

CAPITOLO 10

FLUSSI VISCOSI INTERNI

10.0.- RICHIAMI TEORICI

10.1.- FLUSSI PIENAMENTE SVILUPPATI

10.2.- RESISTENZE NEI TUBI

10.0.- RICHIAMI TEORICI

Flusso interno

Per flusso interno si intende un flusso che, in direzione normale al suo moto, è delimitato da pareti solide; flussi interni, per esempio, sono quelli che si svolgono fra lastre infinite o all'interno di tubi.

Moto pienamente sviluppato

Il moto di un fluido si dice pienamente sviluppato quando diventa stazionario, cioè quando non modifica più il suo profilo di velocità.

La lunghezza L dall'ingresso necessaria per la formazione del profilo laminare pienamente sviluppato in un tubo può essere stimata pari a

$$\frac{L}{D} = 0.0575 Re \quad (10.1)$$

dove D è il diametro del tubo e Re è il numero di Reynolds riferito al diametro ed alla velocità media. Nel caso di due lastre infinite può essere presa come riferimento la stessa legge dove D rappresenta la distanza $2Y$ fra le lastre.

Rilievi sperimentali dimostrano altresì che la lunghezza L dall'ingresso necessaria per la formazione del profilo turbolento pienamente sviluppato in un tubo può essere stimata pari a

$$\frac{L}{D} = 25 \div 40 \quad (10.2)$$

Numero di Reynolds critico

Per numero di Reynolds critico Re_c si intende il numero di Reynolds oltre il quale il moto si trasforma da laminare in turbolento. Nei casi pratici possono ritenersi mediamente validi i seguenti valori

Tipo	Re_c
lastre infinite parallele e ferme	1400
lastre infinite parallele di cui una in moto	1500
tubo	2300

Tab. 10.1

Moto laminare fra due lastre infinite parallele e ferme

Il profilo della velocità di un moto laminare pienamente sviluppato è

$$w = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (Y^2 - y^2) \quad (10.3)$$

dove Y è la semidistanza fra le due lastre, y è la distanza generica dal piano medio e $(-\partial p/\partial z)$ è il gradiente della pressione nella direzione del moto, mentre il profilo della tensione è

$$\sigma_{yz} = - \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) y \quad (10.4)$$

La portata volumetrica G_v , su una larghezza X delle lastre, è

$$G_v = \frac{2}{3\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) X Y^3 \quad (10.5)$$

mentre la velocità media w_m è

$$w_m = \frac{1}{3\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) Y^2 \quad (10.6)$$

Moto laminare fra due lastre infinite parallele di cui una in moto

Il profilo della velocità di un moto laminare pienamente sviluppato è

$$w = W \left(1 - \frac{y}{Y} \right) + \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) y (Y - y) \quad (10.7)$$

dove Y è la distanza fra le due lastre, y è la distanza generica dalla lastra inferiore in moto con velocità W e $(-\partial p/\partial z)$ è il gradiente della pressione nella direzione del moto, mentre il profilo della tensione è

$$\sigma_{yz} = -\mu \frac{W}{Y} - \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left(y - \frac{Y}{2} \right) . \quad (10.8)$$

La portata volumetrica G_v , su una larghezza X delle lastre, è

$$G_v = \frac{1}{2} W X Y + \frac{1}{3\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) X Y^3 \quad (10.9)$$

mentre la velocità media w_m è

$$w_m = \frac{1}{2} W + \frac{1}{3\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) Y^2 . \quad (10.10)$$

Moto laminare in un tubo

Il profilo della velocità di un moto laminare pienamente sviluppato è

$$w = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (R^2 - r^2) \quad (10.11)$$

dove R è il raggio del tubo, r è il raggio generico e $(-\partial p/\partial z)$ è il gradiente della pressione nella direzione del moto, mentre il profilo della tensione è

$$\sigma_{yz} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) r . \quad (10.12)$$

La portata volumetrica G_v è

$$G_v = \frac{\pi}{8\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^4 = \frac{\pi}{128\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) D^4 , \quad (10.13)$$

mentre la velocità media w_m è

$$w_m = \frac{1}{8\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^2 = \frac{1}{32\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) D^2 \quad (10.14)$$

e quella massima $w_{\max}$, corrispondente alla posizione $r = 0$, è

$$w_{\max} = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^2 = \frac{1}{16\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) D^2 ; \quad (10.15)$$

infine, integrando la (10.14) sulla lunghezza L di tubo, si ottiene la caduta di pressione

$$\left(-\frac{\Delta p}{L} \right) = \frac{8\mu w_m}{R^2} = \frac{32\mu w_m}{D^2} . \quad (10.16)$$

Perdita totale in un tubo

La perdita di altezza totale h_t fra i punti (1) e (2) di un tubo è

$$h_t = \left(\alpha_1 \frac{w_{m1}^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1 \right) - \left(\alpha_2 \frac{w_{m2}^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 \right) \quad (10.17)$$

dove il coefficiente di energia cinetica α è

$$\alpha = \frac{\int_S \rho w^3 dS}{G_m w_m^2} . \quad (10.18)$$

Nei tubi il valore di α è 2 in caso moto laminare, mentre si avvicina ad 1 ($1.03 \div 1.08$) in caso di moto turbolento.

La perdita totale h_t è data dalla somma della perdita continua h_c e della perdita accidentale h_a .

Perdita continua in un tubo

La perdita di altezza continua h_c in un tubo è

$$h_c = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2} \quad (10.19)$$

dove f è detto coefficiente di resistenza ed è riportato nel diagramma 10.1, L è la lunghezza, D è il diametro e u_m è la velocità media del fluido.

Perdita accidentale (localizzata) in un tubo

La perdita di altezza accidentale h_a in un tubo può essere ottenuta mediante due relazioni

$$h_a = K \frac{u_m^2}{2} \quad \text{oppure} \quad h_a = f \frac{L_e}{D} \frac{u_m^2}{2} \quad (10.20)$$

dove K è detto coefficiente di perdita ed L_e è la lunghezza equivalente di tubo dritto che provoca la stessa perdita.

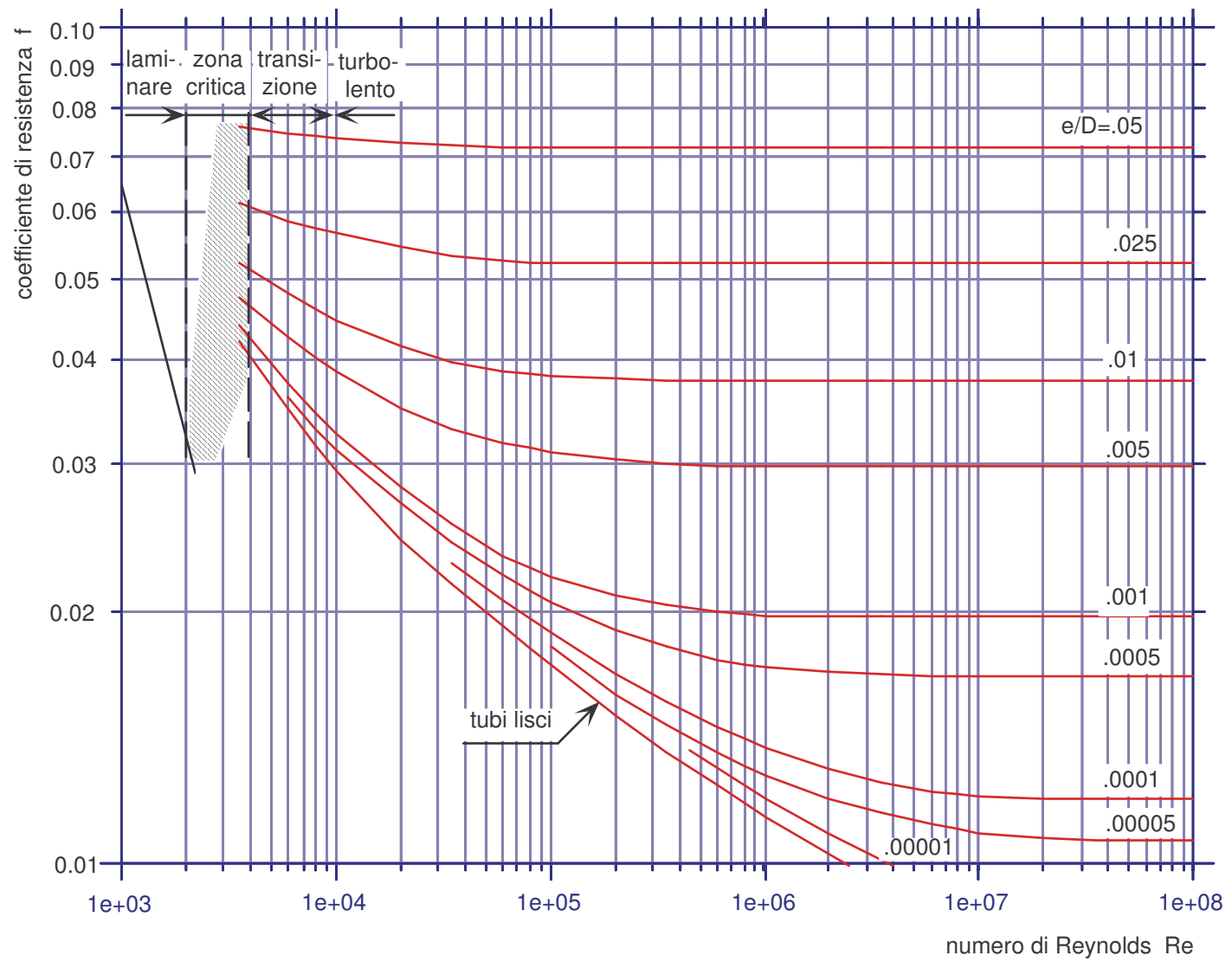


Diagramma 10.1 - Coefficiente di resistenza per flussi pienamente sviluppati in tubi circolari (Moody - 1944).

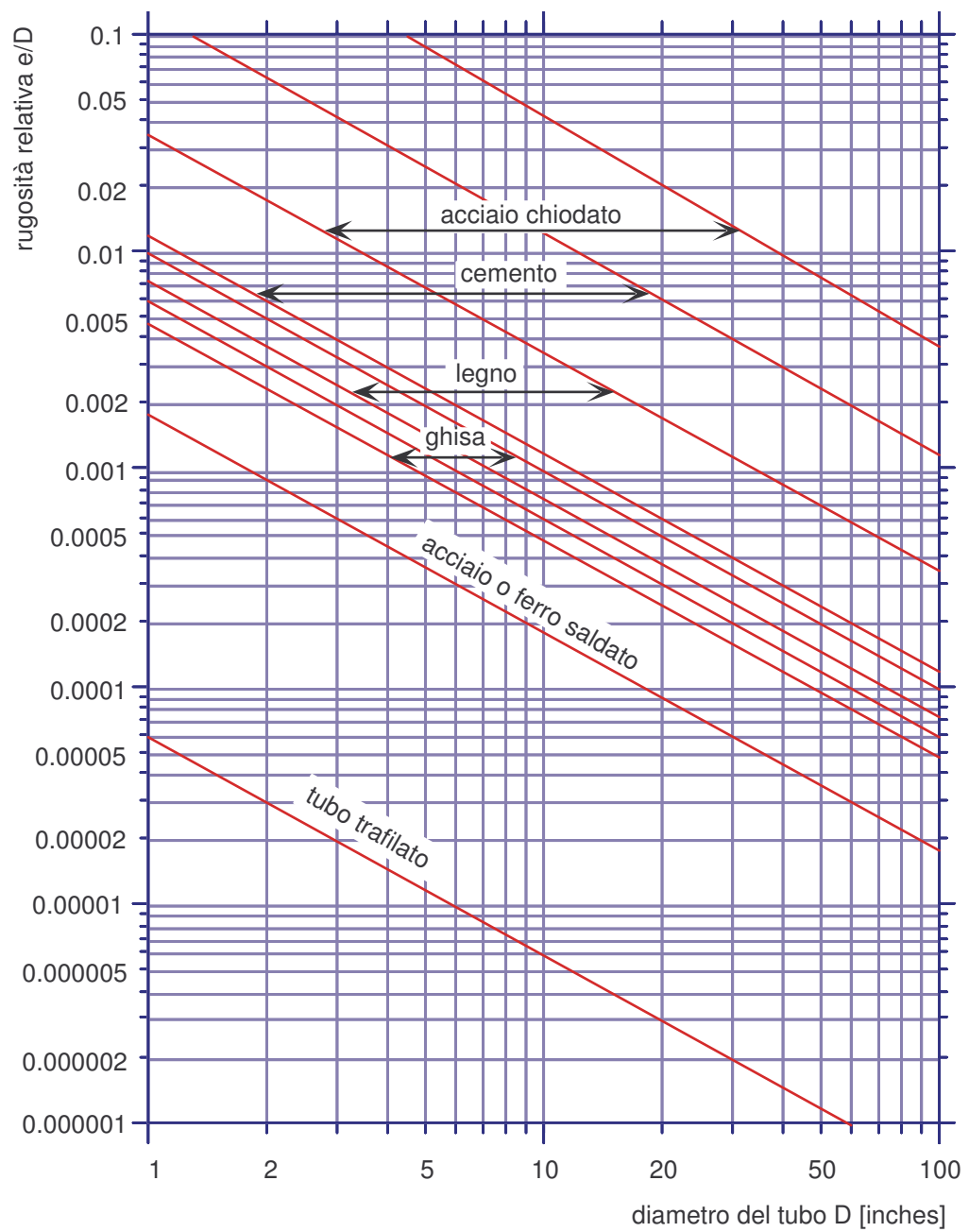


Diagramma 10.2.- Valori della rugosità relativa per tubi di materiale comune (Moody - 1944).

10.1.- FLUSSI PIENAMENTE SVILUPPATI

Esercizio 10.1.1

Un fluido entra in un tubo di diametro $D = 10$ mm con un numero di Reynolds, basato sul diametro e sulla velocità media, pari a $Re = 1500$. Calcolare la lunghezza L richiesta affinché il flusso sia pienamente sviluppato.

Dalla tab. 10.1 si ha che il moto è laminare ($Re < 2300$) e dalla (10.1) si ha che il flusso diventa pienamente sviluppato dopo una distanza L dall'entrata pari a

$$\frac{L}{D} = 0.0575 Re \quad \rightarrow \quad L = 0.0575 Re D = 0.0575 \times 1500 \times 0.01 = 0.9 \text{ m} .$$

Esercizio 10.1.2

Una portata volumetrica $G_v = 0.1$ m³/min d'aria in condizioni normali entra in un tubo di diametro $D = 0.3$ m. Stabilire il tipo del moto e calcolare la lunghezza L richiesta affinché il flusso sia pienamente sviluppato.

Dalla tab. T.2 e dalla tab. T.10 si trova che l'aria in condizioni normali (pressione $p = p_{atm}$ e temperatura $T = 0$ °C) ha una massa volumica $\rho = 1.294$ kg/m³ e una viscosità $\mu = 0.0000171$ kg/(m.s); di conseguenza la velocità media u_m è

$$u_m = \frac{G_v}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{\frac{0.1}{60}}{\frac{\pi \times 0.3^2}{4}} = 0.02358 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e il numero di Reynolds Re è

$$Re = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{1.294 \times 0.02358 \times 0.3}{0.0000171} = 535.3 .$$

Dalla tab. 10.1 si ha che il moto è laminare ($Re < 2300$) e dalla relazione (10.1) si ha che il flusso diventa pienamente sviluppato dopo una distanza L dall'entrata pari a

$$\frac{L}{D} = 0.0575 Re \quad \rightarrow \quad L = 0.0575 Re D = 0.0575 \times 535.3 \times 0.3 = 9.23 \text{ m} .$$

Esercizio 10.1.3

Una portata volumetrica $G_v = 2$ m³/min d'aria in condizioni ambiente entra in un tubo di diametro $D = 0.3$ m. Stabilire il tipo di moto e calcolare la lunghezza L richiesta affinché il flusso sia pienamente sviluppato.

Dalla tab. T.2 e dalla tab. T.10 si trova che l'aria ambiente (pressione $p = p_{atm}$ e temperatura $T = 20$ °C) ha una massa volumica $\rho = 1.206$ kg/m³ e una viscosità $\mu = 0.0000181$ kg/(m.s); di conseguenza la velocità media u_m è

$$u_m = \frac{G_v}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{\frac{2}{60}}{\frac{\pi \times 0.3^2}{4}} = 0.4716 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e il numero di Reynolds Re è

$$Re = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{1.206 \times 0.4716 \times 0.3}{0.0000181} = 9430 .$$

Dalla tab. 10.1 si ha che il moto è turbolento ($Re > 2300$) e dalla relazione (10.2) si ha che il flusso diventa pienamente sviluppato dopo una distanza L dall'entrata pari a

$$L = (25 \div 40) D = (25 \div 40) \times 0.3 = 7.5 \div 12 \text{ m} .$$

Esercizio 10.1.4

In un tubo la transizione da moto laminare a moto turbolento raramente è superiore a 2300. Rappresentare in

un diagramma doppio logaritmico la velocità media u_m in funzione del diametro del tubo per $Re = 2300$ nel caso di: a) aria in condizioni normali; b) acqua a $T = 15^\circ C$.

Dalla tab. T.2 e dalla tab. T.10 si trovano rispettivamente la massa volumica e la viscosità dell'aria in condizioni normali (pressione $p = p_{atm}$ e temperatura $T = 0^\circ C$)

$$\rho = 1.294 \frac{kg}{m^3} \quad \mu = 0.0000171 \frac{kg}{m \cdot s}$$

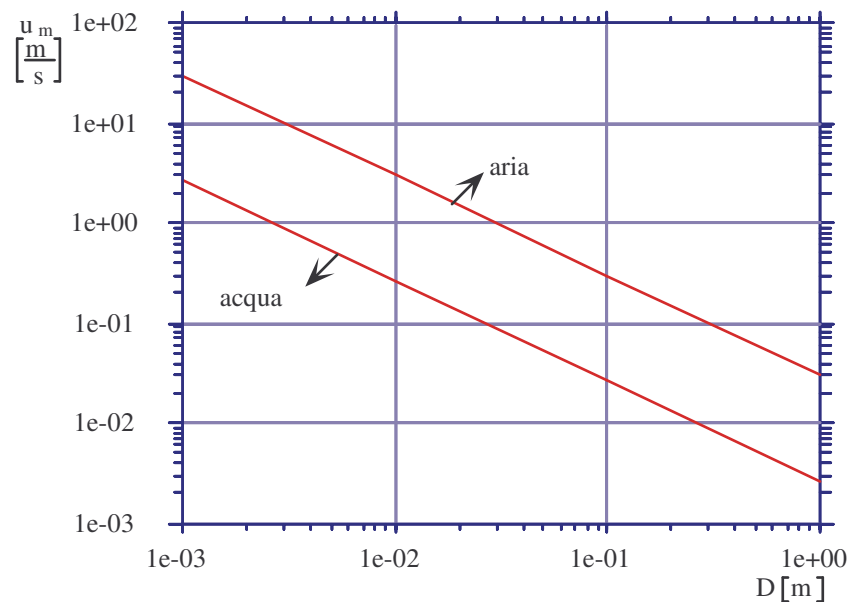
e dell'acqua alla pressione atmosferica e alla temperatura $T = 15^\circ C$

$$\rho = 999.8 \frac{kg}{m^3} \quad \mu = 0.00114 \frac{kg}{m \cdot s} ;$$

di conseguenza le leggi della velocità media in funzione del diametro sono date da

$$Re = \frac{\rho u_m D}{\mu} \rightarrow u_m = \frac{\mu Re}{\rho D} \quad \begin{array}{l} \text{aria} \quad u_m = \frac{0.0000171 \times 2300}{1.294} \frac{1}{D} = \frac{0.03039}{D} \\ \text{acqua} \quad u_m = \frac{0.00114 \times 2300}{999.8} \frac{1}{D} = \frac{0.002622}{D} \end{array}$$

e sono rappresentate in scala logaritmica nella figura seguente.



Esercizio 10.1.5

Trovare: a) la velocità massima w_{max} del moto laminare pienamente sviluppato fra due lastre infinite parallele e ferme e la posizione in cui essa si verifica; b) la relazione fra la velocità generica w e quella massima w_{max} ; c) il rapporto fra la velocità massima w_{max} e quella media w_m .

a) La derivata del profilo della velocità (10.3) fatta rispetto alla distanza dal piano medio è

$$w = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (Y^2 - y^2) \rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) 2y$$

e si annulla per il seguente valore di y

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) 2y = 0 \rightarrow y = 0 ;$$

quindi la velocità massima è

$$w = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (Y^2 - y^2) \rightarrow w_{max} = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) Y^2 \quad (A)$$

e si verifica in corrispondenza del piano medio fra le due lastre.

b) Sostituendo la relazione della velocità massima (A) nella relazione del profilo della velocità (10.3) si ha

$$w = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (Y^2 - y^2) = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) Y^2 \left(1 - \frac{y^2}{Y^2} \right) = w_{\max} \left(1 - \frac{y^2}{Y^2} \right). \quad (B)$$

c) Dalla relazione della velocità massima (A) e da quella della velocità media (10.6) si ha

$$\frac{w_{\max}}{w_m} = \frac{\frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) Y^2}{\frac{1}{3\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) Y^2} = \frac{3}{2}.$$

Esercizio 10.1.6

Calcolare la posizione in corrispondenza della quale la velocità w fra due lastre infinite parallele e ferme nel moto laminare eguaglia quella media w_m .

Dalle relazioni (10.3) e (10.6) si ha

$$\begin{aligned} w = w_m &\quad \rightarrow \quad \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (Y^2 - y^2) = \frac{1}{3\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) Y^2 \quad \rightarrow \\ &\quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} Y^2 - \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{3} Y^2 \quad \rightarrow \quad 3 y^2 = Y^2 \quad \rightarrow \quad y = \pm \frac{Y}{\sqrt{3}} = \pm 0.577 Y. \end{aligned}$$

Esercizio 10.1.7

Il profilo di velocità del moto laminare fra due lastre infinite parallele e ferme può essere approssimato dalla legge quadratica seguente

$$\frac{w}{W} = a + b y + c y^2$$

dove W è il valore massimo sul piano intermedio delle lastre e dove y è la distanza a partire dalla lastra inferiore; calcolare: a) le costanti a , b , c in base alle appropriate condizioni al contorno; b) la portata volumetrica G_v .

a) Le condizioni al contorno rappresentano le condizioni di non scorrimento sulle due lastre

$$\frac{w}{W} \Big|_{y=0} = 0 \quad \quad \frac{w}{W} \Big|_{y=Y} = 0$$

e la condizione di simmetria sul piano intermedio fra le due lastre

$$\frac{w}{W} \Big|_{y=Y/2} = 1;$$

di conseguenza le costanti a , b e c assumono i valori seguenti

$$\begin{aligned} \frac{w}{W} \Big|_{y=0} = 0 &\quad \rightarrow \quad 0 = a &\quad \rightarrow \quad a = 0 &\quad \rightarrow \quad a = 0 \\ \frac{w}{W} \Big|_{y=Y} = 0 &\quad \rightarrow \quad 0 = b Y + c Y^2 &\quad \rightarrow \quad b = -c Y = \frac{4}{Y^2} Y = \frac{4}{Y} &\quad \rightarrow \quad b = \frac{4}{Y} \\ \frac{w}{W} \Big|_{y=Y/2} = 1 &\quad \rightarrow \quad 1 = b \frac{Y}{2} + c \frac{Y^2}{4} &\quad \rightarrow \quad 1 = -c Y \frac{Y}{2} + c \frac{Y^2}{4} = -c \frac{Y^2}{4} &\quad \rightarrow \quad c = -\frac{4}{Y^2} \end{aligned}$$

e la relazione assume la forma seguente

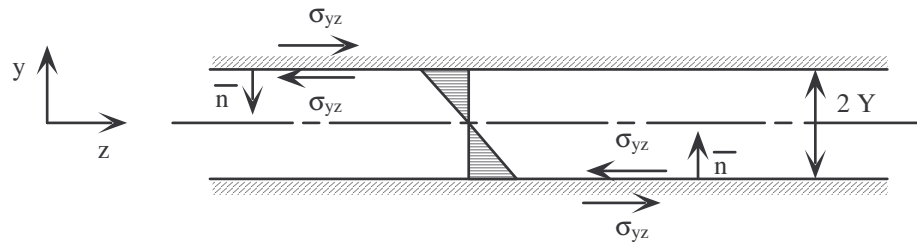
$$\frac{w}{W} = 4 \frac{y}{Y} - 4 \frac{y^2}{Y^2} = 4 \frac{y}{Y} \left(1 - \frac{y}{Y} \right).$$

b) La portata volumetrica per una larghezza X delle lastre diventa allora

$$G_v = \int_0^Y w X dy = \int_0^Y W 4 \frac{y}{Y} X dy - \int_0^Y W 4 \frac{y^2}{Y^2} X dy = W \frac{4}{Y} X \left[\frac{Y^2}{2} \right]_0^Y - W \frac{4}{Y^2} X \left[\frac{Y^3}{3} \right]_0^Y = \frac{2}{3} W X Y.$$

Esercizio 10.1.8

Si consideri un moto laminare pienamente sviluppato di olio con viscosità $\mu = 0.2 \text{ kg/(m.s)}$ fra due lastre infinite parallele e ferme; la distanza fra le due lastre è $2Y = 4 \text{ mm}$ e il gradiente di pressione è $\partial p/\partial z = -1000 \text{ Pa/m}$. Calcolare: a) la tensione σ_{yz} sulla lastra superiore; b) la tensione σ_{yz} sulla lastra inferiore; c) la portata volumetrica g_v per ogni metro di larghezza della lastra ($X = 1 \text{ m}$).



- a) Dal profilo della tensione (10.4) sulla lastra superiore ($y = +Y$) si ha

$$\sigma_{yz} = -\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right)y \quad \rightarrow \quad \sigma_{yz}|_{y=+Y} = -\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right)(+Y) = -1000 \times \left(+\frac{0.004}{2}\right) = -2 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

ed è diretta nel verso positivo della z ; infatti, essendo la normale $\bar{n}$ negativa, si deve cambiare il segno della tensione data dalla (10.4). Sul fluido invece la tensione è diretta nel verso negativo della z .

- b) Dal profilo della tensione (10.4) sulla lastra inferiore ($y = -Y$) si ha

$$\sigma_{yz} = -\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right)y \quad \rightarrow \quad \sigma_{yz}|_{y=-Y} = -\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right)(-Y) = -1000 \times \left(-\frac{0.004}{2}\right) = +2 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

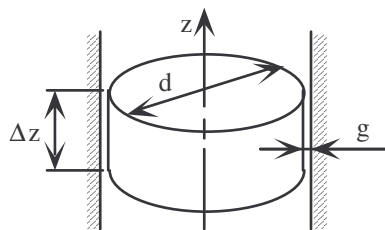
ed è diretta nel verso positivo della z ; infatti, essendo la normale $\bar{n}$ positiva, non si deve cambiare il segno della tensione data dalla (10.4). Sul fluido invece la tensione è diretta nel verso negativo della z .

- c) Dalla relazione (10.5) si ha

$$g_v = \frac{G_v}{X} = \frac{2}{3\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right) Y^3 = \frac{2}{3 \times 0.2} \times 1000 \times \left(\frac{0.004}{2}\right)^2 = 0.0133 \frac{\text{m}^3}{\text{s m}}$$

Esercizio 10.1.9

Una valvola di controllo di un circuito idraulico, dove opera un olio avente massa volumica $\rho = 850 \text{ kg/m}^3$ e viscosità $\mu = 0.02 \text{ kg/(m.s)}$, è costituita da un pistone di diametro $d = 35 \text{ mm}$ e di lunghezza $\Delta z = 25 \text{ mm}$; calcolare la portata di olio G_v che sfugge attraverso il gioco $g = 7.5 \mu\text{m}$ fra pistone e cilindro quando la differenza di pressione ammonta a $\Delta p = 15 \text{ MPa}$.



Il moto dell'olio fra pistone e cilindro può essere assimilato a quello che si verifica fra due lastre infinite parallele e ferme; dalla relazione (10.5) si ha

$$G_v = \frac{2}{3\mu} \left| -\frac{\partial p}{\partial z} \right| X Y^3 = \frac{2}{3\mu} \left| -\frac{\partial p}{\partial z} \right| \pi d \left(\frac{g}{2}\right)^3 = \frac{2}{3 \times 0.02} \times \left| -\frac{15 \times 10^6}{0.025} \right| \times \pi \times 0.035 \times \left(\frac{7.5 \times 10^{-6}}{2}\right)^3 =$$
$$= 116.0 \times 10^{-9} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 116.0 \frac{\text{mm}^3}{\text{s}}$$

dove la larghezza delle due lastre X corrisponde alla lunghezza del meato, approssimativamente alla circonferenza del cilindro ($X = \pi.d$), e dove la distanza Y fra le due lastre corrisponde a metà del gioco g .

La velocità media w_m diventa

$$w_m = \frac{G_v}{S} = \frac{G_v}{\pi d g} = \frac{116.0 \times 10^{-9}}{\pi \times 0.035 \times 75 \times 10^{-7}} = 0.1407 \frac{m}{s}$$

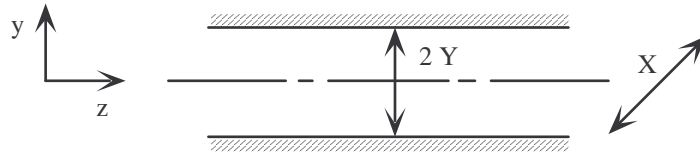
e il numero di Reynolds diventa

$$Re = \frac{\rho w_m g}{\mu} = \frac{850 \times 0.1407 \times 7.5 \times 10^{-6}}{0.02} = 0.0449$$

Il moto è laminare ($Re \ll 1400$) ed è quindi lecito applicare la relazione (10.5).

Esercizio 10.1.10

Si consideri un moto laminare pienamente sviluppato di acqua fra due lastre infinite parallele e ferme; la velocità massima del fluido è $w_{\max} = 6 \text{ m/s}$, la distanza fra le due lastre è $2Y = 0.2 \text{ mm}$ e la loro larghezza è $X = 30 \text{ mm}$. Calcolare la portata di energia cinetica nella sezione normale.



Il numero di Reynolds riferito alla velocità massima e alla distanza fra le due lastre è

$$Re = \frac{\rho w_{\max} 2Y}{\mu} = \frac{1000 \times 6 \times 0.2 \times 10^{-3}}{0.00101} = 1190$$

dove $\mu = 0.00101 \text{ kg/(m.s)}$ è un valore medio della viscosità dell'acqua desunto dalla tab. T.9, e quindi il moto può essere considerato laminare ($Re < 1400$).

Per la determinazione della portata di energia cinetica, definita come

$$\int_S \frac{w^2}{2} \rho w dS = \int_{-Y}^{+Y} \frac{w^2}{2} \rho w X dy = \int_{-Y}^{+Y} \frac{\rho X}{2} w^3 dy$$

può allora essere usata la velocità w data dalla relazione (B) dell'esercizio 10.1.5. Sostituendo si ha

$$\begin{aligned} \int_{-Y}^{+Y} \frac{\rho X}{2} w^3 dy &= \int_{-Y}^{+Y} \frac{\rho X}{2} w_{\max}^3 \left[1 - \left(\frac{y}{Y} \right)^2 \right]^3 dy = \int_{-Y}^{+Y} \frac{\rho X}{2} w_{\max}^3 \left[1 - 3 \left(\frac{y}{Y} \right)^2 + 3 \left(\frac{y}{Y} \right)^4 - \left(\frac{y}{Y} \right)^6 \right] dy = \\ &= \frac{\rho X}{2} w_{\max}^3 \left[(Y + Y) - 3 \left(\frac{Y^3}{3Y^2} + \frac{Y^3}{3Y^2} \right) + 3 \left(\frac{Y^5}{5Y^4} + \frac{Y^5}{5Y^4} \right) - \left(\frac{Y^7}{7Y^6} + \frac{Y^7}{7Y^6} \right) \right] = \\ &= \frac{\rho X}{2} w_{\max}^3 \frac{32}{35} Y = \frac{1000 \times 0.03}{2} \times 6^3 \times \frac{32}{35} \times 0.0001 = 0.296 \frac{J}{s} \end{aligned}$$

Esercizio 10.1.11

Trovare la velocità massima $w_{\max}$ del moto laminare pienamente sviluppato fra due lastre infinite parallele di cui una in moto e la posizione in cui essa si verifica.

La derivata del profilo della velocità (10.7) fatta rispetto alla distanza dal piano medio è

$$w = W \left(1 - \frac{y}{Y} \right) + \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) y(Y - y) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{W}{Y} + \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (Y - 2y)$$

e si annulla per il seguente valore di y

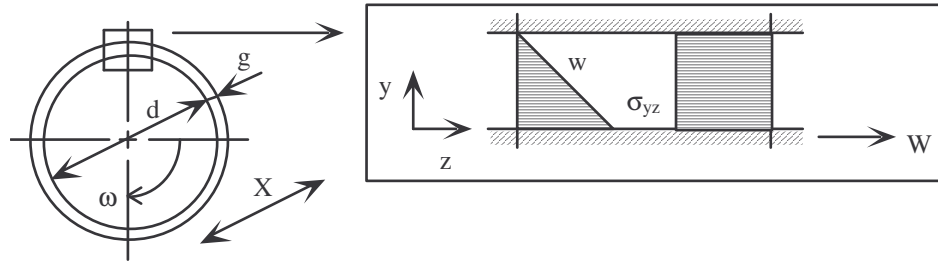
$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{W}{Y} + \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (Y - 2y) = 0 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{\frac{W}{Y}}{\frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right)} + \frac{Y}{2}$$

quindi la velocità massima è

$$w = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (Y^2 - y^2) \quad \rightarrow \quad w_{\max} = \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left[Y^2 - \left(-\frac{\frac{W}{Y}}{\frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{Y}{2}} \right)^2 \right].$$

Esercizio 10.1.12

Un cuscinetto di banco di un motore a combustione interna, lubrificato mediante un olio avente massa volumica $\rho = 850 \text{ kg/m}^3$ e viscosità $\mu = 0.02 \text{ kg/(m.s)}$, ha un diametro $d = 75 \text{ mm}$, una larghezza $X = 30 \text{ mm}$ e un gioco $g = 0.025 \text{ mm}$; se il perno ruota ad una velocità angolare $n = 3600 \text{ giri/min}$ e se non è caricato, in modo che il gioco g rimanga costante, calcolare il momento torcente M_t e la potenza P dissipata per attrito.



Poiché l'altezza del meato rimane costante, non si crea gradiente di pressione ($\partial p / \partial z = 0$) e i profili della velocità (10.7) e della tensione (10.8) diventano

$$w = W \left(1 - \frac{y}{Y} \right) + \frac{1}{2\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) y (Y - y) = W \left(1 - \frac{y}{Y} \right)$$

$$\sigma_{yz} = -\mu \frac{W}{Y} - \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) \left(y - \frac{Y}{2} \right) = -\mu \frac{W}{Y}$$

dove la velocità del perno W nel caso specifico assume il valore

$$W = \omega r = \frac{2\pi n}{60} \frac{d}{2} = \frac{2\pi 3600}{60} \times \frac{0.075}{2} = 14.14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Il numero di Reynolds riferito alla velocità del perno vale

$$\text{Re} = \frac{\rho W g}{\mu} = \frac{850 \times 14.14 \times 0.025 \times 10^{-3}}{0.02} = 15$$

e quindi assicura che il moto è laminare ($\text{Re} \ll 1500$) e che si possono usare le relazioni (10.7) e (10.8). Poiché il rapporto fra la larghezza X e l'altezza del meato g è molto grande

$$\frac{X}{g} = \frac{30 \times 10^{-3}}{0.025 \times 10^{-3}} = 1200,$$

si può considerare che il cuscinetto sia formato da due lastre infinite e quindi che si possano trascurare gli effetti di bordo; allora si ha

$$\sigma_{yz} = -\mu \frac{W}{g} = -0.02 \times \frac{14.14}{0.025 \times 10^{-3}} = -11310 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

per la tensione,

$$F_t = \sigma_{yz} S = \sigma_{yz} X \pi d = -11310 \times 30 \times 10^{-3} \times \pi \times 0.075 = -79.95 \text{ N}$$

per la forza di taglio,

$$M_t = F_t \frac{d}{2} = -79.95 \times \frac{0.075}{2} = -2.998 \text{ m.N}$$

per il momento torcente e

$$P = M_t \omega = M_t \frac{2\pi n}{60} = -2.998 \times \frac{2 \times \pi \times 3600}{60} = -1130 \text{ W}$$

per la potenza. Il segno negativo trovato in tutti i termini indica che si tratta di quantità dissipative.

Esercizio 10.1.13

Trovare: a) la velocità massima $w_{\max}$ del moto laminare pienamente sviluppato in un tubo e la posizione in cui essa si verifica; b) la relazione fra la velocità generica w e quella massima $w_{\max}$; c) il rapporto fra la velocità massima $w_{\max}$ e quella media w_m .

a) La derivata del profilo della velocità (10.11) fatta rispetto al raggio generico r è

$$w = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (R^2 - r^2) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) 2r$$

e si annulla per il seguente valore di r

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) 2r = 0 \quad \rightarrow \quad r = 0 ;$$

quindi la velocità massima è

$$w = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (R^2 - r^2) \quad \rightarrow \quad w_{\max} = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^2$$

e si verifica in corrispondenza dell'asse del tubo.

b) Sostituendo la relazione della velocità massima (10.15) nella relazione del profilo della velocità (10.11) si ha

$$w = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (R^2 - r^2) = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = w_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

c) Dalla relazione della velocità massima (10.15) e da quella della velocità media (10.14) si ha

$$\frac{w_{\max}}{w_m} = \frac{\frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^2}{\frac{1}{8\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^2} = 2.$$

Esercizio 10.1.14

Calcolare il raggio in corrispondenza del quale la velocità w all'interno di un tubo nel moto laminare eguaglia quella media w_m .

Dalle relazioni (10.11) e (10.14) si ha

$$\begin{aligned} w = w_m & \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) (R^2 - r^2) = \frac{1}{8\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^2 \quad \rightarrow \\ & \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4} R^2 - \frac{1}{4} r^2 = \frac{1}{8} R^2 \quad \rightarrow \quad 2r^2 = R^2 \quad \rightarrow \quad r = \frac{R}{\sqrt{2}} = 0.707 R. \end{aligned}$$

Esercizio 10.1.15

La resistenza incontrata da un fluido in una tubazione può essere definita, per analogia con la legge di Ohm, come rapporto fra la caduta di pressione (differenza di potenziale) e la portata volumetrica (corrente elettrica). Calcolare la resistenza R nel caso di un tubo di diametro $D = 0.25$ mm, lungo $L = 50$ mm e percorso da olio lubrificante a $T = 40$ °C nel caso di moto laminare.

Dalla tab. T.10 per la viscosità dell'olio si ha il valore $\mu = 0.034$ kg/(m.s) e dalla relazione (10.13) si ha

$$R = \frac{\Delta p}{G_v} = -\frac{8\mu \Delta z}{\pi R^4} = -\frac{128\mu L}{\pi D^4} = -\frac{128 \times 0.034 \times 0.05}{\pi \times 0.00025^4} = -177 \times 10^9 \frac{\text{Pa}}{\text{m}^3/\text{s}}.$$

Esercizio 10.1.16

Un tubo lungo $L = 0.45$ m e di diametro interno $D = 0.75$ mm viene usato come viscosimetro capillare. La taratura, fatta con acqua a $T = 15$ °C, ha dato una portata $G_v = 1 \times 10^{-6}$ m³/s con una caduta di pressione $\Delta p = 70$ kPa. Calcolare l'errore percentuale nella viscosità usando direttamente la relazione (10.12).

La viscosità dell'acqua a $T = 15$ °C in base alla tab. T.10 vale

$$\mu = 0.00114 \frac{\text{kg}}{\text{m s}};$$

usando la relazione (10.13) si ottiene invece

$$G_v = \frac{\pi}{8\mu'} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) R^4 = -\frac{\pi \Delta p D^4}{128 \mu' L} \rightarrow \mu' = \frac{\pi D^4 \Delta p}{128 G_v L} = \frac{\pi \times 0.00075^4 \times 70000}{128 \times 1 \times 10^{-6} \times 0.45} = 0.00121 \frac{\text{kg}}{\text{m s}}.$$

L'errore percentuale è quindi

$$\frac{\mu' - \mu}{\mu} = \frac{\mu'}{\mu} - 1 = \frac{0.00121}{0.00114} - 1 = 1.06 - 1 = 0.06 = 6 \%.$$

Esercizio 10.1.17

In un tubo orizzontale di diametro $D = 150$ mm la caduta di pressione fra due sezioni distanti $L = 7.5$ m vale $\Delta p = -21$ kPa; calcolare la tensione che agisce sulla parete ($r = R$) in caso di moto laminare pienamente sviluppato.

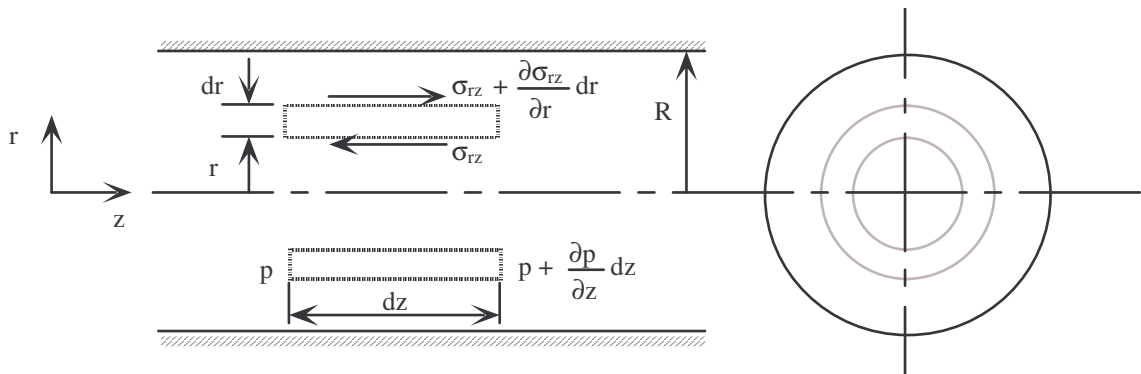
Dalla relazione (10.12) la tensione sulla parete vale

$$\tau_w = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right) R = -\frac{D}{4} \frac{\Delta p}{L} = -\frac{0.15}{4} \times \frac{21000}{7.5} = -105 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

ed è diretta nel verso positivo della z ; infatti, essendo la normale $\vec{n}$ negativa, si deve cambiare il segno della tensione data dalla (10.11). Sul fluido invece la tensione è diretta nel verso negativo della z .

Esercizio 10.1.18

Si consideri un flusso pienamente sviluppato all'interno di un tubo. Trovare nel caso di fluido newtoniano le relazioni generali per la tensione σ_{rz} e per la velocità w in funzione del raggio r e di due costanti a e b .



La componente in z della relazione della quantità di moto (6.5) riferita al volume infinitesimo della figura è formata dalle seguenti due quantità

$$1) -p dS_z = - \left[-p 2\pi r dr + \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) 2\pi r dr \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} 2\pi r dr dz$$

$$\begin{aligned} 2) \sigma_{iz} dS_i &= \left(\sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} dr \right) 2\pi (r+dr) dz - \sigma_{rz} 2\pi r dz = \\ &= \sigma_{rz} 2\pi r dz + \sigma_{rz} 2\pi dr dz + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} dr 2\pi r dz + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} dr 2\pi dr dz - \sigma_{rz} 2\pi r dz = \end{aligned}$$

$$= \sigma_{rz} 2\pi r dz + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} dr 2\pi r dz + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} dr 2\pi r dz ;$$

trascurando l'infinitesimo di ordine superiore, dividendo per il volume $2\pi r dr dz$ e considerando il gradiente di pressione costante lungo z si ottiene

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\sigma_{rz}}{r} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dr}(r \sigma_{rz}) = r \frac{dp}{dz} .$$

Integrando la relazione precedente rispetto ad r si ha

$$r \sigma_{rz} = \frac{dp}{dz} \frac{r^2}{2} + a \quad \rightarrow \quad \sigma_{rz} = \frac{1}{2} \frac{dp}{dz} r + \frac{a}{r} , \quad (A)$$

sostituendo la legge di Newton si ricava

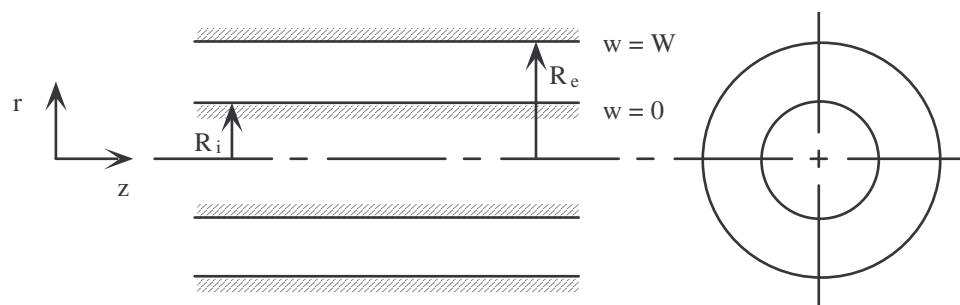
$$\mu \frac{dw}{dr} = \frac{1}{2} \frac{dp}{dz} r + \frac{a}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{dw}{dr} = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dz} r + \frac{a}{\mu r}$$

e integrando nuovamente rispetto ad r si ottiene

$$w = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} r^2 + \frac{a}{\mu} \ln(r) + b . \quad (B)$$

Esercizio 10.1.19

Si consideri un flusso pienamente sviluppato in un toro fra due tubi concentrici. Il tubo interno di raggio R_i è fermo mentre quello esterno di raggio R_e si muove con velocità W . Assumendo nullo il gradiente di pressione lungo l'asse, trovare le relazioni generali per la tensione σ_{rz} e per la velocità w in funzione del raggio r .



Le relazioni di equilibrio per la tensione e la velocità, nel caso di gradiente della pressione nullo, possono essere ricavate dalle relazioni (A) e rispettivamente (B) dell'esercizio 10.1.18

$$\sigma_{rz} = \frac{a}{r} \quad w = \frac{a}{\mu} \ln(r) + b .$$

Le condizioni al contorno delle velocità portano alle seguenti relazioni e quindi ai seguenti valori delle costanti

$$\begin{aligned} w|_{r=R_e} = W & \rightarrow W = \frac{a}{\mu} \ln(R_e) + b \rightarrow W = \frac{a}{\mu} \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right) \rightarrow a = \frac{\mu W}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \\ w|_{r=R_i} = 0 & \rightarrow 0 = \frac{a}{\mu} \ln(R_i) + b \rightarrow b = -\frac{a}{\mu} \ln(R_i) \rightarrow b = -\frac{W \ln(R_i)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \end{aligned}$$

Le relazioni diventano allora

$$\sigma_{rz} = \frac{\mu W}{r \ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} \quad w = \frac{W \ln\left(\frac{r}{R_i}\right)}{\ln\left(\frac{R_e}{R_i}\right)} .$$

Esercizio 10.1.20

Una sostanza medicinale liquida, avente la massa volumica e la viscosità dell'acqua, viene iniettata con un

ago ipodermico lungo $L = 50 \text{ mm}$ e di diametro interno $D = 0.25 \text{ mm}$. Calcolare: a) la portata massima G_v che mantiene il moto laminare; b) la caduta di pressione Δp per mantenere questa portata; c) la tensione sulla parete τ_w .

a) Assumendo per il numero di Reynolds critico il valore $Re_{cr} = 2300$, affinché il moto rimanga laminare, si deve verificare che il valore del numero di Reynolds sia inferiore o al massimo uguale a quello critico

$$Re = \frac{\rho w_m D}{\mu} \leq Re_{cr} \quad \rightarrow \quad w_m \leq \frac{Re_{cr} \mu}{\rho D} ;$$

la massa volumica e la viscosità dell'acqua alla temperatura ambiente $T = 15^\circ \text{C}$

$$\rho = 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \mu = 0.00114 \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$$

sono prese rispettivamente dalle tabelle T.2 e T.10 e consentono di ottenere la velocità media massima

$$w_m \leq \frac{Re_{cr} \mu}{\rho D} = \frac{2300 \times 0.00114}{999 \times 0.00025} = 10.50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e la portata massima

$$G_v = w_m S = \frac{w_m \pi D^2}{4} = \frac{10.50 \times \pi \times 0.00025^2}{4} = 0.515 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} .$$

b) La caduta di pressione è data dalla relazione (10.16)

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{L} = \frac{32 \mu w_m}{D^2} \quad \rightarrow \quad \Delta p = -\frac{32 \mu w_m L}{D^2} = -\frac{32 \times 0.00114 \times 10.5 \times 0.05}{0.00025^2} = -0.306 \times 10^6 \text{ Pa} .$$

c) Poiché il moto è laminare, la tensione esercitata dal fluido sulla parete è data dalla relazione (10.12)

$$\tau_w = -\frac{R}{2} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{D}{4} \frac{32 \mu w_m}{D^2} = \frac{8 \mu w_m}{D} = \frac{8 \times 0.00114 \times 10.5}{0.00025} = 192 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

ed è diretta nel verso del moto.

Esercizio 10.1.21

Si consideri acqua e olio lubrificante alla temperatura $T = 40^\circ \text{C}$ che scorrono all'interno di un tubo di diametro $D = 6 \text{ mm}$. Determinare la portata massima G_v e il corrispondente gradiente di pressione Δp dei due liquidi affinché il moto si mantenga laminare.

Assumendo per il numero di Reynolds critico il valore $Re_{cr} = 2300$, affinché il moto rimanga laminare, si deve verificare che il valore del numero di Reynolds sia inferiore o al massimo uguale a quello critico

$$Re = \frac{\rho w_m D}{\mu} \leq Re_{cr} \quad \rightarrow \quad w_m \leq \frac{Re_{cr} \mu}{\rho D} ;$$

la massa volumica e la viscosità dell'acqua

$$\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \mu = 0.00065 \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$$

e dell'olio

$$\rho = 880 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \mu = 0.034 \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$$

sono prese rispettivamente dalle tabelle T.1 e T.10 e consentono di ottenere la velocità media massima

$$\begin{array}{ll} \text{acqua} & w_m \leq \frac{Re_{cr} \mu}{\rho D} = \frac{2300 \times 0.00065}{1000 \times 0.006} = 0.249 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \text{olio} & w_m \leq \frac{Re_{cr} \mu}{\rho D} = \frac{2300 \times 0.034}{880 \times 0.006} = 14.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{array} .$$

La portata massima nei due casi è

$$\begin{aligned} \text{acqua} \quad G_v &= w_m S = \frac{w_m \pi D^2}{4} = \frac{0.249 \times \pi \times 0.006^2}{4} = 7.04 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \\ \text{olio} \quad G_v &= w_m S = \frac{w_m \pi D^2}{4} = \frac{14.8 \times \pi \times 0.006^2}{4} = 418 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \end{aligned}$$

mentre il gradiente di pressione è ottenuto dalla (10.16)

$$\begin{aligned} \text{acqua} \quad -\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{32 \mu w_m}{D^2} = \frac{32 \times 0.00065 \times 0.249}{0.006^2} = 144 \frac{\text{Pa}}{\text{m}} \\ \text{olio} \quad -\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{32 \mu w_m}{D^2} = \frac{32 \times 0.034 \times 14.8}{0.006^2} = 447000 \frac{\text{Pa}}{\text{m}} \end{aligned}$$

Esercizio 10.1.22

Un'iniezione di acqua è fatta con un tubo capillare di diametro interno $D = 0.25$ mm. Determinare la portata massima G_v per mantenere il moto laminare e la caduta di pressione Δp richiesta per produrre questa portata in un tubo lungo $L = 0.75$ m.

Assumendo per il numero di Reynolds critico il valore $Re_{cr} = 2300$, affinché il moto rimanga laminare, si deve verificare che il valore del numero di Reynolds sia inferiore o al massimo uguale a quello critico

$$Re = \frac{\rho w_m D}{\mu} \leq Re_{cr} \quad \rightarrow \quad w_m \leq \frac{Re_{cr} \mu}{\rho D} ;$$

la massa volumica e la viscosità dell'acqua alla temperatura ambiente $T = 15$ °C

$$\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \mu = 0.00114 \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$$

sono prese rispettivamente dalle tabelle T.1 e T.10 e consentono di ottenere la velocità media massima

$$w_m \leq \frac{Re_{cr} \mu}{\rho D} = \frac{2300 \times 0.00114}{1000 \times 0.00025} = 10.50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e la portata massima

$$G_v = w_m S = \frac{w_m \pi D^2}{4} = \frac{10.50 \times \pi \times 0.00025^2}{4} = 0.515 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

La caduta di pressione è ottenuta dalla relazione (10.16)

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{L} = \frac{32 \mu w_m}{D^2} \quad \rightarrow \quad \Delta p = -\frac{32 \mu w_m L}{D^2} = -\frac{32 \times 0.00114 \times 10.50 \times 0.75}{0.00025^2} = -4.60 \times 10^6 \text{ Pa} .$$

Esercizio 10.1.23

All'interno di un tubo nel caso di moto laminare il rapporto fra la velocità generica e quella sull'asse W (massima) è dato dalla relazione

$$\frac{w}{W} = \frac{w}{w_{\max}} = 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 ,$$

mentre nel caso di moto turbolento è dato dalla legge esponenziale

$$\frac{\bar{w}}{W} = \frac{\bar{w}}{w_{\max}} = \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{1/n} .$$

Trovare in entrambi i casi il valore del rapporto r/R per cui la velocità generica sia uguale a quella media w_m ($n = 7$ nel caso di moto turbolento).

Nel caso di moto laminare la velocità media e quella massima sono date rispettivamente dalle relazioni (10.14) e (10.15)

$$w_m = -\frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dz} R^2 \quad w_{\max} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} R^2 ;$$

si ha allora

$$-\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}R^2=-\frac{1}{8\mu}\frac{dp}{dz}R^2 \quad \rightarrow \quad 1-\left(\frac{r}{R}\right)^2=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{r}{R}=\sqrt{\frac{1}{2}}=0.707 \text{ .}$$

Nel caso di moto turbolento il rapporto fra la velocità media e quella massima è data dalla relazione

$$\frac{\bar{w}_m}{W}=\frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \text{ ;}$$

si ha allora

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{r}{R}\right)^{1/n} &= \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \quad \rightarrow \quad 1-\frac{r}{R}=\left[\frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}\right]^n \quad \rightarrow \\ &\rightarrow \quad \frac{r}{R}=1-\left[\frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}\right]^n=1-0.242=0.758 \text{ .} \end{aligned}$$

10.2.- RESISTENZE NEI TUBI

Esercizio 10.2.1

Calcolare il coefficiente di energia cinetica α dell'esercizio 10.1.10.

Dalla definizione di coefficiente di energia cinetica (10.18) si ottiene

$$\alpha = \frac{\int_S \rho w^3 dS}{G_m w_m^2} = \frac{\int_S \rho w^3 dS}{\rho w_m^3 S} = \frac{\int_{-Y}^{+Y} \rho X w_{\max}^3 \left[1 - \left(\frac{y}{Y}\right)^2\right]^3 dy}{\rho w_m^3 X 2 Y}$$

e, poiché il rapporto fra velocità massima e velocità media nell'interstizio fra due lastre piane infinite parallele ferme è 3/2 (vedi esercizio 10.1.5), si ricava

$$\frac{\int_{-Y}^{+Y} \rho X w_{\max}^3 \left[1 - \left(\frac{y}{Y}\right)^2\right]^3 dy}{\rho w_m^3 X 2 Y} = \left(\frac{w_{\max}}{w_m}\right)^3 \frac{\int_{-Y}^{+Y} \left[1 - \left(\frac{y}{Y}\right)^2\right]^3 dy}{2 Y} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \frac{32}{35} \frac{Y}{2 Y} = \frac{128}{35} = 1.54 .$$

L'integrale è stato ricavato dall'esercizio 10.1.10.

Esercizio 10.2.2

Acqua scorre in un tubo a sezione costante. All'entrata la pressione è $p_1 = 590$ kPa, mentre all'uscita la pressione corrisponde a quella atmosferica $p_2 = p_{\text{atm}}$; la differenza di altezza fra uscita e entrata è $z_2 - z_1 = 25$ m. Determinare: a) la perdita di altezza totale h_t ; b) la pressione all'entrata p_1 nel caso in cui il tubo sia orizzontale ($z_1 = z_2$).

a) Poiché la sezione è costante, si ha $\alpha_1 = \alpha_2$ e $w_{m1} = w_{m2}$; dalla relazione (10.17) si ha quindi

$$h_t = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) = \frac{590000 - 101325}{1000} + 9.80665 \times (-25) = 243.5 \frac{\text{J}}{\text{kg}} .$$

b) Dalla stessa relazione si ha

$$h_t = \frac{p_1 - p_2}{\rho} \quad \rightarrow \quad p_1 = p_2 + \rho h_t = 101325 + 1000 \times 243.5 = 345 \text{ kPa} .$$

Esercizio 10.2.3

Acqua a temperatura $T = 20$ °C scorre con flusso stazionario in un tubo orizzontale di diametro $D = 900$ mm; la velocità media è $u_m = 5$ m/s e la rugosità relativa è $e/D = 0.0004$. Valutare il coefficiente di resistenza f .

Nel caso in esame il numero di Reynolds è

$$\text{Re} = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{1000 \times 5 \times 0.9}{0.00101} = 4.46 \times 10^6$$

dove la viscosità è ricavata dalla tabella T.10.

Dal diagramma 10.1, con i valori di Re e di e/D dati, si trova $f \cong 0.016$.

Esercizio 10.2.4

Un tubo in ferro lungo $L = 15$ m e di diametro $D = 25$ mm deve essere utilizzato in posizione orizzontale per portare acqua alla temperatura $T = 15$ °C con una velocità media $u_m = 5$ m/s. Determinare il coefficiente di resistenza f e la perdita di altezza continua h_c .

Nel caso in esame il numero di Reynolds è

$$\text{Re} = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{1000 \times 5 \times 0.025}{0.00114} = 0.110 \times 10^6 ,$$

dove la viscosità è ricavata dalla tabella T.9. Dal diagramma 10.2, per un tubo in ferro di diametro $D = 25 \text{ mm}$ ($= 1 \text{ in}$), si ottiene una rugosità relativa pari a $e/D = 0.0018$; di conseguenza dal diagramma 10.1 si ricava $f \cong 0.024$. La perdita di altezza continua è data dalla relazione (10.19)

$$h_c = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2} = 0.024 \times \frac{15}{0.025} \times \frac{5^2}{2} = 180 \frac{\text{J}}{\text{kg}} .$$

Esercizio 10.2.5

Una portata d'acqua $G_v = 0.2 \text{ m}^3/\text{s}$ scorre alla temperatura $T = 20^\circ\text{C}$ in un tubo di ferro di diametro $D = 150 \text{ mm}$. Calcolare il coefficiente di resistenza f .

La velocità media, in base ai dati del problema, vale

$$u_m = \frac{G_v}{S} = \frac{4 G_v}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.2}{\pi \times 0.15^2} = 11.32 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e quindi il numero di Reynolds diventa

$$\text{Re} = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{1000 \times 11.32 \times 0.15}{0.00101} = 1.68 \times 10^6 .$$

dove la viscosità è ricavata dalla tabella T.9. Dal diagramma 10.2 si trova una rugosità relativa ($150 \text{ mm} = 5.9 \text{ in}$) $e/D \cong 0.0003$ e quindi dal diagramma 10.1, con i valori di Re e di e/D dati, si trova $f \cong 0.0155$.

Esercizio 10.2.6

Un tubo liscio di diametro $D = 76 \text{ mm}$ ($= 3 \text{ in}$) trasporta alla temperatura $T = 65^\circ\text{C}$ una portata d'acqua pari a $G_m = 12 \text{ kg/s}$; la caduta di pressione osservata su una lunghezza $L = 30 \text{ m}$ vale $\Delta p = 19 \text{ kPa}$. Trovare il coefficiente di resistenza f e confrontare il valore ottenuto con quello del diagramma 10.1 del Moody.

La perdita continua di altezza è data dalla relazione (10.19)

$$h_c = \frac{\Delta p}{\rho} = \frac{19000}{1000} = 19.0 \frac{\text{J}}{\text{kg}} ,$$

la velocità media è

$$u_m = \frac{G_m}{\rho S} = \frac{4 G_m}{\rho \pi D^2} = \frac{4 \times 12}{1000 \times \pi \times 0.076^2} = 2.645 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e il numero di Reynolds

$$\text{Re} = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{1000 \times 2.645 \times 0.076}{0.000435} = 457000 ,$$

dove la viscosità è ricavata dalla tabella T.9, assicura che il moto è di tipo turbolento. Il coefficiente di resistenza f viene determinato dalla relazione (10.19)

$$h_c = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2} \quad \rightarrow \quad f = \frac{2 D h_c}{L u_m^2} = \frac{2 \times 0.076 \times 19.0}{30 \times 2.645^2} = 0.0138 .$$

Dal diagramma 10.1 si ricava, per tubi lisci e per il numero di Reynolds dato, il valore $f \cong 0.0134$.

Esercizio 10.2.7

Una portata massica $G_m = 15 \text{ kg/s}$ di acqua alla temperatura $T = 20^\circ\text{C}$ scorre in una tubazione di ghisa avente diametro $D = 0.1 \text{ m}$. Determinare la caduta di pressione Δp su una lunghezza orizzontale $L = 100 \text{ m}$.

La velocità media è

$$u_m = \frac{G_m}{\rho S} = \frac{4 G_m}{\rho \pi D^2} = \frac{4 \times 15}{1000 \times \pi \times 0.1^2} = 1.910 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e il numero di Reynolds è

$$Re = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{1000 \times 1.910 \times 0.1}{0.00101} = 189000 ,$$

dove la viscosità è ricavata dalla tabella T.9. Dal diagramma 10.2, per tubi di ghisa di diametro $D = 100 \text{ mm}$ ($= 3.94 \text{ in}$), si trova la rugosità relativa $e/D \cong 0.0025$ e quindi dal diagramma 10.1, con i valori dati di Re e di e/D , si trova il coefficiente di resistenza $f \cong 0.0275$.

La perdita di altezza continua viene determinata dalla relazione (10.19)

$$h_c = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2} = 0.0275 \times \frac{100}{0.1} \times \frac{1.910^2}{2} = 50.16 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

e la differenza di pressione sempre dalla relazione (10.19)

$$h_c = \frac{\Delta p}{\rho} \quad \rightarrow \quad \Delta p = \rho h_c = 1000 \times 50.16 = 50200 \text{ Pa} .$$

Esercizio 10.2.8

Una portata volumetrica $G_v = 0.6 \text{ m}^3/\text{s}$ d'aria alla temperatura $T = 15^\circ\text{C}$ scorre in un tubo liscio di diametro $D = 0.3 \text{ m}$ e lungo $L = 50 \text{ m}$. Determinare la differenza di altezza fra ingresso z_1 e uscita z_2 affinché la pressione si mantenga costante $p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}$.

La velocità media è

$$u_m = \frac{G_v}{S} = \frac{4 G_v}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.6}{\pi \times 0.3^2} = 8.488 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e il numero di Reynolds è

$$Re = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{1.227 \times 8.488 \times 0.3}{0.0000178} = 176000$$

dove la viscosità è ricavata dalla tabella T.9. Dal diagramma 10.1, per il valore dato di Re e per un tubo liscio, si trova il coefficiente di resistenza $f \cong 0.016$.

La perdita di altezza continua viene determinata dalla relazione (10.19)

$$h_c = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2} = 0.016 \times \frac{50}{0.3} \times \frac{8.488^2}{2} = 96.06 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

e la differenza di altezza, nelle condizioni $p_1 = p_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ e $u_{m1} = u_{m2}$, dalla relazione (10.17) con $h_t = h_c$ perché la perdita accidentale h_a è nulla

$$\left(\alpha_1 \frac{u_{m1}^2}{2} - \alpha_2 \frac{u_{m2}^2}{2} \right) + \left(\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} \right) + (g z_1 - g z_2) = h_c \quad \rightarrow \quad z_1 - z_2 = \frac{h_c}{g} = \frac{96.06}{9.80665} = 9.80 \text{ m} .$$

Esercizio 10.2.9

Una portata volumetrica $G_v = 0.001 \text{ m}^3/\text{s}$ d'acqua scorre in un tubo di ghisa di diametro $D = 30 \text{ mm}$ e lungo $L = 30 \text{ m}$. Determinare la differenza di altezza fra ingresso z_1 e uscita z_2 affinché la pressione si mantenga costante $p_1 = p_2$.

La velocità media è

$$u_m = \frac{G_v}{S} = \frac{4 G_v}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.001}{\pi \times 0.03^2} = 1.415 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

il numero di Reynolds è

$$Re = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{1000 \times 1.415 \times 0.03}{0.00091} = 46600$$

dove la viscosità è ricavata dalla tabella T.9. Dal diagramma 10.2, per tubi di ghisa di diametro $D = 30 \text{ mm}$ ($= 1.18 \text{ in}$), si trova la rugosità relativa $e/D \cong 0.008$ e dal diagramma 10.1, con i valori dati di Re e di e/D , si trova il coefficiente di resistenza $f \cong 0.037$.

La perdita di altezza continua viene determinata dalla relazione (10.19)

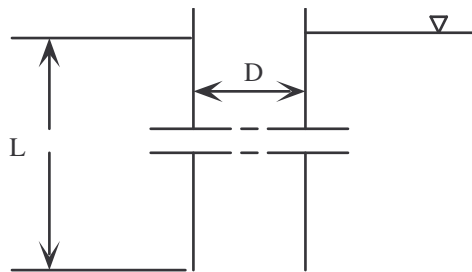
$$h_c = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2} = 0.037 \times \frac{30}{0.03} \times \frac{1.415^2}{2} = 37.04 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

e la differenza di altezza, nelle condizioni $p_1 = p_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ e $u_{m1} = u_{m2}$, dalla relazione (10.17) con $h_t = h_c$ perché la perdita accidentale h_a è nulla

$$\left(\alpha_1 \frac{u_{m1}^2}{2} - \alpha_2 \frac{u_{m2}^2}{2} \right) + \left(\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} \right) + (g z_1 - g z_2) = h_c \quad \rightarrow \quad z_1 - z_2 = \frac{h_c}{g} = \frac{37.04}{9.80665} = 3.78 \text{ m} .$$

Esercizio 10.2.10

Un impianto di "conversione di energia termica oceanica" (O T E C = Ocean Thermal Energy Conversion) estrae acqua di mare fredda alla temperatura $T = 4^\circ \text{C}$ mediante un tubo di diametro $D = 28.2 \text{ m}$ il cui ingresso si trova a $L = 1000 \text{ m}$ sotto il livello del mare. Se la velocità media è $u_m = 1.83 \text{ m/s}$, se la rugosità del tubo è $e = 0.01 \text{ m}$ e se si può considerare costante la temperatura, stimare la pressione statica dell'acqua fredda nel tubo al livello del mare.



Il numero di Reynolds è

$$Re = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{1025 \times 1.83 \times 28.2}{0.00152} = 34.8 \times 10^6$$

dove la viscosità è ricavata dalla tabella T.9 e la rugosità relativa è

$$\frac{e}{D} = \frac{0.01}{28.2} = 0.00035 ;$$

quindi dal diagramma 10.1, per i valori dati di Re e di e/D , si trova il coefficiente di resistenza $f \cong 0.0155$.

La perdita di altezza continua viene determinata dalla relazione (10.19)

$$h_c = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2} = 0.0155 \times \frac{1000}{28.2} \times \frac{1.83^2}{2} = 0.9204 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

e la pressione statica al livello del mare, nelle condizioni $\alpha_1 = \alpha_2$ e $u_{m1} = u_{m2}$, dalla relazione (10.17) con $h_t = h_c$ perché la perdita accidentale h_a è nulla

$$\left(\alpha_1 \frac{u_{m1}^2}{2} - \alpha_2 \frac{u_{m2}^2}{2} \right) + \left(\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} \right) + (g z_1 - g z_2) = h_c \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad p_2 = p_1 - \rho g L - \rho h_c = -\rho h_c = -1025 \times 0.9204 = -943 \text{ Pa}$$

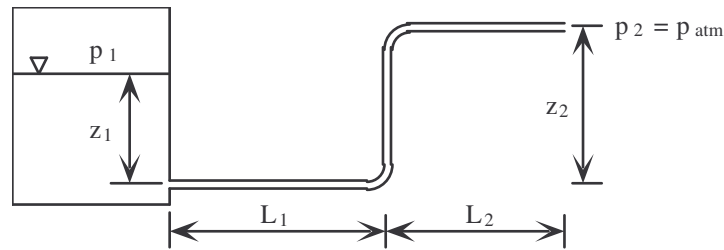
dove la pressione statica alla profondità $L = 1000 \text{ m}$ vale

$$p_1 = \rho g L = 1025 \times 9.80665 \times 1000 = 10.1 \times 10^6 \text{ Pa} .$$

Esercizio 10.2.11

Una portata volumetrica d'acqua pari a $G_v = 0.14 \text{ m}^3/\text{s}$ defluisce da un ampio serbatoio verso un tubo di ghisa, di diametro interno $D = 0.2 \text{ m}$, che scarica alla pressione atmosferica. Se $T = 10^\circ \text{C}$, $z_1 = 100 \text{ m}$, $z_2 = 150 \text{ m}$,

$L_1 = 500$ m e $L_2 = 200$ m, calcolare la pressione p_1 per produrre il flusso.



La velocità media è

$$u_m = \frac{G_v}{S} = \frac{4 G_v}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.14}{\pi \times 0.2^2} = 4.456 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e il numero di Reynolds è

$$Re = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{1000 \times 4.456 \times 0.2}{0.00131} = 680000$$

dove la viscosità è ricavata dalla tabella T.9. Dal diagramma 10.2, per tubi di ghisa di diametro $D = 200$ mm (= 7.87 in), si trova la rugosità relativa $e/D \cong 0.0014$ e quindi dal diagramma 10.1, con i valori dati di Re e di e/D , si trova il coefficiente di resistenza $f \cong 0.0217$.

La perdita di altezza continua viene determinata dalla relazione (10.19)

$$h_c = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2} = f \frac{L_1 + L_2 + z_2}{D} \frac{u_m^2}{2} = 0.0217 \times \frac{500 + 200 + 150}{0.2} \times \frac{4.456^2}{2} = 915.6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

mentre la perdita di altezza accidentale viene determinata, per la presenza dell'imbocco, dello sbocco e dei due gomiti a 90° , dalla relazione (10.20)

$$h_a = \left(K_i + K_s + 2f \frac{L_e}{D} \right) \frac{u_m^2}{2} = (0.5 + 1 + 2 \times 0.0217 \times 30) \times \frac{4.456^2}{2} = 27.82 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

dove K_i (relativo all'imbocco), K_s (relativo allo sbocco) e L_e/D (relativo ai gomiti a 90°) sono trovati rispettivamente dalla tab. 10.1, dalla fig. 10.1 (per $A = 0$) e dalla tab. 10.3 del capitolo 10 della teoria.

La perdita di altezza totale assomma allora a

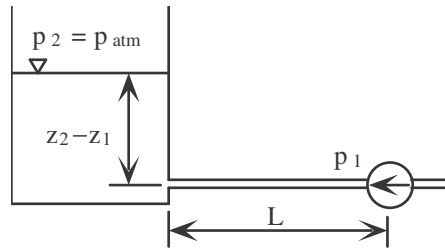
$$h_t = h_c + h_a = 915.6 + 27.82 = 943.2 \frac{\text{J}}{\text{kg}} .$$

La pressione all'interno del serbatoio, nelle condizioni $\alpha_2 \cong 1$ e $u_{m1} \cong 0$, viene calcolata mediante la relazione (10.17)

$$\begin{aligned} \left(\alpha_1 \frac{u_{m1}^2}{2} - \alpha_2 \frac{u_{m2}^2}{2} \right) + \left(\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} \right) + (g z_1 - g z_2) &= h_t \quad \rightarrow \quad p_1 = \frac{\rho u_{m2}^2}{2} + p_{atm} + \rho g (z_2 - z_1) + \rho h_t = \\ &= \frac{1000 \times 4.456^2}{2} + 101325 + 1000 \times 9.80665 \times (150 - 100) + 1000 \times 943.1 = \\ &= 9928 + 101325 + 4903 + 943100 = 1060000 \text{ Pa} = 10.6 \text{ bar} . \end{aligned}$$

Esercizio 10.2.12

Una pompa spinge acqua alla temperatura $T = 15^\circ \text{C}$ e alla velocità media $u_m = 3$ m/s, con un tubo in ghisa di diametro $D = 0.25$ e lungo $L = 5$ km, in un serbatoio aperto all'atmosfera e in cui il livello raggiunge la quota $z_2 - z_1 = 7$ m. Determinare la pressione a valle della pompa.



Il numero di Reynolds è

$$Re = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{1000 \times 3 \times 0.25}{0.00114} = 658000$$

dove la viscosità è ricavata dalla tabella T.9. Dal diagramma 10.2, per tubi di ghisa di diametro $D = 0.25$ mm (= 9.84 in), si trova la rugosità relativa $e/D \cong 0.001$ e di conseguenza dal diagramma 10.1, con i valori dati di Re e di e/D , si trova il coefficiente di resistenza $f \cong 0.0205$.

La perdita di altezza continua viene determinata dalla relazione (10.19)

$$h_c = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2} = 0.0205 \times \frac{5000}{0.25} \times \frac{3^2}{2} = 1845 \frac{J}{kg}$$

mentre la perdita di altezza accidentale viene determinata, per la presenza dello sbocco del tubo nel serbatoio, dalla relazione (10.20)

$$h_a = K \frac{u_m^2}{2} = 1 \times \frac{3^2}{2} = 4.50 \frac{J}{kg}$$

dove K (relativo allo sbocco) è trovato dalla fig. 10.1 (per $A = 0$) del testo.

La perdita di altezza totale assomma allora a

$$h_t = h_c + h_a = 1845 + 4.50 = 1850 \frac{J}{kg}$$

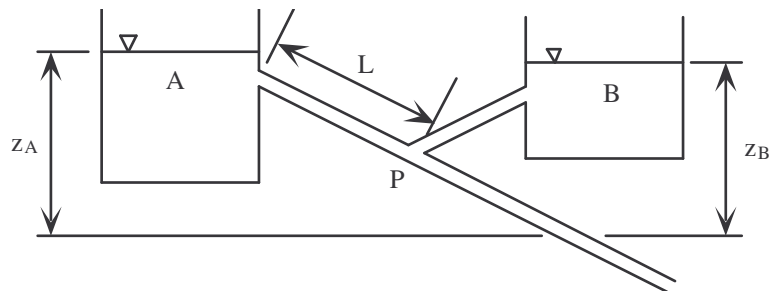
da cui si vede che la perdita accidentale è trascurabile rispetto a quella continua.

La pressione all'uscita dalla pompa, nelle condizioni $\alpha_1 \cong 1$, $u_{m2} \cong 0$ e $p_2 = p_{atm}$, viene calcolata dalla relazione (10.17)

$$\begin{aligned} \left(\alpha_1 \frac{u_{m1}^2}{2} - \alpha_2 \frac{u_{m2}^2}{2} \right) + \left(\frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} \right) + (g z_1 - g z_2) &= h_t \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad p_1 &= -\frac{\rho u_{m1}^2}{2} + p_{atm} + \rho g (z_2 - z_1) + \rho h_t = -\frac{1000 \times 3^2}{2} + 101325 + 1000 \times 9.80665 \times 7 + 1000 \times 1850 = \\ &= -4500 + 101325 + 68647 + 1850000 = 2010000 \text{ Pa} = 20.1 \text{ bar} \end{aligned}$$

Esercizio 10.2.13

Nel sistema idraulico riportato in figura determinare l'altezza z_B del serbatoio B che provoca nell'acqua alla temperatura $T = 15^\circ C$ una velocità media $u_m = 3$ m/s all'interno della tubazione principale di ghisa con diametro $D = 30$ cm e annulla la velocità nel raccordo P, posto alla distanza $L = 30$ m dal serbatoio A, fra il serbatoio B e la tubazione principale. Si trascurino le perdite accidentali.



In condizioni di equilibrio la pressione nel punto P è uguale a quella relativa al battente dovuto ai due serbatoi A e B.

- Per quanto riguarda il serbatoio A si ha (la viscosità viene letta nella tabella T.9):
- numero di Reynolds

$$Re = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{1000 \times 3 \times 0.3}{0.00114} = 789000 ;$$

- rugosità relativa, per tubi di ghisa di diametro $D = 300 \text{ mm} (= 11.81 \text{ in})$, dal diagramma 10.2 $e/D \cong 0.0008$;
- coefficiente di resistenza, per i valori dati di Re e di e/D , dal diagramma 10.1 $f \cong 0.0192$;
- perdita continua dalla relazione (10.19)

$$h_c = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2} = 0.0192 \times \frac{30}{0.25} \times \frac{3^2}{2} = 10.37 \frac{\text{J}}{\text{kg}} ;$$

- pressione nel punto P, nelle condizioni $u_{mA} = 0$, $\alpha_P = 1$, $u_{mP} = u_m$ e $p_A = p_{atm}$, dalla relazione (10.17)

$$\left(\alpha_A \frac{u_{mA}^2}{2} - \alpha_P \frac{u_{mP}^2}{2} \right) + \left(\frac{p_A}{\rho} - \frac{p_P}{\rho} \right) + (g z_A - g z_P) = h_c \rightarrow p_P = -\frac{\rho u_m^2}{2} + p_{atm} + \rho g (z_A - z_P) - \rho h_c .$$

Per quanto riguarda il serbatoio B si ha:

- perdita continua nulla $h_c = 0$ perché velocità nulla;
- pressione nel punto P, nelle condizioni $u_{mB} = u_{mP} = 0$, $p_B = p_{atm}$, dalla relazione (10.17)

$$\left(\alpha_B \frac{u_{mB}^2}{2} - \alpha_P \frac{u_{mP}^2}{2} \right) + \left(\frac{p_B}{\rho} - \frac{p_P}{\rho} \right) + (g z_B - g z_P) = h_c \rightarrow p_P = p_{atm} + \rho g (z_B - z_P) .$$

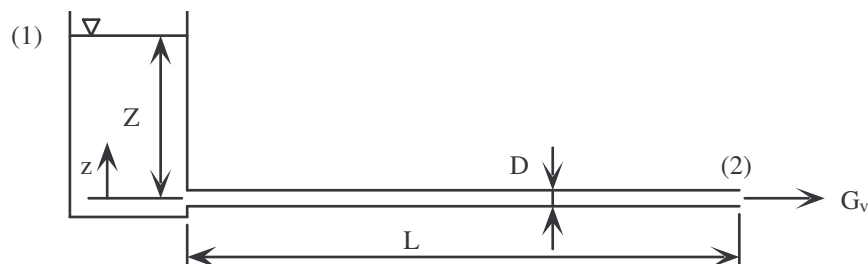
Uguagliando le due relazioni si ottiene

$$-\frac{\rho u_m^2}{2} + p_{atm} + \rho g (z_A - z_P) - \rho h_c = p_{atm} + \rho g (z_B - z_P) \rightarrow$$

$$\rightarrow z_B = -\frac{u_m^2}{2g} + z_A - \frac{h_c}{g} = -\frac{3^2}{9.80665} + 30 - \frac{10.37}{9.80665} = 28.0 \text{ m} .$$

Esercizio 10.2.14

Un tubo di rame trafilato è lungo $L = 3 \text{ m}$, ha un diametro $D = 38 \text{ mm}$, è inserito in un serbatoio con un imbocco ad angolo retto e scarica alla pressione atmosferica una portata volumetrica d'acqua $G_v = 0.016 \text{ m}^3/\text{s}$ quando l'altezza nel serbatoio raggiunge il valore $Z = 26.8 \text{ m}$. Determinare la perdita accidentale dell'imbocco se la temperatura dell'acqua è $T = 15^\circ \text{C}$.



Nel problema dato risulta $p_1 = p_2 = p_{atm}$, $u_{m1} \cong 0$ e $z_1 - z_2 = Z$; allora la relazione della perdita totale di altezza (10.17) si semplifica nella

$$g Z - \alpha_2 \frac{u_{m2}^2}{2} = h_t \quad (A)$$

dove la perdita di altezza totale è data dalla somma delle relazioni (10.19) e (10.20)

$$h_t = h_c + h_a = f \frac{L}{D} \frac{u_{m2}^2}{2} + K \frac{u_{m2}^2}{2} ; \quad (B)$$

sostituendo infine la (B) nella (A) si ottiene il coefficiente di perdita accidentale

$$gZ - \alpha_2 \frac{u_{m2}^2}{2} = f \frac{L}{D} \frac{u_{m2}^2}{2} + K \frac{u_{m2}^2}{2} \quad \rightarrow \quad K = \frac{2gZ}{u_{m2}^2} - f \frac{L}{D} - \alpha_2 .$$

La velocità media è

$$u_{m2} = \frac{4 G_v}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.016}{\pi \times 0.038^2} = 14.11 \frac{m}{s}$$

e il numero di Reynolds a $T = 15^\circ C$ è

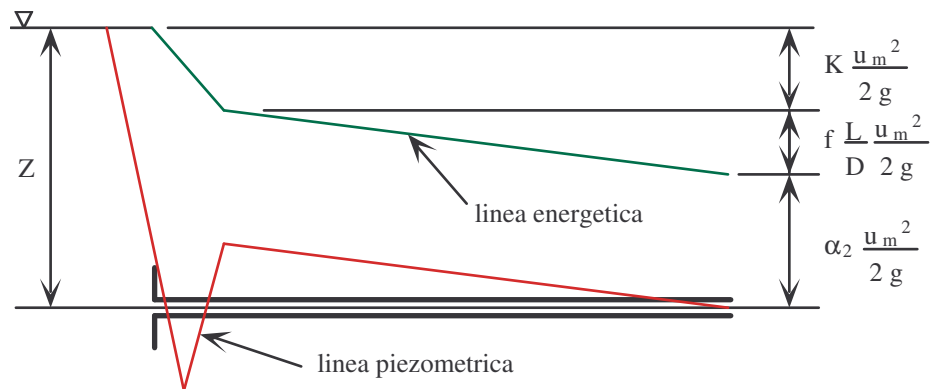
$$Re = \frac{\rho u_{m2} D}{\mu} = \frac{1000 \times 14.11 \times 0.038}{0.00114} = 470000$$

dove la viscosità è ricavata dalla tabella T.9. La rugosità relativa per tubi trafilati con diametro $D = 0.038$ mm (= 1 1/2 in) vale $e/D = 0.00004$ (vedi diagramma 10.2), mentre il coefficiente di resistenza per gli e/D e Re dati vale $f = 0.014$ (vedi diagramma 10.1); ponendo $\alpha_2 = 1.04$, alla fine si ottiene

$$K = \frac{2gZ}{u_{m2}^2} - f \frac{L}{D} - \alpha_2 = \frac{2 \times 9.80665 \times 26.8}{14.11^2} - 0.014 \times \frac{3}{0.038} - 1.04 = 0.495 .$$

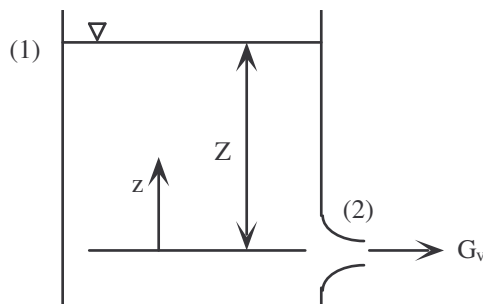
Il valore ottenuto si avvicina a quello fornito dalla tab. 10.1 del capitolo 10 della teoria.

Negli imbocchi si verifica una separazione in corrispondenza dell'angolo di ingresso e una contrazione della vena a valle dell'angolo di ingresso; la sezione effettiva di flusso raggiunge un minimo e la velocità un massimo, poi il flusso si espande e riempie il tubo. L'espansione incontrollata è responsabile della maggior parte della perdita di altezza. Nella figura sono rappresentati gli andamenti dell'altezza energetica (in verde) e della altezza piezometrica (in rosso).



Esercizio 10.2.15

Il diritto all'acqua garantito ad ogni cittadino dall'Imperatore di Roma consentì di installare nella rete di distribuzione pubblica boccagli calibrati in bronzo a sezione circolare. Alcuni cittadini intelligenti ma sleali ottenevano però un vantaggio dalla legge che regolava la portata d'acqua montando, all'uscita del boccaglio, un diffusore che incrementava la portata. Assumendo l'altezza statica disponibile pari a $Z = 1.5$ m e il diametro del boccaglio pari a $D = 25$ mm determinare l'aumento di portata quando all'uscita del boccaglio è inserito un diffusore con $L/R = 3$ e con $A = 2$.



Nel caso del solo boccaglio risulta $p_1 = p_2 = p_{atm}$, $u_{m1} \cong 0$, $\alpha_2 \cong 1$ e $z_1 - z_2 = Z$; allora la relazione della perdita totale di altezza (10.17) si semplifica nella

$$gZ - \frac{u_{m2}^2}{2} = h_t$$

dove

$$h_t = h_a = K_b \frac{u_{m2}^2}{2} ;$$

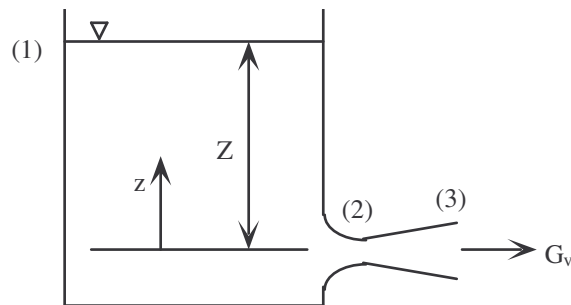
sostituendo si ha

$$g Z = \frac{u_{m2}^2}{2} (1 + K_b) \quad \rightarrow \quad u_{m2} = \sqrt{\frac{2 g Z}{1 + K_b}} = \sqrt{\frac{2 \times 9.80665 \times 1.5}{1 + 0.04}} = 5.319 \frac{m}{s} ,$$

dove il coefficiente di perdita $K_b = 0.04$ è stato tratto dalla tab. 10.1 del capitolo 10 della teoria, e quindi

$$G_v = u_{m2} S_2 = u_{m2} \frac{\pi D_2^2}{4} = 5.319 \times \frac{\pi \times 0.025^2}{4} = 0.002611 \frac{m^3}{s}$$

dove G_v è la portata volumetrica circolante attraverso il boccaglio.



Nel caso di un diffusore attaccato al boccaglio risulta $p_1 = p_3 = p_{atm}$, $u_{m1} \cong 0$, $\alpha_3 \cong 1$ e $z_1 - z_3 = Z$; allora la relazione della perdita totale di altezza (10.17) si semplifica nella

$$g Z - \frac{u_{m3}^2}{2} = h_t$$

dove

$$h_t = h_a = K_b \frac{u_{m2}^2}{2} + K_d \frac{u_{m2}^2}{2} = (K_b + K_d) \frac{u_{m2}^2}{2} ;$$

sostituendo si ha

$$g Z = \frac{u_{m3}^2}{2} + (K_b + K_d) \frac{u_{m2}^2}{2} . \quad (A)$$

Per ottenere il coefficiente di perdita del diffusore si usa la relazione (10.2.2.3) del capitolo 10 della teoria

$$K = 1 - \frac{1}{A^2} - C_p = 1 - \frac{1}{4^2} - 0.45 = 0.3$$

dove il coefficiente di recupero della pressione $C_p = 0.45$ è stato tratto dalla fig. 10.2 del capitolo 10 della teoria in funzione delle caratteristiche geometriche del diffusore.

La relazione (A), mediante la legge della portata volumetrica (3.4)

$$u_{m2} S_2 = u_{m3} S_3 \quad \rightarrow \quad \frac{u_{m3}}{u_{m2}} = \frac{S_2}{S_3} = \frac{1}{A} \quad \rightarrow \quad \frac{u_{m3}^2}{u_{m2}^2} = \frac{1}{A^2} ,$$

diventa

$$g Z = \frac{u_{m2}^2}{2 A^2} + (K_b + K_d) \frac{u_{m2}^2}{2} \quad \rightarrow \quad u_{m2} = \sqrt{\frac{2 g Z}{\frac{1}{A^2} + K_b + K_d}} = \sqrt{\frac{2 \times 9.80665 \times 1.5}{\frac{1}{2^2} + 0.04 + 0.3}} = 7.061 \frac{m}{s}$$

e quindi si ottiene una portata volumetrica

$$G'_v = u_{m2} S_2 = u_{m2} \frac{\pi D_2^2}{4} = 7.061 \times \frac{\pi \times 0.025^2}{4} = 0.003466 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} .$$

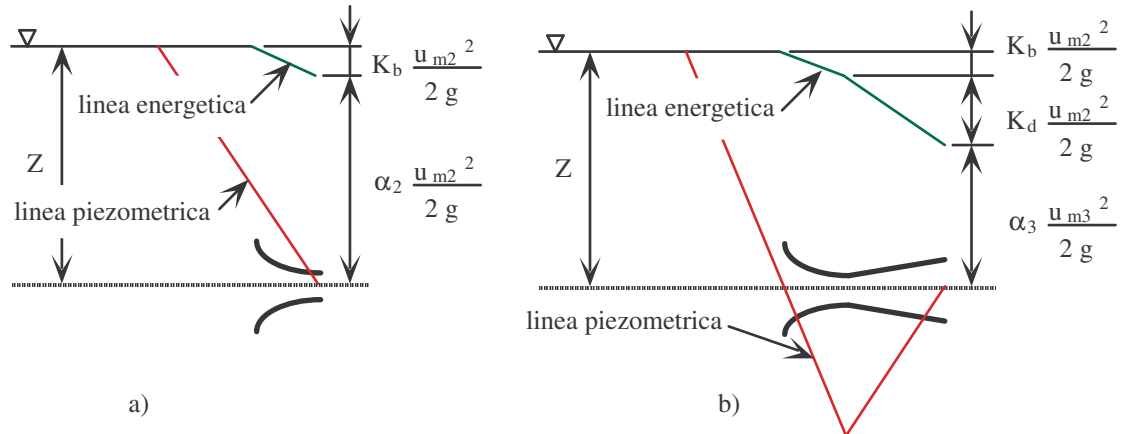
L'aumento percentuale della portata è pari a

$$\frac{G'_v - G_v}{G_v} = \frac{G'_v}{G_v} - 1 = \frac{0.003466}{0.002611} - 1 = 0.330 = 33 \% .$$

L'aggiunta del diffusore aumenta in modo significativo la portata; infatti la velocità alla fine del diffusore

$$u_{m3} = \frac{u_{m2}}{A} = \frac{7.061}{2} = 3.53 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

è la metà di quella all'inizio e ciò, in base alla legge dell'energia, significa che in esso la pressione aumenta. Poiché il diffusore scarica alla pressione atmosferica, alla fine del boccaglio si ha una pressione inferiore a quella del caso in cui non si ha il diffusore e questo fenomeno fa risucchiare più portata di fluido.

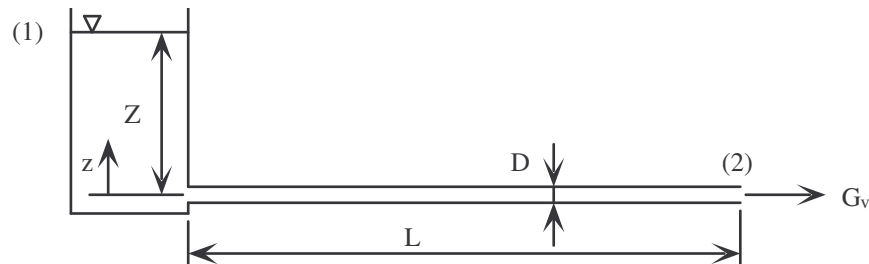


Nella figura sono riportati gli andamenti delle altezze energetiche (in verde) e delle altezze piezometriche (in rosso) riguardanti i due casi esaminati. Il boccaglio nudo senza diffusore (fig. a) scarica alla pressione atmosferica, in modo che all'uscita dal boccaglio l'altezza piezometrica scende a zero; la perdita nel boccaglio è K_b volte l'altezza cinetica, in modo che l'altezza energetica diminuisce. Il boccaglio con diffusore (fig. b) fa diminuire all'uscita dal boccaglio la pressione al di sotto di quella atmosferica, in modo che l'altezza piezometrica all'uscita dal diffusore sale a zero; le perdite nel boccaglio e nel diffusore sono rispettivamente K_b volte e K_d l'altezza cinetica e l'altezza cinetica lascia il diffusore con una riduzione pari ad A^2 , in modo che la altezza energetica diminuisce.

Il commissario alle acque Frontino nel 97 a. C. codificò le condizioni per tutti decretando che ogni utente collegato alla rete idrica pubblica fosse obbligato nel punto dell'allacciamento ad avere una tubazione orizzontale a sezione costante lunga almeno 1.5 m.

Esercizio 10.2.16

Un tubo liscio orizzontale lungo $L = 100$ m è attaccato ad un serbatoio grande. Calcolare la altezza Z che deve essere mantenuta all'interno del serbatoio per produrre una portata volumetrica d'acqua pari a $G_v = 0.03$ m³/s, sapendo che il diametro interno del tubo è $D = 75$ mm, l'imbocco è ad angolo retto e l'acqua viene scaricata all'atmosfera alla temperatura $T = 15$ °C.



La velocità media di uscita dell'acqua è

$$u_{m2} = u_m = \frac{G_v}{S} = \frac{4 G_v}{\pi D^2} = \frac{4 \times 0.03}{\pi \times 0.075^2} = 6.791 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e, deducendo il valore della viscosità dalla tab. T.9, il numero di Reynolds diventa

$$Re = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{1000 \times 6.791 \times 0.075}{0.00114} = 447000 .$$

Il moto è turbolento e quindi si può prendere $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Nel problema dato si ha anche $p_1 = p_2 = p_{atm}$, $u_{m1} \cong 0$, $z_1 = Z$ e $z_2 = 0$.

La relazione della perdita totale di altezza (10.17) si semplifica nella

$$g Z - \frac{u_m^2}{2} = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2} + K \frac{u_m^2}{2}$$

dove la perdita totale h_t è ottenuta dalla somma delle relazioni (10.19) e (10.20)

$$h_t = h_c + h_a = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2} + K \frac{u_m^2}{2}$$

con h_c perdita continua nel tubo di lunghezza L e h_a perdita accidentale relativa all'imbocco. In definitiva si ha

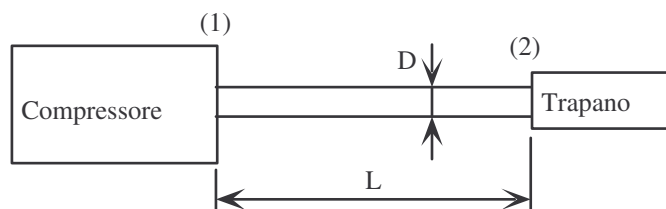
$$Z = \frac{u_m^2}{2g} \left(1 + f \frac{L}{D} + K \right) .$$

Per tubi lisci e per $Re = 447000$ dal diagramma 10.1 si ha $f = 0.0135$ e per imbocchi ad angolo retto dalla tab. 10.1 del capitolo 10 della teoria si ha $K = 0.5$. Quindi

$$Z = \frac{u_m^2}{2g} \left(1 + f \frac{L}{D} + K \right) = \frac{6.79^2}{2 \times 9.80665} \left(1 + 0.0135 \times \frac{100}{0.075} + 0.5 \right) = 2.35 \times (1 + 18 + 0.5) = 45.8 \text{ m} .$$

Esercizio 10.2.17

Un trapano ad aria compressa richiede una portata massica $G_m = 0.25 \text{ kg/s}$ alla pressione $p_2 = 650 \text{ kPa}$. Il tubo flessibile fra il compressore d'aria e il trapano ha un diametro interno $D = 40 \text{ mm}$, mentre il compressore scarica l'aria alla pressione $p_1 = 690 \text{ kPa}$ e alla temperatura $T_1 = 40^\circ \text{C}$. Trascurando le variazioni della massa volumica dell'aria e gli effetti dovuti alle curvature del tubo flessibile, calcolare la lunghezza L del tubo.



La massa volumica dell'aria (assunta costante) è

$$\rho = \rho_1 = \frac{p_1}{R T_1} = \frac{690000}{287 \times (273 + 40)} = 7.681 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

per cui la velocità media (anch'essa costante perché $S_1 = S_2 = S$) è

$$u_m = u_{m1} = u_{m2} = \frac{G_m}{\rho S} = \frac{4 G_m}{\rho \pi D^2} = \frac{4 \times 0.25}{7.68 \times \pi \times 0.04^2} = 25.90 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

e il numero di Reynolds diventa

$$Re = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{7.681 \times 25.90 \times 0.04}{0.000019} = 419000 .$$

dove la viscosità è ricavata dalla tabella T.9. Il moto è turbolento e quindi si può prendere $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Nel problema dato si assume anche $z_1 = z_2$.

La relazione della perdita totale di altezza (10.17) si semplifica nella

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2}$$

dove la perdita totale h_t è data solo dal valore della perdita continua h_c della relazione (10.19) perché si trascura quella accidentale h_a

$$h_t = h_c = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2}$$

In definitiva si ha

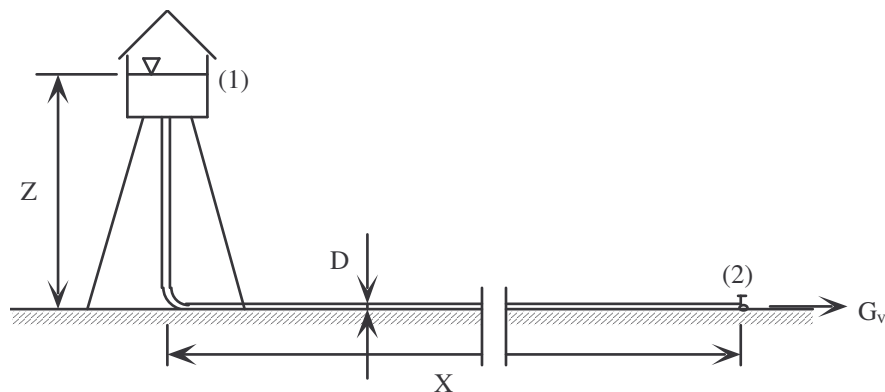
$$L = \frac{p_1 - p_2}{\rho} \frac{2D}{f u_m^2}$$

Per tubi lisci e per $Re = 419000$ dal diagramma 10.1 si ha $f = 0.0136$ e quindi

$$L = \frac{p_1 - p_2}{\rho} \frac{2D}{f u_m^2} = \frac{690000 - 650000}{7.68} \frac{2 \times 0.04}{0.0136 \times 25.90^2} = 45.7 \text{ m}$$

Esercizio 10.2.18

Un impianto antincendio è formato da una torre d'acqua e da un tubo verticale alti $Z = 24$ m. Il tubo di distribuzione più lungo ha un diametro $D = 100$ mm, ha una lunghezza $X = 180$ m, è fatto di ghisa vecchia di 20 anni e ha alla sua estremità una valvola a saracinesca. Determinare la massima portata di fluido che può passare attraverso la tubazione.



Si presume che il moto sia turbolento e quindi che si possa prendere $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Nel problema dato si assume anche $p_1 = p_2 = p_{atm}$, $u_{m1} \cong 0$ e $u_{m2} = u_m$.

La relazione della perdita totale di altezza (10.17) si semplifica nella

$$gZ - \frac{u_m^2}{2} = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2} + f \frac{L_e}{D} \frac{u_m^2}{2}$$

dove la perdita totale h_t è data dalla somma delle relazioni (10.19) e (10.20)

$$h_t = h_c + h_a = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2} + f \frac{L_e}{D} \frac{u_m^2}{2}$$

con h_c perdita continua nel tubo di lunghezza L e h_a perdita accidentale relativa alla valvola (si sono trascurate le perdite dell'imbocco e della curva). Poiché la tab. 10.3 del capitolo 10 della teoria per una valvola a saracinesca porta $L_e/D = 8$, in definitiva si ha

$$u_m = \sqrt{\frac{2gZ}{1 + f \left(\frac{L}{D} + 8 \right)}}$$

Dal diagramma 10.2, per tubi in ghisa di diametro $D = 0.10$ m (= 4 in), si ottiene una rugosità relativa pari a $e/D = 0.0025$ e, poiché il tubo è vecchio, si può raddoppiarla a $e/D = 0.005$. Poi dal diagramma 10.1, nella regione di rugosità piena, si ha un valore iniziale del coefficiente di resistenza pari a $f = 0.03$. Infine se si considera la lunghezza totale del tubo uguale a

$$L = Z + X = 24 + 180 = 204 \text{ m}$$

si ottiene

$$\frac{L}{D} = \frac{204}{0.1} = 2040 .$$

Con i risultati prima ottenuti la velocità è

$$u_m = \sqrt{\frac{2 g Z}{1 + f \left(\frac{L}{D} + 8 \right)}} = \sqrt{\frac{2 \times 9.80665 \times 24}{1 + 0.03 \times (2040 + 8)}} = 2.746 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Il numero di Reynolds è

$$\text{Re} = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{1000 \times 2.746 \times 0.1}{0.00114} = 241000 ,$$

dove la viscosità è ricavata dalla tabella T.9, e conferma l'ipotesi di moto turbolento prevista in precedenza. Con il valore della rugosità relativa assunta e con il numero di Reynolds trovato, dal diagramma 10.1, si ricava un coefficiente di resistenza $f = 0.031$ ed una velocità media

$$u_m = \sqrt{\frac{2 g Z}{1 + f \left(\frac{L}{D} + 8 \right)}} = \sqrt{\frac{2 \times 9.80665 \times 24}{1 + 0.031 \times (2040 + 8)}} = 2.702 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

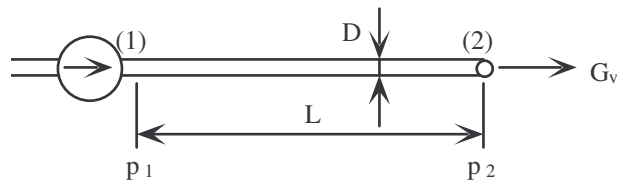
che può essere considerata di buona convergenza.

La portata volumetrica in definitiva assomma a circa

$$G_v = u_m S = u_m \frac{\pi D^2}{4} = 2.7 \times \frac{\pi \times 0.1^2}{4} = 0.0212 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 21.2 \frac{\text{litri}}{\text{s}} .$$

Esercizio 10.2.19

Un impianto di irrigazione è formato da una pompa, che dà una portata volumetrica $G_v = 0.095 \text{ m}^3/\text{s}$ ad una pressione $p_1 = 450 \text{ kPa}$, da un tubo di alluminio trafilato lungo $L = 150 \text{ m}$ e da un nebulizzatore che deve operare ad una pressione almeno pari a $p_2 = 210 \text{ kPa}$. Determinare il diametro standard più piccolo del tubo se si trascurano le perdite accidentali.



La caduta massima di pressione per il buon funzionamento del nebulizzatore deve essere

$$\Delta p_{\max} = p_1 - p_2 = 450000 - 210000 = 240000 \text{ Pa} .$$

Nel problema dato si assume $\alpha_1 = \alpha_2$, $u_{m1} = u_{m2} = u_m$, $z_1 = z_2$ e $h_a = 0$. La relazione della perdita totale di altezza (10.17) si semplifica nella

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2}$$

dove la perdita totale h_t è data solo dal valore della perdita continua h_c della relazione (10.19) perché si trascurano quelle accidentali h_a

$$h_t = h_c = f \frac{L}{D} \frac{u_m^2}{2} .$$

La velocità media può anche essere scritta

$$u_m = \frac{G_v}{S} = \frac{4 G_v}{\pi D^2}$$

e quindi per la caduta di pressione e per il numero di Reynolds rispettivamente si ottiene

$$\Delta p = p_1 - p_2 = f \frac{L}{D} \rho \frac{u_m^2}{2} = f \frac{L}{D} \rho \frac{\left(\frac{4 G_v}{\pi D^2}\right)^2}{2} = \frac{8 f L \rho G_v^2}{\pi^2 D^5}$$

$$Re = \frac{\rho u_m D}{\mu} = \frac{\rho \frac{4 G_v}{\pi D^2} D}{\mu} = \frac{4 \rho G_v}{\pi \mu D} .$$

Come valore iniziale del diametro, prendendo una velocità di circa $u_m = 10$ m/s, si può assumere un valore pari a

$$D = \sqrt{\frac{4 G_v}{\pi u_m}} = \sqrt{\frac{4 \times 0.095}{\pi \times 10}} = 0.11 \text{ m} \cong 4 \text{ in} .$$

La rugosità relativa, per tubi trafilati di diametro interno $D = 0.110$ m (= 4.026 in), nel diagramma 10.2 vale $e/D = 0.000016$ e il numero di Reynolds vale

$$Re = \frac{4 \rho G_v}{\pi \mu D} = \frac{4 \times 1000 \times 0.095}{\pi \times 0.00114 \times 0.11} = 965000 ,$$

dove la viscosità è ricavata dalla tabella T.9. Con i valori di e/D e di Re ottenuti, dal diagramma 10.1 si ottiene un coefficiente di resistenza pari a $f = 0.012$. La caduta di pressione è quindi

$$\Delta p = \frac{8 f L \rho G_v^2}{\pi^2 D^5} = \frac{8 \times 0.012 \times 150 \times 1000 \times 0.095^2}{\pi^2 \times 0.11^2} = 818000 \text{ Pa} > \Delta p_{\max} .$$

Poiché il valore della caduta di pressione è superiore a quello massimo stabilito, si deve scegliere un diametro maggiore, per esempio $D = 5.047$ in = 0.128 m. Si ottengono allora in sequenza, con le operazioni viste in precedenza, $e/D = 0.000012$, $Re = 829000$, $f = 0.012$ e $\Delta p = 415000 \text{ Pa} > \Delta p_{\max}$.

Poiché il valore della caduta di pressione è di nuovo superiore a quello massimo stabilito, si sceglie il diametro maggiore $D = 6.065$ in = 0.154 m. Si ottengono quindi $e/D = 0.000010$, $Re = 689000$, $f = 0.013$ e $\Delta p = 165000 \text{ Pa} < \Delta p_{\max}$.

Il diametro nominale $D = 6$ in riesce a garantire una caduta di pressione inferiore a quella massima richiesta per il buon funzionamento del nebulizzatore.