33206	4.6	2.88826	0.98269	0.02948
0.2	0.00664	0.06641	0.33199	4.8	3.08534	0.98779	0.02187
0.4	0.02656	0.13277	0.33147	5.0	3.28329	0.99155	0.01591
0.6	0.05974	0.19894	0.33008	5.2	3.48189	0.99425	0.01134
0.8	0.10611	0.26471	0.32739	5.4	3.68094	0.99616	0.00793
1.0	0.16557	0.32979	0.32301	5.6	3.88031	0.99748	0.00543
1.2	0.23795	0.39378	0.31659	5.8	4.07990	0.99838	0.00365
1.4	0.32298	0.45627	0.30787	6.0	4.27964	0.99898	0.00240
1.6	0.42032	0.51676	0.29667	6.2	4.47948	0.99937	0.00155
1.8	0.52952	0.57477	0.28293	6.4	4.67938	0.99961	0.00098
2.0	0.65003	0.62977	0.26675	6.6	4.87931	0.99977	0.00061
2.2	0.78120	0.68132	0.24835	6.8	5.07928	0.99987	0.00037
2.4	0.92230	0.72899	0.22809	7.0	5.27926	0.99992	0.00022
2.6	1.07252	0.77246	0.20646	7.2	5.47925	0.99996	0.00013
2.8	1.23099	0.81152	0.18401	7.4	5.67924	0.99996	0.00007
3.0	1.39682	0.84605	0.16136	7.6	5.87924	0.99998	0.00004
3.2	1.56911	0.87609	0.13913	7.8	6.07923	0.99999	0.00002
3.4	1.74696	0.90177	0.11788	8.0	6.27923	1.00000	0.00001
3.6	1.92954	0.92333	0.09809	8.2	6.47923	1.00000	0.00001
3.8	2.11605	0.94112	0.08013	8.4	6.67923	1.00000	0.00000
4.0	2.30576	0.95552	0.06424	8.6	6.87923	1.00000	0.00000
4.2	2.49806	0.96696	0.05052	8.8	7.07923	1.00000	0.00000
4.4	2.69238	0.97587	0.03897	9.0	7.27923	1.00000	0.00000

Tab. 8.1.- Valori di $f(\eta)$, di $f'(\eta)$ e di $f''(\eta)$ in funzione di η .-

I valori della funzione (8.7.4) tratti dalla tab. 8.1 sono rappresentati graficamente nella fig. 8.10.

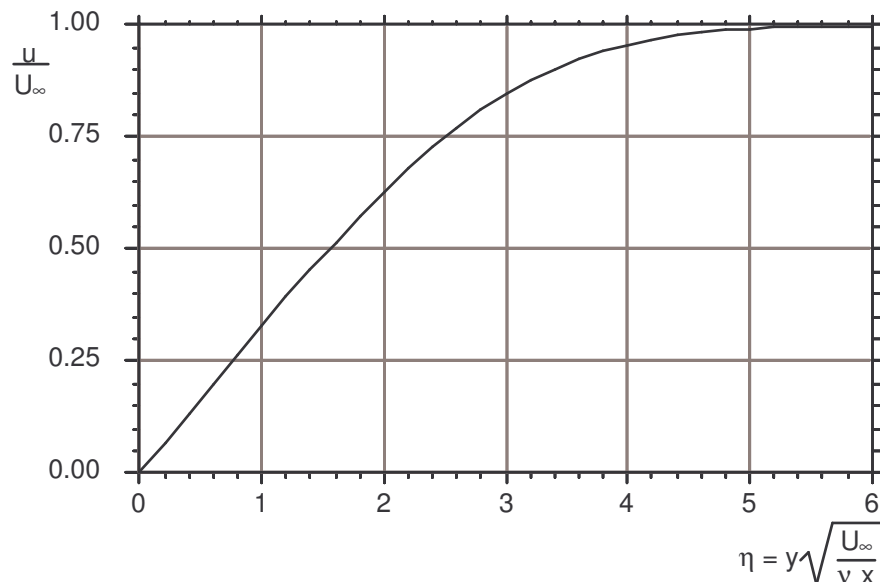


Fig. 8.10.- Andamento della velocità all'interno dello strato limite.-

Dalla tab. 8.1 e dalla fig. 8.10 si deduce che lo spessore dello strato limite, inteso come distanza dalla parete in cui la velocità raggiunge il valore $u = 0.99 \cdot U_\infty$, si verifica per $\eta \approx 5.0$ e quindi, dalla definizione di coordinata adimensionale (8.7.2), diventa

uguale a

$$\eta = \delta \sqrt{\frac{\rho U_{\infty}}{\mu x}} \rightarrow \delta \cong 5.0 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_{\infty}}} = 5.0 x \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_{\infty} x}} = \frac{5.0 x}{Re_x^{0.5}} \quad (8.7.5)$$

dove Re_x è il numero di Reynolds riferito alla distanza x dal bordo di attacco.

La tensione tangenziale della legge di Newton, usando la (8.7.2) e la (8.7.4), diventa

$$\sigma_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu U_{\infty} f''(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \mu U_{\infty} f''(\eta) \sqrt{\frac{\rho U_{\infty}}{\mu x}}$$

e, moltiplicando e dividendo (sotto la radice) la relazione precedente per $\rho U_{\infty}/\mu$, si ottiene

$$\sigma_{yx} = \mu U_{\infty} f''(\eta) \frac{\rho}{\mu} U_{\infty} \sqrt{\frac{\rho U_{\infty}}{\mu x} \frac{\mu^2}{\rho^2 U_{\infty}^2}} = \rho U_{\infty}^2 f''(\eta) \sqrt{\frac{\mu}{\rho U_{\infty} x}} = f''(\eta) \frac{\rho U_{\infty}^2}{\sqrt{Re_x}} ;$$

sulla parete, mediante il valore di $f''(\eta)$ dedotto dalla tab. 8.1 per $\eta = 0$, la tensione vale

$$\tau_w = \sigma_{yx}|_{y=0} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = f''(\eta)|_{\eta=0} \frac{\rho U_{\infty}^2}{\sqrt{Re_x}} = 0.332 \frac{\rho U_{\infty}^2}{\sqrt{Re_x}} . \quad (8.7.6)$$

Definendo come **coefficiente di attrito superficiale** c_f il rapporto fra la tensione tangenziale di parete τ_w e la pressione dinamica p_d contraddistinta dalla relazione (4.4.3.1)

$$c_f = \frac{\tau_w}{p_d} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2} = \frac{2 \tau_w}{\rho U_{\infty}^2}$$

si ha

$$c_f = \frac{2 \tau_w}{\rho U_{\infty}^2} = \frac{2 \times 0.332 \frac{\rho U_{\infty}^2}{\sqrt{Re_x}}}{\rho U_{\infty}^2} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} . \quad (8.7.7)$$

8.8. ENTRATA NEI CONDOTTI

Si consideri il fenomeno di un fluido che entra in un canale delimitato da due lastre piane infinite provenendo da un serbatoio di capacità molto grande, in teoria infinita; allo scopo di permettere un'analisi matematica più semplice, si assume che il profilo della velocità sia uniforme anche se l'ipotesi non corrisponde esattamente alla situazione reale. Non appena però il fluido entra nel canale, a causa dell'attrito viscoso, lungo entrambe le pareti si formano due strati limite che aumentano nella direzione del moto comportandosi in modo analogo a quello definito nel § 8.7. La constatazione che il fluido subisce una decelerazione all'interno dello strato limite e l'ulteriore ipotesi che il fluido mantenga un profilo di velocità uniforme all'esterno dello strato limite portano in una sezione generica alla definizione di un profilo totale, riportato nel-

la fig. 8.11, costituito da due profili di strato limite vicino alle pareti uniti al centro del canale (cuore o zona di corrente libera) da una linea a velocità costante.

La diminuzione della velocità lungo la direzione del moto all'interno degli strati limite provoca in essi, in base all'equazione di continuità, lo svilupparsi di una componente della velocità in direzione perpendicolare e, dato che la portata su ogni sezione del canale deve mantenersi costante, fa contemporaneamente insorgere al di fuori di essi un'accelerazione lungo la direzione del moto; ed è quest'ultimo aumento di velocità che altera il comportamento degli strati limite, rispetto a quello della lastra sottile studiato nel § 8.7 con una velocità indisturbata costante, provocando una continua diminuzione della sua crescita (vedi la relazione 8.7.5). L'allargamento asintotico dei due strati limite infine, se la distanza fra le due lastre non è elevata rispetto alla lunghezza del canale, provoca la loro progressiva unione e a una certa distanza dalla sezione di ingresso crea la distribuzione parabolica (vedi fig. 8.11) tipica del profilo laminare pienamente sviluppato del moto di Couette discusso nel § 8.3. Questa distanza viene chiamata **lunghezza iniziale teorica**.

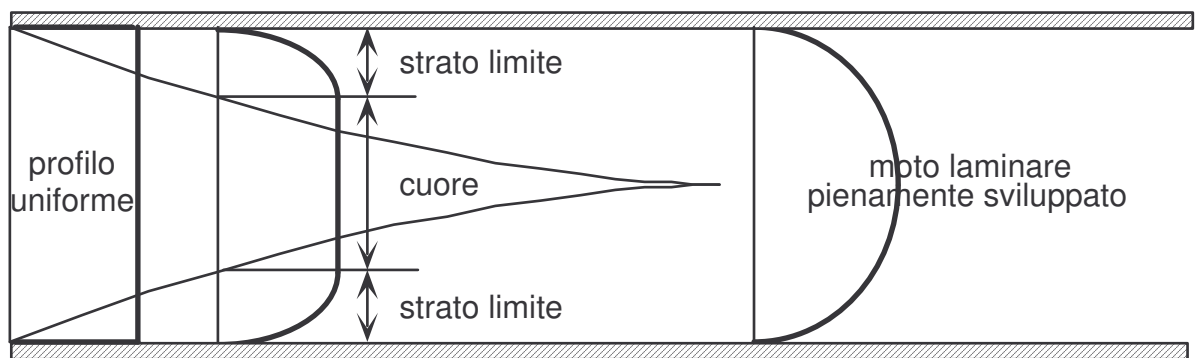


Fig. 8.11.- Sviluppo dello strato limite all'ingresso di un canale.-

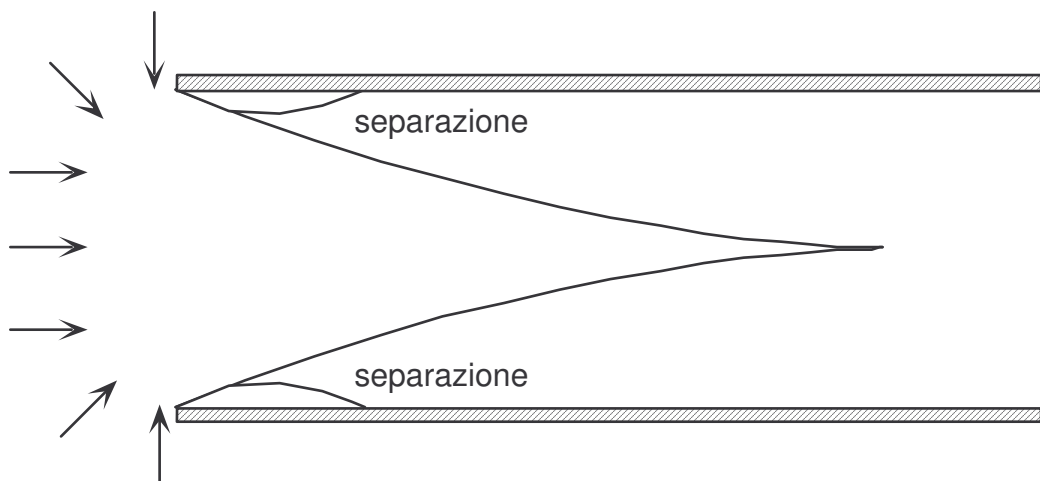


Fig. 8.12.- Zona di separazione all'ingresso di un canale.-

La lunghezza iniziale teorica si basa sul concetto idealizzato che il profilo della velocità all'ingresso nel canale sia uniforme, ma in realtà, come rappresentato in fig. 8.12, il flusso entrante presenta una componente più o meno grande nella direzione perpendicolare a quella del moto principale; se questa componente trasversale non è trascurabile, vicino all'ingresso si forma una regione di scia o di separazione con velocità relativamente bassa. All'interno di questa zona il moto è formato da tanti piccoli vortici disordinati e può anche causare un'anticipata trasformazione dello strato limite da laminare a turbolento che non competerebbe a quel numero di Reynolds (vedi

capitolo 9). Per evitare la formazione della zona di separazione, che alla fine si traduce in maggiori perdite continue e localizzate, lo spigolo di entrata viene arrotondato.

La discussione, fin qui portata avanti e valida per canali con pareti parallele, può anche essere applicata al caso di tubi a sezione circolare; il problema infatti, pur rimanendo inalterato nella sua essenza, deve solamente essere studiato in coordinate cilindriche invece che in coordinate cartesiane ortogonali. Lo strato limite si forma lungo tutta la parete cilindrica del tubo e cresce attorno al suo asse geometrico.

La lunghezza L necessaria per la formazione del profilo laminare pienamente sviluppato di Hagen - Poiseuille discusso nel § 8.4 può essere stimata in un tubo mediante una delle equazioni teoriche sviluppate per la lunghezza iniziale teorica, come per esempio quella di Langhaar

$$\frac{L}{D} = 0.0575 \text{ Re}$$

dove D è il diametro del tubo ed Re è il numero di Reynolds riferito al diametro e alla velocità media, valida per numeri di Reynolds fino a 2300. Per numeri di Reynolds superiori si verifica la transizione verso il moto turbolento e il discorso verrà ripreso in quella sede nel capitolo 9.