

CAPITOLO 9

MOTO TURBOLENTO

9.1. GENERALITÀ

Nella meccanica dei fluidi un posto di notevole importanza è occupato dalla **transizione** fra moto laminare e moto turbolento e dal **moto turbolento** stesso, perché il comportamento dei fluidi sotto questi regimi differisce, anche di molto, da quello in regime laminare. Il moto turbolento è stato studiato sperimentalmente per la prima volta all'interno dei tubi da Reynolds, che nel 1883 inserì nella corrente d'acqua un sottile filo di liquido colorato per visualizzare il moto delle particelle (vedi fig. 9.1).

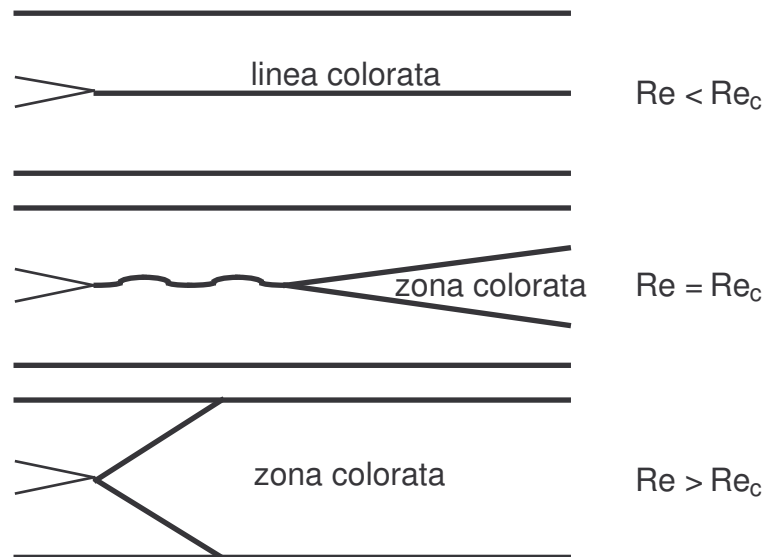


Fig. 9.1.- Esperienza di Reynolds.-

In un moto a numero di Reynolds basso (moto laminare) all'interno di un tubo dritto con sezione trasversale uniforme e con pareti lisce la linea colorata mantiene lungo la corrente tutti i contorni ben definiti. Il moto si sviluppa in modo ordinato lungo strati fra loro paralleli e le particelle si muovono con velocità uniforme lungo una traiettoria rettilinea; si nota anche che vicino alle pareti le particelle sono rallentate dalle forze viscosive. A più elevati numeri di Reynolds, prossimi a quello critico (moto di transizione), la linea colorata comincia a presentare oscillazioni e ad un certo punto si apre a cono colorando tutta l'acqua circostante. A numeri di Reynolds ancora più elevati l'ordinato modo di fluire cessa di esistere del tutto (moto turbolento) e il liquido colorato si diffonde nella corrente creando un cono avente per vertice il punto di inserimento del liquido e rendendo il fluido uniformemente colorato a breve distanza verso valle. Si sono instaurati forti mescolamenti di tutte le particelle.

Sostanzialmente, quando il moto diventa turbolento, a quello principale nella direzione dell'asse del tubo si sovrappone un moto secondario ad angolo retto che provoca il mescolamento. Il moto secondario trasferisce quantità di moto dalla direzione

assiale a quella trasversale e quindi modifica la distribuzione della velocità lungo la sezione normale del tubo. Da un andamento parabolico, in accordo con la soluzione di Hagen - Poiseuille (vedi § 8.4), si passa ad uno più uniforme (vedi fig. 9.2); a portata massica costante la velocità diminuisce in corrispondenza dell'asse del tubo, mentre aumenta in prossimità delle pareti.

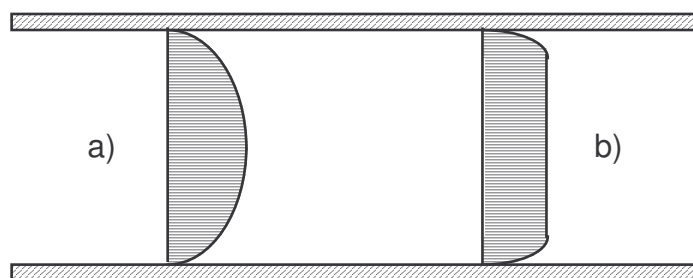


Fig. 9.2.- Profilo della velocità in un tubo: a) moto laminare; b) moto turbolento.-

Con un'indagine sistematica del moto all'interno dei tubi, Reynolds scoperse la **legge di similitudine** che porta il suo nome; essa stabilisce che la transizione fra moto laminare e moto turbolento si manifesta sempre in vicinanza dello stesso numero di Reynolds, detto **critico**, il cui valore risulta approssimativamente pari a $Re_c = 2300$. Reynolds intuì anche che il valore critico dipendesse fortemente, oltre che dalle condizioni incontrate dal fluido all'interno del tubo, anche da quelle trovate prima di entrarvi. Questo fatto è stato confermato sperimentalmente in tempi successivi, nel 1905 e nel 1910, quando si riuscirono a mantenere moti laminari fino a numeri di Reynolds critici di 20000 e 40000 a patto di assicurare un ingresso eccezionalmente privo di disturbi. Se da un lato non è ancora noto un valore massimo per il numero critico, esiste invece un valore minimo; al di sotto di 2000, infatti, il moto rimane sempre laminare anche in presenza di disturbi molto forti.

9.2. TRANSIZIONE

La transizione fra moto laminare e moto turbolento è accoppiata ad una modifica sostanziale nella legge della resistenza. Nelle tubazioni, infatti, il coefficiente di resistenza f (definito nel § 5.7) nel moto laminare è inversamente proporzionale al numero di Reynolds (vedi § 10.2.1), mentre nel moto turbolento si modifica nelle leggi empiriche trovate da vari ricercatori (vedi § 10.2.1). Di conseguenza il gradiente della pressione longitudinale che mantiene il moto nel caso laminare è proporzionale alla prima potenza della velocità (8.4.6), mentre nel caso turbolento diventa proporzionale alla potenza $7/4$ della velocità media del moto. L'aumento della resistenza nel moto turbolento è dovuto al mescolamento che verrà analizzato nel seguito del capitolo.

Indagini sperimentali dettagliate (1956) rivelano che in un certo campo di numeri di Reynolds attorno a quello critico il moto diventa **intermittente**, nel senso che passa alternativamente da laminare a turbolento e viceversa. I diagrammi della velocità determinati all'interno di un tubo dimostrano che, nel tempo, periodi di moto laminare e turbolento si succedono uno all'altro in una sequenza casuale; la natura fisica di questo moto è descritta in modo adatto dal **fattore di intermittenza** γ , che è definito come la frazione di tempo durante la quale il moto turbolento, in una data posizione, rimane inalterato. A numeri di Reynolds costanti (variabili da 2300 a 2600) il fattore di intermittenza γ aumenta in modo continuo dall'ingresso verso l'uscita del tubo fino a diventare unitario (moto turbolento pienamente sviluppato); per numeri di Reynolds vicini al limite inferiore il fattore diventa prossimo a 1 a distanze molto grandi dall'ingresso, valutabili anche a migliaia di diametri.

Molto importante è anche il fenomeno della transizione che si verifica all'interno dello strato limite, perché il campo di moto attorno ad un corpo immerso in una corrente fluida e, in particolare, la forza esercitata su di esso sono fortemente influenzati dal fatto che lo strato limite sia laminare o turbolento. La transizione all'interno dello strato limite è stata scoperta molto dopo la transizione nei tubi e dipende da molti parametri, i più importanti dei quali sono la distribuzione della pressione, la rugosità delle pareti e la natura dei disturbi nel moto libero (intensità della turbolenza).

9.3. METODO DEI PICCOLI DISTURBI

Le indagini teoriche per chiarire e per spiegare il processo di transizione fra moto laminare e moto turbolento si basano sull'assunzione che i moti laminari siano affetti da **piccoli disturbi** che possono crearsi per la presenza di discontinuità geometriche o di irregolarità del moto (per esempio l'ingresso del fluido all'interno di un tubo o l'effetto della rugosità di una parete). La teoria cerca di seguire nel tempo il comportamento di tali disturbi: se essi diminuiscono nel tempo il moto principale è considerato stabile, mentre se aumentano il moto è considerato instabile e quindi si verifica la possibilità di transizione verso un moto di tipo turbolento.

Questa **teoria della stabilità**, il cui oggetto è di predire il valore del numero di Reynolds critico, fu tracciata nelle sue basi attorno al 1895 da Reynolds e negli anni seguenti fu ripresa e approfondita da Rayleigh e da Prandtl. Essa parte dal presupposto che il moto laminare è una soluzione delle equazioni differenziali della fluidodinamica e diventa instabile al di sopra del numero di Reynolds critico, trasformandosi in moto turbolento, pur rimanendo sempre soluzione delle stesse equazioni. In altri termini si può dire che le equazioni differenziali sono valide per i due tipi di moto, mentre è il modello del moto che deve essere cambiato.

In questo contesto non è possibile fare un'analisi dettagliata dei concetti matematici su cui si basa la teoria della stabilità; è sufficiente dire che essa scompone il flusso in un **moto medio**, la cui stabilità costituisce l'argomento dell'indagine, e in un **disturbo** ad esso sovrapposto (vedi fig. 9.3).

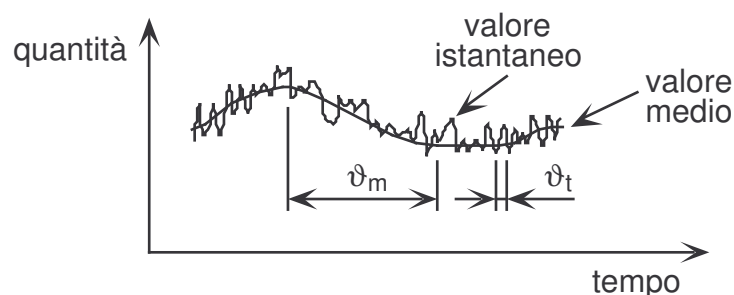


Fig. 9.3.- Andamento del moto medio e delle fluttuazioni.-

Il moto medio, che può essere considerato come stazionario, è modellato mediante le componenti cartesiane della velocità $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ e mediante la pressione $\bar{p}$ e il disturbo non stazionario mediante le corrispondenti quantità u' , v' , w' e p' . Con queste ipotesi il moto risultante può essere descritto dalla somma dei due moti

$$u = \bar{u} + u' \quad , \quad v = \bar{v} + v' \quad , \quad w = \bar{w} + w' \quad , \quad p = \bar{p} + p' ; \quad (9.3.1)$$

sia il moto medio ($\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{p}$) che quello istantaneo (u , v , w , p) soddisfano le equazioni di Navier - Stokes.

9.4. FLUTTUAZIONI

Il moto turbolento è costituito da una corrente principale sulla quale è sovrapposta una fluttuazione irregolare molto complessa nei dettagli da non poter essere assoggettata a nessun trattamento matematico. Le fluttuazioni sono costituite da bolle di fluido di grandezza variabile, funzione delle condizioni esterne associate al moto, come per esempio le dimensioni di un ostacolo o di una sezione di passaggio, che continuamente si riuniscono e si disintegrano.

Il movimento disordinato delle bolle crea nei filetti fluidi un mescolamento che all'esterno viene avvertito come se la viscosità fosse aumentata di un fattore pari a cento volte e talora anche a diecimila volte e più. Questo fenomeno è responsabile della maggiore resistenza, che il fluido trova nel moto all'interno dei tubi e che le navi e gli aeroplani incontrano nel loro avanzamento, e delle maggiori perdite, che si verificano all'interno delle turbomacchine e dei compressori; nel contempo però permette di ottenere maggiori incrementi di pressione nei diffusori o lungo le ali degli aeroplani o lungo le pale dei compressori: infatti, se il moto fosse laminare e privo di turbolenza, si potrebbero più facilmente verificare distacchi della corrente dalla parete e quindi un minore recupero di energia nei diffusori o una minore portanza delle ali o una minore potenza delle macchine.

Si è già accennato nel paragrafo precedente che per la modellazione matematica di un moto turbolento sia conveniente la sua scomposizione in un moto mediato nel tempo e in un disturbo o **fluttuazione** (9.3.1). Nel caso generale si può scrivere che la media temporale della quantità generica φ in un punto fisso nello spazio valga

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\vartheta} \int_{t_0}^{t_0 + \vartheta} \varphi \, dt$$

dove ϑ è un intervallo di tempo sufficientemente lungo per rendere il valore medio indipendente dal tempo, ma non tanto lungo da far perdere informazioni sull'evoluzione transitoria del fenomeno. In altre parole (vedi fig. 9.3) deve essere grande rispetto alla scala temporale ϑ_t della turbolenza e piccolo rispetto a quello relativo ad ogni variazione significativa del campo di moto ϑ_m .

La grandezza delle fluttuazioni della velocità riferita alla velocità indisturbata della corrente principale viene chiamata **scala della turbolenza** e vale

$$s = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}}{U_\infty}.$$

I valori tipici della scala della turbolenza sono approssimativamente il 10 % della velocità media e per l'aria le velocità delle fluttuazioni sono comprese fra 0.01 m/s e 10 m/s; questi valori, confrontati con quelli della velocità media delle molecole dell'aria che si aggira attorno a 500 m/s, sono molto piccoli e consentono di affermare che il campo delle scale della turbolenza è sufficientemente lontano da quello delle scale molecolari.

Nelle gallerie a vento si devono ottenere valori della scala della turbolenza anche inferiori a 0.001, mentre nei fenomeni atmosferici essa è elevata e vale circa 0.5. La scala della turbolenza è una variabile molto importante nelle misure sperimentali nelle gallerie a vento perché rappresenta il grado di affidabilità con cui le misure effettuate su un modello possano essere applicate all'opera da realizzare e con cui quelle effettuate in gallerie differenti possano essere confrontate fra loro; essa dipende dall'accurata progettazione aerodinamica dell'impianto e determina la transizione fra moto laminare e moto turbolento (vedi § 9.3).

In tutti i casi in cui è presente un gradiente della velocità media la turbolenza ge-

neralmente è non isotropa, mentre in una galleria a vento ad una certa distanza dagli schermi raddrizzatori (vedi fig. 9.4) si crea nella corrente una **turbolenza isotropa** in cui la media dei quadrati delle fluttuazioni nelle tre direzioni coordinate sono uguali fra loro

$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}$$

e in cui la scala s vale

$$s = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}}{U_\infty} = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{U_\infty}$$

con U_∞ velocità media di trascinamento.

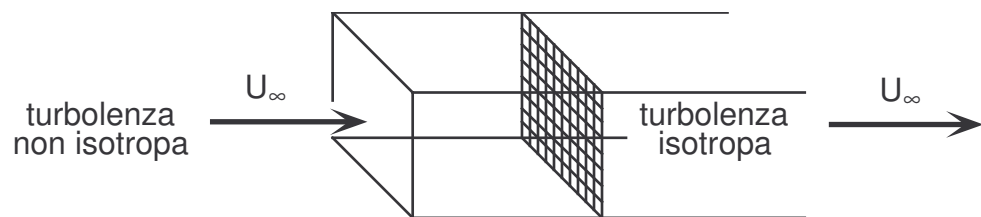


Fig. 9.4.- Flusso turbolento a valle degli schermi raddrizzatori.-

Per definizione, la media temporale di tutte le fluttuazioni è nulla

$$\overline{u'} = \overline{v'} = \overline{w'} = \overline{p'} = 0 \quad , \quad (9.4.1)$$

mentre le principali operazioni sui valori mediati consentono di ottenere

$$\overline{\overline{u} + u'} = \overline{u} + \overline{u'} = \overline{u} \quad , \quad \overline{\overline{v} + v'} = \overline{v} \quad , \quad \overline{\overline{w} + w'} = \overline{w} \quad , \quad \overline{\overline{p} + p'} = \overline{p} \quad , \quad (9.4.2)$$

$$\overline{\overline{u} u'} = \overline{u} \overline{u'} = 0 \quad , \quad \overline{\overline{v} v'} = 0 \quad , \quad \overline{\overline{w} w'} = 0 \quad , \quad \overline{\overline{p} p'} = 0 \quad . \quad (9.4.3)$$

La media temporale del prodotto delle fluttuazioni non è nullo, perché normalmente esiste una correlazione per ognuna di queste quantità.

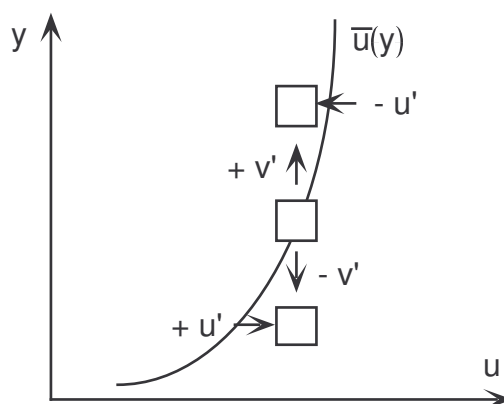


Fig. 9.5.- Correlazione fra componenti fluttuanti della velocità.-

Si consideri infatti un moto medio (vedi fig. 9.5) dato da

$$\bar{u} = \bar{u}(y) \quad , \quad \bar{v} = \bar{w} = 0 \quad \text{con} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} > 0 \quad .$$

Le particelle, che viaggiano verso l'alto per effetto della fluttuazione turbolenta positiva $v' > 0$, arrivano ad uno strato dove la velocità media $\bar{u}$ è superiore a quella dello strato di provenienza; poiché, nel complesso, mantengono la loro velocità originale $\bar{u}$, danno origine ad una componente negativa $u' < 0$. Per contro le particelle, che arrivano dallo strato superiore per effetto di una fluttuazione negativa $v' < 0$, danno origine ad una fluttuazione positiva $u' > 0$. Quindi, mediamente, una $v' > 0$ è associata ad una $u' < 0$ e una $v' < 0$ ad una $u' > 0$; si può allora concludere che le medie nel tempo $\overline{u'v'}$ non solo siano differenti da zero, ma anche negative.

9.5. EQUAZIONI DEL MOTO TURBOLENTO

Mediante il modello di moto turbolento appena descritto le equazioni si modificano nel modo seguente.

9.5.1. EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA MASSA

L'equazione di "continuità per un fluido incompressibile" (3.4.4) mediante la sostituzione delle (9.3.1) diventa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u} + u') + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v} + v') + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{w} + w') = 0 \quad . \quad (9.5.1.1)$$

9.5.2. EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

L'equazione di "Navier - Stokes per un fluido incompressibile" nella direzione x (5.5.9.a), poiché si può scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} + \frac{\partial(wu)}{\partial z} &= u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \\ &= u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad , \end{aligned}$$

assume l'aspetto seguente

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} + \frac{\partial(wu)}{\partial z} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho F_{mx}$$

e con la sostituzione delle (9.3.1) si modifica nella

$$\begin{aligned} \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{u} + u') + \frac{\partial}{\partial x}[(\bar{u} + u')(\bar{u} + u')] + \frac{\partial}{\partial y}[(\bar{v} + v')(\bar{u} + u')] + \frac{\partial}{\partial z}[(\bar{w} + w')(\bar{u} + u')] \right\} = \\ = - \frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + p') + \mu \nabla^2(\bar{u} + u') + \rho F_{mx} \quad ; \end{aligned}$$

poiché è

$$\begin{aligned} (\bar{u} + u')(\bar{u} + u') &= \bar{u} \bar{u} + \bar{u} u' + u' \bar{u} + u' u' \\ (\bar{v} + v')(\bar{u} + u') &= \bar{u} \bar{v} + \bar{u} v' + u' \bar{v} + u' v' \\ (\bar{w} + w')(\bar{u} + u') &= \bar{u} \bar{w} + \bar{u} w' + u' \bar{w} + u' w' \quad , \end{aligned}$$

alla fine diventa

$$\begin{aligned}
 & \rho \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u} + u') + \\
 & \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}\bar{u} + \bar{u}u' + u'\bar{u} + u'u') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}\bar{v} + \bar{u}v' + u'\bar{v} + u'v') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u}\bar{w} + \bar{u}w' + u'\bar{w} + u'w') \right] = \\
 & = - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + p') \\
 & + \mu \nabla^2 (\bar{u} + u') \\
 & + \rho F_{mx} .
 \end{aligned} \tag{9.5.2.1}$$

9.6. EQUAZIONI MEDIATE NEL TEMPO

Il moto turbolento, definito come una condizione di flusso irregolare in denza del quale le diverse proprietà del fluido (densità, velocità, pressione, ecc.) mostrano una variazione casuale rispetto al tempo ed allo spazio, consentono di trovare i valori medi statisticamente significativi di tali proprietà. In questo paragrafo vengono descritte le operazioni effettuate per mediare le equazioni trovate nel § 9.5 sfruttando le definizioni date nel § 9.4.

9.6.1. EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA MASSA

Effettuando la media nel tempo dell'equazione di "continuità" (9.5.1.1) con l'aiuto delle (9.4.2) si ha

$$\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u + u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v + v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w + w'}) = u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 . \tag{9.6.1.1}$$

9.6.2. EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Effettuando la media nel tempo dell'equazione di "Navier - Stokes" (9.5.2.1) si ottiene:

-- per il primo termine mediante le (9.4.2)

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u} + u') = \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} ,$$

-- per il secondo termine mediante le (9.4.1), (9.4.2) e (9.4.3)

$$\begin{aligned}
 & \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}\bar{u} + \bar{u}u' + u'\bar{u} + u'u') + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}\bar{v} + \bar{u}v' + u'\bar{v} + u'v') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u}\bar{w} + \bar{u}w' + u'\bar{w} + u'w') \right] = \\
 & \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}\bar{u} + \overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u}\bar{w} + \overline{u'w'}) \right] = \\
 & \rho \left[\bar{u} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) \right] = \\
 & \rho \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) \right] ,
 \end{aligned}$$

-- per il terzo termine mediante le (9.4.2)

$$- \frac{\partial}{\partial x} (\overline{p + p'}) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} ,$$

-- per il quarto termine mediante le (9.4.2)

$$\mu \nabla^2 (\overline{u + u'}) = \mu \nabla^2 \bar{u} ,$$

-- per il quinto termine

$$\rho F_{mx} = \rho \bar{F}_{mx} .$$

Poiché ragionamenti analoghi possono essere effettuati anche per le componenti in y e z delle equazioni (5.5.9), in definitiva si ottiene

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}) \right] + \rho \bar{F}_{mx} \quad (9.6.2.1.a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v} - \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{v'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{v'w'}) \right] + \rho \bar{F}_{my} \quad (9.6.2.1.b)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{w} - \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} (\overline{w'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{w'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w'w'}) \right] + \rho \bar{F}_{mz} \quad (9.6.2.1.c)$$

9.7. TENSIONI APPARENTI

Le equazioni di continuità (9.6.1.1) e di Navier - Stokes (9.6.2.1) risolvono il problema in esame e sono formalmente uguali alle (3.4.4) e (5.5.9) se si considera il moto mediato nel tempo; in più le (9.6.2.1) contengono tre termini, uno per equazione, che dipendono dalle fluttuazioni turbolente del campo della velocità e che possono essere interpretati come componenti di un tensore di tensioni turbolente $\overline{\sigma^t}$. Infatti scrivendo

$$\overline{\sigma^t} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^t & \sigma_{xy}^t & \sigma_{xz}^t \\ \sigma_{yx}^t & \sigma_{yy}^t & \sigma_{yz}^t \\ \sigma_{zx}^t & \sigma_{zy}^t & \sigma_{zz}^t \end{bmatrix} = -\rho \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix}$$

e aggiungendolo a quello laminare $\overline{\sigma^l}$ (5.4.8), si ha un tensore globale $\overline{\sigma}$

$$\overline{\sigma} = \overline{\sigma^l} + \overline{\sigma^t}$$

che può essere inserito nel vettore $\nabla \bullet \overline{\sigma} = \overline{R}$ delle forze dissipative ottenute nella relazione (5.5.5).

Da quanto detto si può quindi concludere che il moto medio del moto turbolento soddisfa le stesse equazioni soddisfatte dal moto laminare, a patto che alle tensioni laminari siano aggiunte quelle turbolente; queste tensioni aggiuntive sono conosciute come **tensioni apparenti** o **tensioni virtuali** del moto turbolento o ancora **tensioni di Reynolds**. Le fluttuazioni turbolente sono quindi responsabili di uno scambio di quantità di moto dovuto alle

$$\overline{u'_i u'_j} \neq 0 . \quad (9.7.1)$$

I metodi per il calcolo del moto turbolento si basavano su ipotesi empiriche che cercavano di stabilire una relazione fra le tensioni di Reynolds e i valori medi delle velocità. Fu Boussinesq nel 1877 a creare una base teorica per lo studio del moto turbolento introducendo, in analogia con il coefficiente di **viscosità molecolare** μ per i moti laminari (5.4.5) di fluidi incompressibili

$$\sigma_{ij}^l = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.4.5)$$

un coefficiente di **viscosità turbolenta** μ_t per le tensioni di Reynolds nel moto turbolento

$$\sigma_{ij}^t = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (9.7.2)$$

La viscosità turbolenta, a differenza della viscosità molecolare, **non è** una proprietà del fluido ma dipende fortemente dallo stato della turbolenza: essa può variare in modo significativo da un punto all'altro (fino a valori pari a 10^6 e più rispetto alla viscosità molecolare) e anche da un tipo di moto all'altro. La sua introduzione non costituisce in sé un modello di turbolenza, ma risulta essere lo strumento per costruirlo: il problema si è ora spostato nel determinare la distribuzione di tale viscosità nel campo di moto.

Il termine con le tensioni apparenti della relazione (9.6.2.1.a), nel caso di fluido incompressibile, diventano allora

$$\begin{aligned} -\rho \left(\frac{\partial (\overline{u' u'})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{u' v'})}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{u' w'})}{\partial z} \right) &= \mu_t \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right] = \\ &= \mu_t \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right] = \mu_t \nabla^2 \bar{u} \quad (9.7.3.a) \end{aligned}$$

ed espressioni analoghe si ottengono per le altre due relazioni (9.6.2.1)

$$-\rho \left(\frac{\partial (\overline{v' u'})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{v' v'})}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{v' w'})}{\partial z} \right) = \mu_t \nabla^2 \bar{v} \quad (9.7.3.b)$$

$$-\rho \left(\frac{\partial (\overline{w' u'})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{w' v'})}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{w' w'})}{\partial z} \right) = \mu_t \nabla^2 \bar{w}. \quad (9.7.3.c)$$

9.8. ASPETTO DEFINITIVO DELLE EQUAZIONI

Accanto all'equazione di "continuità" (9.6.1.1), che viene qui di seguito riscritta

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad (9.8.1)$$

le equazioni di "Navier - Stokes" (9.6.2.1), con la sostituzione delle (9.7.3), diventano

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + (\mu + \mu_t) \nabla^2 \bar{u} + \rho \bar{F}_{mx} \quad (9.8.2.a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + (\mu + \mu_t) \nabla^2 \bar{v} + \rho \bar{F}_{my} \quad (9.8.2.b)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + (\mu + \mu_t) \nabla^2 \bar{w} + \rho \bar{F}_{mz} \quad (9.8.2.c)$$

e in forma vettoriale possono essere scritte

$$\rho \frac{D \bar{\vec{u}}}{Dt} = - \text{grad}(\bar{p}) + (\mu + \mu_t) \nabla^2 \bar{\vec{u}} + \rho \bar{\vec{F}}_m \quad (9.8.3)$$

oppure

$$\rho \frac{D \bar{u}}{Dt} = - \text{grad}(\bar{p}) + (\mu + \mu_t) \nabla^2 \bar{u} + \rho \bar{F}_m \quad (9.8.4)$$

se al simbolo della sopralineatura si associa il concetto di vettore, come si è fatto in tutti gli altri capitoli del testo, e se le variabili vengono concepite come valori mediati nel tempo.

9.9. NATURA DELLA TURBOLENZA

Prima di parlare dei modelli di turbolenza più usati è utile dare qualche ulteriore dettaglio sulla natura del fenomeno della turbolenza. Essa è un moto turbinoso che, essendo di norma prevalente ad alti numeri di Reynolds, ha un ampio spettro di grandezza dei vortici ed un corrispondente spettro di frequenze di fluttuazione; il moto è sempre di natura rotazionale (vedi § 3.8) e può essere pensato come un groviglio di filetti vorticosi i cui vettori della vorticità sono orientati in tutte le direzioni e altamente instabili. L'ampiezza dello spettro, e di conseguenza la differenza di grandezza fra i vortici più grandi e quelli più piccoli, aumentano con il numero di Reynolds.

I vortici più grandi, che sono associati alle frequenze di fluttuazione più basse, sono determinati dalle condizioni al contorno del moto e la loro grandezza è dello stesso ordine di quella del campo di moto, mentre i vortici più piccoli, che sono associati invece alle frequenze di fluttuazione più alte, sono determinate dalle forze di natura viscosa. I vortici più grandi interagiscono con il moto medio, perché le loro scale di grandezza sono simili, provocando un passaggio di energia cinetica dal moto medio a quello turbolento su grande scala; a loro volta i vortici turbolenti, considerati come filetti vorticosi elementari che si deformano fra loro, passano l'energia cinetica a vortici su scala sempre più piccola fino a che le forze viscose non provocano la sua dissipazione. Questo processo viene chiamato **cascata di energia** e viene rappresentato graficamente nella fig. 9.6.

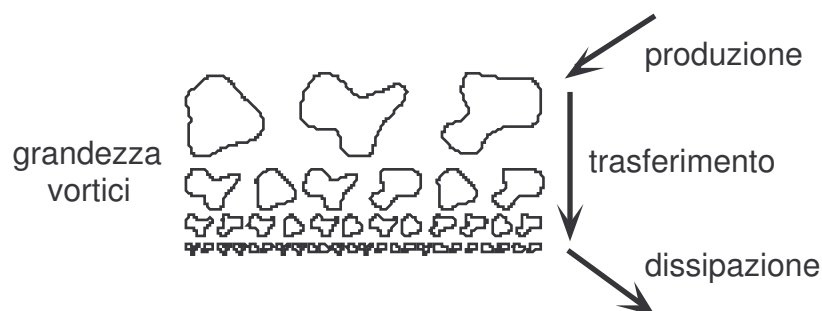


Fig. 9.6.- Cascata di energia secondo Kolmogorov - 1941.-

Anche se la dissipazione di energia per effetto della viscosità si verifica nella parte finale del processo di trasformazione, cioè nei vortici più piccoli, in realtà la quantità di energia dissipata dipende solo da quella che il moto turbolento su larga scala riesce ad assorbire dal moto medio. E' molto importante notare quindi che la viscosità non determina l'ammontare dell'energia dissipata, ma solo la scala su cui la dissipazione si verifica: più piccolo è l'effetto della viscosità, cioè più grande è il numero di Reynolds, più piccoli rispetto ai vortici su larga scala sono i vortici su piccola scala entro cui si verifica la dissipazione.

In conclusione si può dire che la turbolenza consista in una sovrapposizione di vortici sempre più piccoli e che il limite sotto il quale la viscosità dei fluidi reali impedisce di andare è dovuto al fatto che più piccolo è il vortice, più grande è in generale il gradiente della velocità e più grande diventa lo sforzo viscoso tangenziale che ostacola il moto del vortice.

Si è prima detto che, a causa della sua interazione con il moto medio, il moto turbolento su larga scala dipende in modo rilevante dalle condizioni al contorno del problema studiato. Poiché il moto medio può avere direzioni preferenziali, basti pensare al moto che si sviluppa all'interno di una tubazione con elevate velocità assiali e molto contenute velocità radiali, anche il moto turbolento su larga scala può essere fortemente anisotropo con scale di lunghezza dipendenti dalla direzione, ma durante il processo di cascata, quando l'energia passa a vortici sempre più piccoli, la sensibilità alla direzione tende a uniformarsi e il moto tende a divenire isotropo; quando il numero di Reynolds è molto alto, cioè quando lo spettro fra vortici a grande e a piccola scala è largo, il moto dissipativo su piccola scala può essere comunque sempre considerato isotropo. Questo tipo di moto, anisotropo su larga scala e isotropo su piccola scala, viene chiamato localmente isotropo.

Poiché il moto turbolento su larga scala contribuisce in misura preponderante al trasporto della quantità di moto e alla correlazione turbolenta (9.7.1), i modelli di turbolenza cercano soprattutto di simulare questo tipo di moto introducendo parametri che caratterizzano il moto su larga scala.

9.10. MODELLI DI TURBOLENZA

La classificazione dei modelli di turbolenza che sono stati finora proposti e che ancora continuano ad essere cercati non è agevole. Un criterio molto rudimentale potrebbe essere quello di distinguerli in due gruppi: uno che fa ricorso ai concetti di viscosità turbolenta μ_t e uno invece che non li utilizza; tuttavia, l'esistenza di grandi differenze fra modelli semplici e avanzati di μ_t rende necessario il ricorso a tipi di suddivisioni più appropriate.

Infatti un modello che considera μ_t costante non dovrebbe nemmeno essere inserito fra i modelli di turbolenza perché non riesce a tener conto delle variazioni che intervengono nella struttura locale della turbolenza e quindi a descrivere in modo corretto i dettagli del moto medio, mentre un modello semplice che determina i valori di μ_t in base alla distribuzione della velocità media assume solo che la turbolenza è dissipata là dove è generata e quindi, non considerando il trasporto da parte del moto medio delle quantità che caratterizzano la turbolenza, rende poco attendibili i risultati nei casi in cui lo stato della turbolenza in un punto è influenzato in modo significativo dalla generazione della turbolenza in un altro punto del moto o in un tempo precedente (effetto storico).

Allo scopo di tener conto del trasporto della turbolenza, sono stati sviluppati modelli che usano equazioni differenziali, di trasporto appunto, per alcune quantità che caratterizzano la turbolenza; queste equazioni sono simili a quella della quantità di moto (6.3.2.1), perché contengono un termine che definisce il trasporto convettivo ef-

fettuato dal moto medio e un termine che definisce il trasporto diffusivo tramite il moto turbolento. Alcuni modelli usano una sola equazione di trasporto per una sola scala di velocità assunta per caratterizzare le velocità fluttuanti, altri utilizzano un'altra equazione per la scala delle lunghezze e altri ancora risolvono equazioni per più scale di velocità e per più scale di lunghezze.

L'introduzione delle equazioni di trasporto per determinare un numero sempre crescente di quantità turbolente ha reso possibile una descrizione abbastanza realistica del fenomeno fisico che avviene in natura, e ciò sta facendo diventare questi modelli di turbolenza sempre più universali. L'attendibilità e la diffusione raggiunte ha anche reso usuale la loro classificazione in base al numero delle equazioni adottate: si parla quindi di modelli a zero, a una, a due, ecc. equazioni.

Qui di seguito verranno passati in rassegna i modelli di turbolenza più usati nelle applicazioni pratiche utilizzando la classificazione per numero di equazioni impiegate.

9.10.1. MODELLI A ZERO EQUAZIONI

Questi modelli, prevalentemente, non ricorrono a equazioni di trasporto per le quantità turbolente, ma usano tutti il concetto di viscosità turbolenta correlandola alla distribuzione della velocità media con formule empiriche.

Il primo modello adatto a descrivere un moto di tipo turbolento in tutti i punti del campo fluido fu proposto nel 1925 da Prandtl il quale, basandosi sulla teoria cinetica dei gas, assunse che la viscosità turbolenta μ_t fosse proporzionale a una scala della velocità, caratterizzante l'intensità della fluttuazione e detta **velocità di agitazione turbolenta** $\hat{u}$, e ad una scala delle lunghezze, caratterizzante il moto su larga scala e detta **lunghezza di mescolamento** l_m , in base alla relazione seguente

$$\mu_t = \rho \hat{u} l_m \quad (9.10.1.1)$$

in cui sia $\hat{u}$ che l_m variano da punto a punto e dipendono dalla geometria e dalla velocità locale media.

Nel caso di un moto che si svolge con una direzione privilegiata a strati, come quella riportata in fig. 9.5, con una sola tensione di Reynolds (quella proporzionale a $u'v'$) e con un solo gradiente di velocità ($\partial u/\partial y$) significativi, Prandtl postulò che la scala della velocità di fluttuazione fosse uguale a

$$\hat{u} = l_m \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad (9.10.1.2)$$

basandosi sull'ipotesi che ci sia proporzionalità tra le fluttuazioni turbolente delle velocità assiali e trasversali e che tali fluttuazioni siano proporzionali al prodotto della distanza dalla quale proviene il fluido e del gradiente medio della velocità.

Di conseguenza, con la sostituzione della (9.10.1.2), la (9.10.1.1) diventa

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (9.10.1.3)$$

e la (9.7.2)

$$\sigma_{yx}^t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (9.10.1.4)$$

L'equazione (9.10.1.2) passa sotto il nome di ipotesi di Prandtl della lunghezza di mescolamento; essa mette in relazione la viscosità turbolenta con il gradiente della

velocità media locale e coinvolge come unico parametro incognito il valore di l_m . Questa ipotesi è stata applicata con successo, e lo è anche tuttora, in quei moti turbolenti per i quali la lunghezza di mescolamento può essere specificata con relazioni empiriche semplici. In questo contesto tali correlazioni non vengono specificate.

Il modello di lunghezza di mescolamento non è adatto quando è importante il trasporto convettivo o diffusivo della turbolenza, come per esempio nei flussi che si sviluppino rapidamente o che presentano dei ricircoli. Più in generale si può dire che esso è molto usato nei flussi semplici dove è facile determinare il valore della lunghezza di mescolamento.

9.10.2. MODELLI A UNA EQUAZIONE

Allo scopo di superare i limiti prima menzionati, sono stati sviluppati modelli che tenessero conto del trasporto delle quantità caratteristiche della turbolenza; un passo importante nel loro sviluppo è costituito dall'aggancio fra la scala della velocità fluttuante e i gradienti della velocità media e dalla determinazione di questa scala in una equazione di trasporto.

La scala delle fluttuazioni di velocità ormai universalmente adottata è $\sqrt{k}$, dove k è l'**energia cinetica turbolenta** del moto per unità di massa

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right),$$

perché è una misura diretta dell'intensità delle fluttuazioni della turbolenza su larga scala nelle tre direzioni. Quando questa scala è applicata nella relazione della viscosità turbolenta (9.10.1.1) si ottiene

$$\mu_t = c_\mu' \rho \sqrt{k} L \quad (9.10.2.1)$$

dove c_μ' è una costante empirica e L è la scala delle lunghezze; questa equazione è conosciuta con i nomi di Kolmogorov e di Prandtl perché entrambi l'introdussero indipendentemente. Essi proposero anche di determinare la distribuzione di k risolvendo un'equazione di trasporto per tale quantità partendo dalle equazioni di Navier - Stokes (9.8.2); non vengono ovviamente riportati tutti i passaggi, ma viene data solo la sua espressione finale

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} + w \frac{\partial k}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + P - c_D \rho \frac{k^{3/2}}{L} \quad (9.10.2.2)$$

dove μ_t è dato dalla (9.10.2.1), σ_k è una costante che vale 1, c_D è un'altra costante strettamente legata a c_μ' in modo tale che il loro prodotto valga 0.09 e P è un termine di produzione dell'energia cinetica turbolenta dovuto alle tensioni tangenziali e deriva da considerazioni energetiche (di termo-fluidodinamica) non presi in considerazione in questo corso di fluidodinamica.

Il modello introdotto è ristretto a moti ad alto numero di Reynolds e non è applicabile ai sottostrati viscosi vicino alle pareti; il primo termine rappresenta la variazione nel tempo, il secondo il trasporto convettivo, il terzo il trasporto diffusivo, il quarto la produzione e il quinto la dissipazione viscosa.

Per completare il modello è però necessario definire la scala delle lunghezze L che compare sia nella viscosità turbolenta (9.10.2.1) sia nel termine dissipativo viscoso della equazione (9.10.2.2) e questa definizione distingue i vari modelli; in molti di essi L è determinata da relazioni empiriche simili a quelle usate per l_m .

9.10.3. MODELLI A DUE EQUAZIONI

Le difficoltà incontrate per trovare relazioni valide a descrivere o a calcolare la scala delle lunghezze L in aggiunta al fatto che anche questa scala, come l'energia k , è soggetta ai processi di trasporto, hanno stimolato l'uso di un'equazione di trasporto anche per la scala delle lunghezze. Sperimentalmente si è osservato, per esempio, che i vortici generati da una griglia inserita in una corrente fluida sono trasportati verso valle, che la loro grandezza nei punti a valle dipende fortemente dalla loro grandezza iniziale, che la dissipazione viscosa distrugge i vortici più piccoli incrementando di conseguenza la loro grandezza e che invece la cascata di energia riduce la grandezza dei vortici. I modelli a due equazioni solitamente fanno uso sia del concetto di viscosità turbolenta sia dell'espressione di Kolmogorov - Prandtl. Qui di seguito si darà un cenno al modello $k-\varepsilon$ che è il più utilizzato nelle applicazioni pratiche.

Un'equazione di trasporto per L non ha necessariamente bisogno della scala delle lunghezze come variabile; può essere sufficiente infatti una combinazione del tipo $C = k^m \cdot L^n$, perché k è già nota dalla sua equazione. Molti sono stati i valori proposti per C

$$C \propto \frac{k^{3/2}}{L} \quad C \propto k L \quad C \propto \frac{k^{1/2}}{L} \quad C \propto \frac{k}{L^2} ;$$

l'esperienza con le varie equazioni di trasporto ha mostrato che le differenze ottenute non sono significative nei moti liberi, ma che vicino alle pareti i risultati migliori sono dati dalla quantità

$$C = c_D \frac{k^{3/2}}{L} = \varepsilon \quad (9.10.3.1)$$

dove ε è conosciuta come **dissipazione** dell'energia cinetica turbolenta del moto per unità di massa.

Elaborando l'ultima relazione, la scala delle lunghezze diventa

$$L = c_D \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$$

e, sostituendola nella (9.10.2.1), la viscosità turbolenta assume l'espressione

$$\mu_t = c'_\mu \rho k^{1/2} L = c'_\mu c_D \rho \frac{k^2}{\varepsilon} = c_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$$

dove $c_\mu = c'_\mu \cdot c_D = 0.09$ è la costante già trovata nella relazione (9.10.2.2).

Sostituendo la (9.10.3.1) nella (9.10.2.2) si ottiene per l'equazione dell'energia turbolenta k

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} + w \frac{\partial k}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + P - \rho \varepsilon, \quad (9.10.3.2)$$

mentre per l'equazione di ε (non vengono ovviamente riportati tutti i passaggi, ma viene data solo la sua espressione finale) si ha

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + w \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + c_1 \frac{\varepsilon}{k} P - c_2 \rho \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon$$

dove le costanti valgono: $\sigma_\epsilon = 1.3$, $c_1 = 1.44$ e $c_2 = 1.92$.

9.10.4. MODELLI A PIU' EQUAZIONI

I modelli che si basano sul concetto di viscosità turbolenta (9.7.2) hanno il difetto che, soprattutto in tre dimensioni, non riescono a predire correttamente l'andamento delle tensioni perché, come mostrano le misure sperimentali, le relazioni fra le tensioni e le velocità di deformazione devono contenere una quantità tensoriale e non una scalare come previsto dall'ipotesi di Boussinesq. Sono stati allora proposti modelli di turbolenza, chiamati modelli a tensioni di Reynolds, che scrivono equazioni di trasporto per ognuna delle tensioni apparenti.

Su questi tipi di modelli non viene data alcuna notizia e non vengono nemmeno date le equazioni; si avverte solo che, per avere un sistema di equazioni pari al numero delle incognite, si deve aggiungere un'ulteriore equazione di chiusura, che di solito è rappresentata da quella di trasporto della dissipazione ϵ .

9.10.5. MODELLI SU LARGA SCALA (LES)

L'idea base dei modelli LES (*Large Eddy Simulation*) si fonda su due osservazioni di natura sperimentale:

- a) le strutture turbolente di "grandi dimensioni", come già detto anisotrope e dipendenti dalla geometria del sistema studiato, posseggono la parte più cospicua dell'energia e sono quindi responsabili dei fenomeni che si verificano nel moto turbolento (mescolamento, trasporto, attrito, ecc.);
- b) le strutture di "piccole dimensioni", come già detto isotrope, sono di natura dissipativa e non dipendono dalla geometria del problema specifico.

E' logico allora cercare di "risolvere direttamente", con una simulazione numerica non stazionaria e tridimensionale, le scale di dimensione più grande e di "demandare" ad un apposito modello il compito di considerare le scale di dimensione più piccola non risolte in modo diretto.

Senza entrare in ulteriori dettagli, ci si limita a dire che per separare le scale più piccole da quelle più grandi si introducono appositi filtri. Alla fine, allora, le equazioni di Navier-Stokes così filtrate sono molto "simili" a quelle mediate nel tempo (vedi § 9.6 e § 9.8) e che invece vengono chiamate RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*).

Il modello LES si viene quindi a trovare in mezzo fra quello RANS e quello DNS (vedi § 9.10.6).

9.10.6. SIMULAZIONE DIRETTA (DNS)

Nei modelli DNS (*Direct Numerical Simulation*) le equazioni vengono risolte numericamente in forma non stazionaria e tridimensionale senza far ricorso a alcun modello di tipo empirico; il moto turbolento viene risolto direttamente in tutto il campo delle strutture, da quelle di dimensioni più grandi fino a quelle di dimensioni più piccole. I vantaggi sono costituiti da una elevata accuratezza non raggiungibile con altri metodi numerici e neanche con metodi sperimentali, mentre i limiti sono dati dal notevole costo richiesto in termini di tempo di calcolo, di memoria e di gestione dei risultati.

Finora può essere usato solo per geometrie semplici e per flussi debolmente turbolenti a basso numero di Reynolds. Non è quindi ancora uno strumento adatto all'indagine ingegneristico - industriale e non lo sarà, se forse lo sarà mai, per ancora lungo tempo.

9.11. STRATO LIMITE VISCOSO NEL MOTO TURBOLENTO

Nello strato limite sono importanti sia le forze d'inerzia che le forze viscosi; non

bisogna infatti dimenticare che al suo interno esiste un forte gradiente di velocità normale al flusso. Di conseguenza il numero di Reynolds, che nella sua interpretazione dinamica (vedi § 7.2.2) rappresenta il rapporto fra le forze d'inerzia e quelle viscosi, costituisce una valida rappresentazione delle caratteristiche del flusso; l'unico problema è la definizione della lunghezza caratteristica che può essere riferita a una misura o della lunghezza nella direzione del flusso x (Re_x) o dello spessore dello strato limite δ (Re_δ).

Nel § 9.1 e nel § 9.2 si è già parlato degli studi sperimentali effettuati da Reynolds nel determinare il passaggio del moto da laminare a turbolento all'interno di tubazioni; la stessa situazione si verifica all'interno dello strato limite e, come nei tubi, i fattori che influenzano la transizione sono il gradiente di pressione, la rugosità della superficie, il trasporto del calore, le forze di massa e i disturbi al libero deflusso. In molte applicazioni pratiche, come gli scafi delle navi o le ali degli aeroplani o il terreno per il moto dell'atmosfera, gli strati limite si estendono su una superficie vasta; per questa ragione, nella descrizione delle caratteristiche del flusso si fa riferimento al caso semplice di una lastra sottile.

Per un fluido incompressibile che scorre su una lastra sottile ad incidenza zero, senza gradiente di pressione e in assenza di trasmissione di calore, la transizione si verifica per un numero di Reynolds, riferito alla distanza x dal bordo di attacco (vedi fig. 9.7), pari a $Re_x \approx 3 \div 4 \times 10^6$ in assenza di disturbi; nelle applicazioni pratiche si può ritenere che esso si aggiri attorno a $Re_x \approx 5 \times 10^5$; per esempio, nel caso di aria in condizioni ambiente e alla velocità $U_\infty = 30$ m/s, la transizione si verifica ad una distanza x pari a

$$Re_x = \frac{\rho U_\infty x}{\mu} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\mu}{\rho U_\infty} Re_x = \frac{0.0000178}{1.225 \times 30} 5 \times 10^5 \approx 0.24 \text{ m} .$$

Come mostrato in fig. 9.7, il moto rimane laminare per un breve tratto a valle del bordo di entrata e segue le leggi generiche viste nel § 8.6 per lo strato limite viscoso e quelle particolari viste nel § 8.7 per la lastra sottile; poi in una zona, non identificabile con una sola linea sulla superficie della lastra, si verifica la transizione; infine il moto diventa turbolento pienamente sviluppato. Nella figura lo spessore dello strato limite è esagerato.

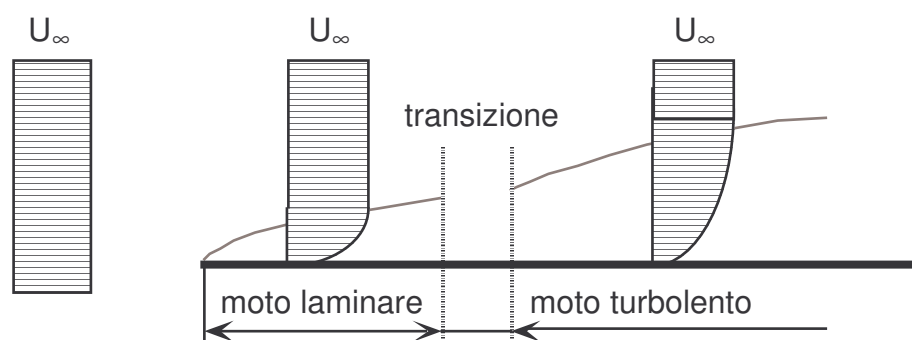


Fig. 9.7.- Transizione dello strato limite su una lastra piana.-

La determinazione della legge dell'altezza dello strato limite turbolento è molto complessa e non verrà trattata; ci si limita solo a riportare la relazione valida nel caso in cui si assuma che il flusso nel bordo di attacco sia turbolento

$$\delta = \frac{0.384 x}{Re_x^{0.2}} \quad (9.11.1)$$

e a ricordare che la legge dell'altezza dello strato limite laminare è data dalla relazione (8.7.5). La (9.11.1) è stata trovata usando per le componenti della velocità media nelle equazioni turbolente (9.8.2) le stesse condizioni di non - scorrimento sulle pareti solide adottate nelle equazioni laminari (5.5.4).

9.11.1. PROFILI DELLE TENSIONI TANGENZIALI IN FLUSSI INTERNI

Se per lo studio dello strato limite turbolento si fanno le stesse ipotesi di Prandtl per lo studio dello strato limite laminare (vedi § 8.6), se dalle equazioni di bilancio mediate nel tempo (vedi § 9.6) si levano le sopralineature usate per il moto medio e se si considera il moto pienamente sviluppato ($\partial u/\partial x = 0$, $u = \text{cost}$), l'equazione di bilancio della massa (9.6.1.1), poiché per definizione $w = 0$ su tutto il campo, diventa semplicemente

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 ;$$

dato poi che le condizioni al contorno sono tali che sulla parete ($y = 0$) la velocità v si annulla ($v = 0$), la velocità trasversale v diventa identicamente nulla su tutto il campo.

Con queste premesse l'equazione di bilancio della quantità di moto lungo la direzione x di avanzamento del fluido (9.6.2.1.a) diventa semplicemente

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial(u'v')}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho (u'v') \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (9.11.1.1)$$

in cui la tensione tangenziale totale è data dalla somma della tensione viscosa di Newton e dalla tensione turbolenta di Reynolds

$$\sigma_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho (u'v') . \quad (9.11.1.2)$$

L'equazione (9.11.1.1) dice che:

- la pressione è funzione solo della direzione x di avanzamento del flusso e quindi $\partial p/\partial x$ diventa dp/dx ;
- la tensione tangenziale è funzione solo della direzione normale y all'avanzamento del flusso e quindi $\partial \sigma_{yx}/\partial y$ diventa $d\sigma_{yx}/dy$;
- il gradiente assiale della pressione, costante perché il moto è pienamente sviluppato ($dp/dx = \text{cost}$), è bilanciato dal gradiente normale della tensione tangenziale, di conseguenza anch'esso costante ($d\sigma_{yx}/dy = \text{cost}$).

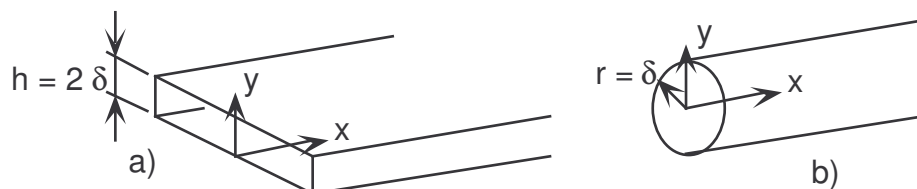


Fig. 9.8.- Altezza dello strato limite turbolento per il flusso pienamente sviluppato in: a) un canale rettangolare; b) un tubo.

Integrando l'equazione fra la parete ($y = 0$), in cui la tensione vale $\sigma_{yx} = \tau_w$ e viene chiamata **tensione tangenziale di parete**, e l'altezza dello strato limite ($y = \delta$), in cui

la tensione si annulla $\sigma_{yx} = 0$, si può determinare il valore di τ_w

$$\int_{\tau_w}^0 d\sigma_{yx} = - \left(- \frac{dp}{dx} \right) \int_0^\delta dy \quad \rightarrow \quad 0 - \tau_w = - \left(- \frac{dp}{dx} \right) \delta \quad \rightarrow \quad \tau_w = \left(- \frac{dp}{dx} \right) \delta . \quad (9.11.1.3)$$

L'altezza δ varia a seconda delle applicazioni prese in considerazione; infatti può essere la metà della distanza h fra le pareti nel caso di un condotto rettangolare (vedi fig. 9.8.a e anche fig. 8.11) oppure il raggio r nel caso di una tubazione (vedi fig. 9.8.b e anche fig. 8.11).

Comunque, la legge (9.11.1.3) della tensione è lineare e viene rappresentata dalla relazione

$$\frac{\sigma_{yx} - \tau_w}{0 - \tau_w} = \frac{y}{\delta} \quad \rightarrow \quad \sigma_{yx} \delta - \tau_w \delta = - \tau_w y \quad \rightarrow \quad \sigma_{yx} = \tau_w \left(1 - \frac{y}{\delta} \right) . \quad (9.11.1.4)$$

Nella fig. 9.9 vengono riportati i termini viscoso e turbolento (9.11.1.2) della tensione tangenziale (9.11.1.4), adimensionalizzata rispetto al valore assunto sulla parete σ_{yx}/τ_w , in funzione della distanza dalla parete adimensionalizzata rispetto all'altezza dello strato limite y/δ .

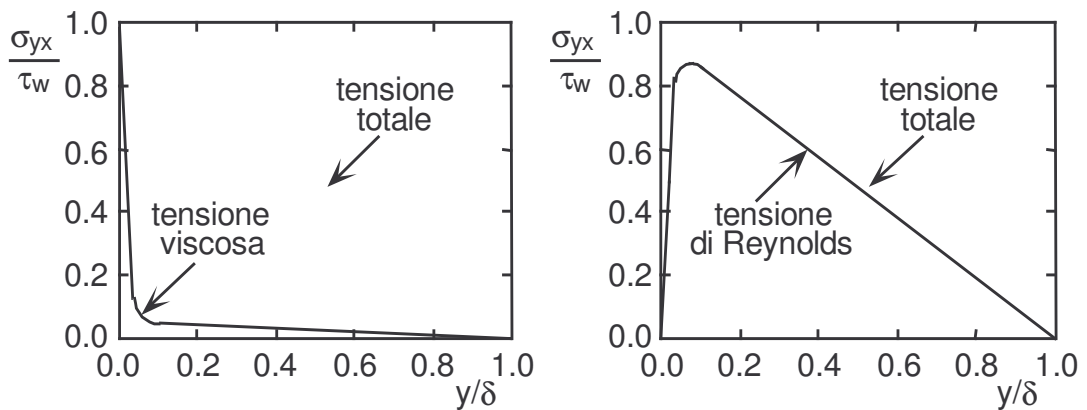


Fig. 9.9.- Profili delle tensioni tangenziali: a) viscosa; b) di Reynolds.-

La scala lineare con cui nella figura 9.9 viene rappresentata la distanza y/δ non riesce a mettere bene in evidenza i profili delle tensioni nelle zone molto vicine alla parete. Viene allora proposta un'altra unità di distanza dalla parete y^+ , detta **unità di parete**, che ha lo scopo di dilatare tale zona come una lente di ingrandimento; essa è data dal rapporto fra la distanza effettiva y e la **scala viscosa** δ_v

$$y^+ = \frac{y}{\delta_v} \quad , \quad \delta_v = \frac{\mu}{\rho u_\tau} \quad , \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} .$$

in cui u_τ rappresenta la **velocità di attrito**. Il rapporto fra le due scale non è fisso

$$\frac{y^+}{y/\delta} = \frac{y/\delta_v}{y/\delta} = \frac{\delta}{\delta_v} = \frac{\rho u_\tau \delta}{\mu} = Re_\tau ,$$

ma dipende dal cosiddetto numero di Reynolds di attrito Re_τ .

Nella fig. 9.10 vengono riportati i termini viscoso e turbolento (9.11.1.2) della ten-

sione tangenziale (9.11.1.4), adimensionalizzata rispetto al valore assunto sulla parete σ_{yx}/τ_w , in funzione della unità di parete y^+ ; il diagramma è limitato alla zona vicina alla parete.

Poiché tutte le componenti della velocità turbolenta sono molto basse nelle immediate vicinanze della parete, anche tutte le componenti del tensore delle tensioni apparenti (9.7.2) tendono a zero in corrispondenza della parete solida e su di essa rimangono attive solo le tensioni viscose dovute al moto laminare; di conseguenza in vicinanza della parete le tensioni di Reynolds sono piccole rispetto a quelle viscose e si forma uno strato molto sottile aderente alla parete in cui il moto è laminare.

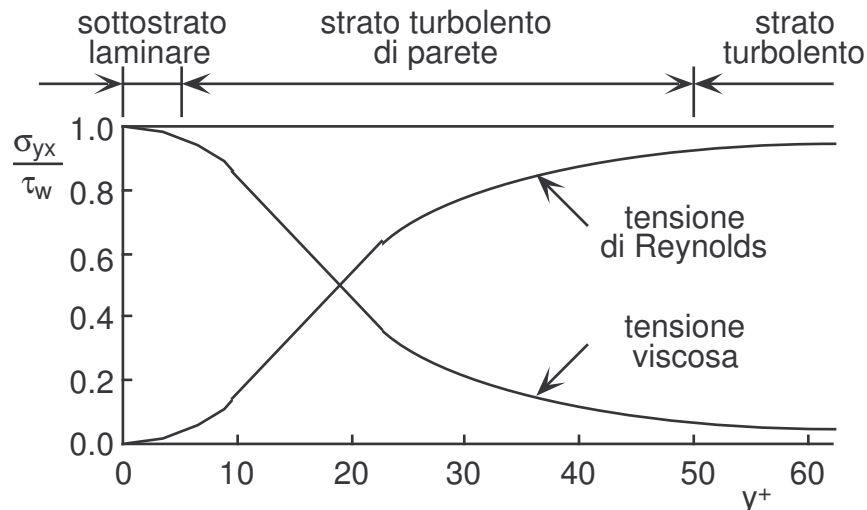


Fig. 9.10.- Profili dei contributi percentuali delle tensioni viscosa e di Reynolds.-

Questo strato viene chiamato **sottostrato laminare** (vedi figg. 9.10 e 9.11) e il suo spessore è così piccolo che in molti casi è quasi impossibile, o molto difficoltoso, osservarlo con rilievi sperimentali ma, nonostante il suo limitato spessore, esso è di importanza decisiva per lo studio del moto dei fluidi perché è sede di fenomeni che determinano la tensione tangenziale sulla parete e le perdite per attrito viscoso. Questo strato, in cui non esiste turbolenza, è delimitato da uno strato di transizione, che è chiamato **strato turbolento di parete** (vedi figg. 9.10 e 9.11), in cui le fluttuazioni della velocità creano tensioni turbolente tangenziali confrontabili con quelle viscose. A distanze maggiori dalla parete le tensioni turbolente sovrastano quelle viscose in quello che viene chiamato **strato turbolento** (vedi figg. 9.10 e 9.11).

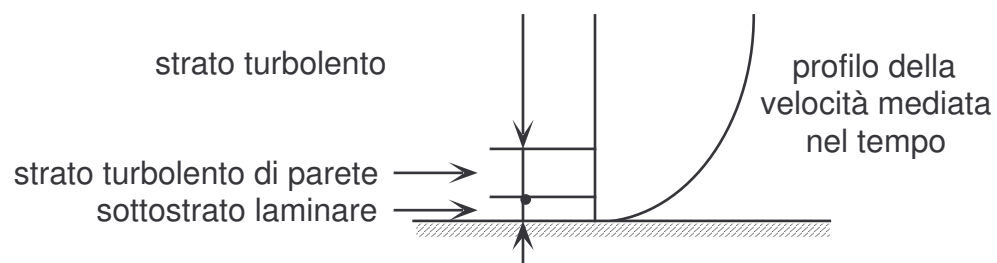


Fig. 9.11.- Moto turbolento all'interno di uno strato limite.-