

PROPRIETÀ DI GAS ALLO STATO IDEALE
ALLA TEMPERATURA DI 20 °C

	M	c_p	c_v	k	R	
	$\frac{\text{kg}}{\text{kgmole}}$	$\frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$	$\frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$	$[c_p/c_v]$	$\frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$	$\frac{\text{joule}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$
Argon.	39,95	0,1244	0,0747	1,665	0,0497	208,18
Elio.	4,003	1,2416	0,7455	1,665	0,4964	2077,7
Aria.	28,97	0,240	0,1714	1,40	0,0686	287,09
Idrogeno.	2,016	3,419	2,434	1,405	0,9857	4125,5
Azoto.	28,016	0,2484	0,1775	1,399	0,0709	296,87
Ossigeno.	32	0,2193	0,1572	1,395	0,0621	259,9
Anidride carb. .	44,01	0,2016	0,1565	1,288	0,0452	188,98
Vapor d'acqua .	18,016	0,4454	0,3352	1,329	0,1103	461,645
Ammoniaca.	17,032	0,5004	0,3838	1,304	0,1167	488,31
Metano.	16,042	0,5321	0,4083	1,303	0,1238	518,45
Propano.	44,094	0,3985	0,3535	1,127	0,045	188,62

Costante universale dei gas:

$$\bar{R} = 848 \quad \frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{kgmole}^\circ\text{K}}$$

$$\bar{R} = 8317 \quad \frac{\text{joule}}{\text{kgmole}^\circ\text{K}}$$

$$\bar{R} = 1,987 \quad \frac{\text{kcal}}{\text{kgmole}^\circ\text{K}} \quad \text{oppure} \quad \frac{\text{Btu}}{\text{lbmole}^\circ\text{R}}$$

$$\bar{R} = 0,08206 \quad \frac{\text{litri} \cdot \text{atm}}{\text{gmole}^\circ\text{K}} \quad \text{oppure} \quad \frac{\text{m}^3 \cdot \text{atm}}{\text{kgmole}^\circ\text{K}}$$

$$\bar{R} = 10,73 \quad \frac{\text{psi} \cdot \text{ft}^3}{\text{lbmole}^\circ\text{R}}$$

$$\bar{R} = 0,730 \quad \frac{\text{atm} \cdot \text{ft}^3}{\text{lbmole}^\circ\text{R}}$$

CAPITOLO I

EQUAZIONI FONDAMENTALI PER IL MOTO MONODIMENSIONALE

1.1 DEFINIZIONI.

Si consideri uno spazio sede di un fluido in movimento. Si definiscono ivi linee di flusso o di corrente come quelle linee che in ogni punto ed istantaneamente sono tangenti al vettore velocità locale del fluido in movimento.

Il moto si dirà a regime stazionario o permanente quando, rispetto alla terna di riferimento fissata, tutte le grandezze che caratterizzano lo stato cinetico (ad es.: velocità vettoriale $\vec{u}$, etc.) e termodinamico (ad es.: pressione (statica) p ; temperatura (statica) T etc.) del fluido in movimento sono, in ogni punto dello spazio, indipendenti dal tempo. Nel caso contrario il moto si dirà a regime vario.

Nello spazio occupato dal fluido in movimento si consideri una linea chiusa: l'insieme delle linee

di corrente che si appoggiano a questa linea chiusa costituisce una superficie "tubolare". Lo spazio interno a questa superficie è detto *tubo di flusso*.
 50. Un tubo di flusso a sezione infinitesima è detto *filetto fluido*.

Da notare che nei moti a regime permanente le linee di corrente coincidono con le traiettorie delle particelle di fluido.

Con riferimento al moto di un fluido entro un tubo di flusso sufficientemente ristretto rispetto alla lunghezza può essere sovente applicata l'ipotesi che in ogni sezione piana normale all'asse i parametri dinamici e termodinamici del fluido abbiano valori praticamente uniformi, e che la deviazione della velocità dalla direzione assiale sia trascurabile; si parla in tali ipotesi di *corrente monodimensionale* o *lineare*. Questa ipotesi viene utilmente applicata nel caso di moto (a regime turbolento) di un fluido in condotti, quando, meno che nell'immediata prossimità delle pareti, la variazione delle proprietà del fluido in direzione normale alle linee di flusso è trascurabile rispetto alla variazione che ha luogo lungo le linee di flusso stesse; si considerano in tal caso valori "medi" delle proprietà del fluido nelle varie sezioni normali all'asse del condotto.

Con riferimento ad una corrente monodimensionale a regime permanente in un tubo di flusso, le proprietà del fluido possono quindi essere descritte con riferimento ad un'unica coordinata lineare: ci si riferisce usualmente ad un'ascissa lineare lungo l'asse del tubo di flusso, con orienta-

zione equiversa al vettore velocità $\vec{u}$ (orientata quindi "nel senso del deflusso").

1.2 MODULO DI COMPRIMIBILITÀ (O DI ELASTICITÀ) DI UN FLUIDO.

Il modulo di comprimibilità (o di elasticità) di un fluido E resta definito dalla usuale relazione:

$$\left(\frac{dv}{v} = -\frac{1}{E} v \cdot dp \right)_x \quad (1.2.1)$$

con v : volume specifico e p : pressione.

Da notare che, essendo v e p variabili indipendenti, bisogna precisare la trasformazione lungo la quale la (1.2.1) è valutata. In corrispondenza si avranno diversi valori per il modulo di comprimibilità. Assumono particolare importanza il *modulo di comprimibilità isoterma*, E_T :

$$E_T = -v \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \quad (1.2.2)$$

ed il *modulo di comprimibilità isentropico*, E_s :

$$E_s = -v \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s \quad (1.2.3)$$

con s : entropia specifica del fluido.

Per i liquidi usuali il modulo di comprimibilità (isoterma o isentropico) assume valori dell'ordine di 10^9 N/m^2 (per l'acqua a temperatura

$t = 20^\circ \text{C}$ si ha: $E_T = 2,183 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, $E_s = 2,198 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$.

Per i gas a comportamento ideale, tenendo conto delle relazioni caratteristiche:

$$[pv = \text{cost}]_{T = \text{cost}} \quad \text{e} \quad [pv^k = \text{cost}]_{s = \text{cost}}$$

si ricava immediatamente dalla (1.2.2) e dalla (1.2.3):

$$E_T = p \quad (1.2.4)$$

$$E_s = kp \quad (1.2.5)$$

ove k è l'usuale rapporto tra i calori specifici caratteristici; $k = \frac{c_p}{c_v}$.

1.3 LEGGI FONDAMENTALI IN PROBLEMI DI GASDINAMICA.

I problemi di Gasdinamica che verranno affrontati nel seguito riguardano per lo più moti monodimensionali in tubi di flusso a regime permanente rispetto ad un riferimento inerziale opportunamente scelto. Tali tipi di moto vengono trattati con riferimento ad una o più equazioni che esprimono leggi fondamentali della Fisica. Nelle ipotesi poste tali equazioni sono:

a) Equazione di Bernoulli generalizzata (o equazione dell'energia meccanica):

$$\frac{du^2}{2} + g \cdot dz + v \cdot dp + \delta R + \delta L' = 0 \quad (1.3.1)$$

U = 1 m/sec

oppure, in forma finita:

$$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + \int_1^2 v \cdot dp + R_{12} + L'_{12} = 0 \quad (1.3.2)$$

ove:

z : quota rispetto ad un piano orizzontale di riferimento. L'asse z è orientato in senso contrario a quello del vettore accelerazione di gravità $\vec{g}$.

L'_{12} : lavoro "con deflusso", scambiato tra la sezione 1 e la sezione 2 del tubo di flusso dall'unità di massa di fluido. Vale la convenzione sul segno usuale.

R_{12} : lavoro delle forze dissipative tra le sezioni 1 e 2 del tubo di flusso, riferito all'unità di massa di fluido. Questo termine si annulla solo nel caso che la trasformazione del fluido tra 1 e 2 abbia luogo in maniera internamente reversibile, altrimenti è positivo (sezione 1 "a monte", della sezione 2).

Gli altri simboli conservano il loro significato usuale.

b) Equazione del Primo Principio della Termodinamica (o equazione dell'energia):

$$\delta Q = dh + \frac{du^2}{2} + g \cdot dz + \delta L' \quad (1.3.3)$$

$$dQ \cdot dt = dU$$

$$dQ \cdot dt + d(pv) \cdot dt (v + g \cdot z + \frac{u^2}{2}) = dK$$

oppure, in termini finiti:

$$Q_{12} = h_2 - h_1 + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + L'_{12} \quad (1.3.4)$$

con:

Q_{12} : calore scambiato tra le sezioni 1 e 2 del tubo di flusso dall'unità di massa di fluido, con l'usuale convenzione per il segno;
e con ovvio significato per gli altri simboli.

c) Equazione di continuità (o di conservazione della massa).

Nelle ipotesi poste (corrente lineare a regime permanente in un tubo di flusso) esprime che attraverso ogni sezione normale del tubo di flusso la portata di massa W deve essere la stessa. In formule:

$$W = \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$$

$$(1.3.5)$$

$$\rho u A = \text{cost}$$

cioè, in termini differenziali:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0$$

$$\Rightarrow d(\rho u A) = 0$$

$\Rightarrow$ costante di massa
(1.3.6)

ove con A si è indicata l'area della sezione normale del tubo di flusso.

d) Secondo Principio della Termodinamica, che si esprime:

$$ds \geq \frac{\delta Q}{T}$$

$$(1.3.7)$$

e) Si deve inoltre far ricorso all'equazione di stato del fluido, o a relazioni derivate da questa in condizioni particolari di deflusso (isotermo, isentropico etc.). Si rammenta che, per definizione, un gas a comportamento ideale segue l'equazione di stato:

$$pv = RT$$

$$\frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} = \frac{dT}{T}$$

$$\text{cioè derivando da } \frac{dv}{v} = \frac{1}{\gamma} \frac{ds}{s} \quad (1.3.8)$$

e che per esso l'energia interna è funzione della sola temperatura; i calori specifici caratteristici C_p e C_v sono costanti a temperatura costante ⁽¹⁾.

f) Il teorema della quantità di moto si esprime con un'equazione che riesce di conveniente impiego in determinati problemi di gasdinamica. Si consideri un moto monodimensionale a regime permanente (rispetto ad un riferimento inerziale) in un tubo di flusso ad asse rettilineo (fig. 1.3.1).

Il fluido compreso tra le sezioni 1-1 e 2-2 nel tempuscolo $d\tau$ si sposterà nel volume compreso tra le sezioni 1'-1' e 2'-2'. La variazione della quantità di moto del fluido dovrà essere uguale all'impulso delle forze che hanno agito sul fluido nel tempuscolo $d\tau$. Agli effetti della valutazione della variazione della quantità di moto del fluido (nel tempuscolo $d\tau$) tutto è come se la massa dm di

⁽¹⁾ Nel seguito quando verrà ipotizzato il comportamento ideale per un gas verrà spesso tacitamente assunta l'ulteriore ipotesi che i suoi calori specifici caratteristici C_p e C_v si possano considerare costanti anche con la temperatura.

1.4 VELOCITÀ DEL SUONO. NUMERO DI MACH.

La trasmissione di "suoni", attraverso mezzi materiali è determinata dalla propagazione nel mezzo di onde di pressione di ampiezza limitata. La velocità di propagazione è determinata dalle proprietà elastiche del mezzo.

Nella fluidodinamica si definisce come "velocità del suono", la velocità di propagazione di una perturbazione infinitesimale di pressione. Per determinare una espressione per la velocità del suono c si consideri un condotto ad asse rettilineo ed orizzontale e sezione costante, munito all'estremità sinistra (vedi fig. 1.4.1) di un pistone, e contenente un fluido inizialmente in quiete alla pressione (uniforme) p , temperatura (uniforme) T e densità ρ .

Il movimento del pistone verso destra con velocità uniforme (al limite infinitesima) du causerà nel fluido la propagazione di un'onda piana infinitesima di compressione con velocità (costante) c . Il fluido attraverso cui il fronte d'onda è passato sarà alla pressione $p + dp$, ed avrà densità $\rho + d\rho$ e velocità du . Il fluido verso cui il fronte d'onda procede sarà alla pressione p , densità ρ e in quiete. Rispetto ad un riferimento solidale con il condotto, la situazione sarà quella schematizzata in figura 1.4.1 (a).

Rispetto ad un nuovo riferimento (ancora inerziale) solidale col fronte d'onda, la situazione dinamica è quella rappresentata in fig. 1.4.1 (b). Il fluido scorre da destra a sinistra e, passando attraverso il fronte d'onda (stazionario) la sua velo-

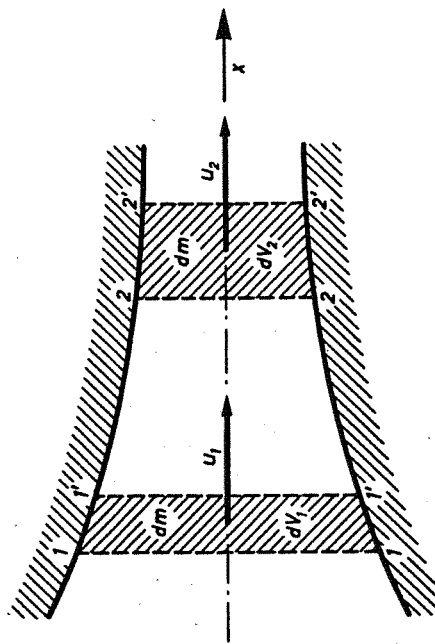


Fig. 1.3.1. - Variazione di quantità di moto nel flusso monodimensionale a regime permanente in un tubo di flusso ad asse rettilineo.

fluido ($dm = \rho_1 \cdot A_1 \cdot u_1 \cdot d\tau = \rho_2 \cdot A_2 \cdot u_2 \cdot d\tau$) si sia spostata dalla posizione 1-1'-1'' (ove la velocità è u_1) alla posizione 2-2'-2'' (ove la velocità è u_2). Si potrà pertanto scrivere, con riferimento alla direzione coordinata x :

$$\Sigma F_x \cdot d\tau = dm \cdot (u_2 - u_1)$$

cioè, essendo $\frac{dm}{d\tau} = \rho A u = W$ (che potrebbe dirsi

$$\Sigma F_x = W(u_2 - u_1) \quad (1.3.9)$$

con ΣF_x : risultante delle componenti (lungo la direzione del moto) di tutte le forze che agiscono nel fluido compreso tra le sezioni di controllo.

$$W = \frac{dm}{d\tau} \cdot SAU$$

$$I = F \cdot t = dQ$$

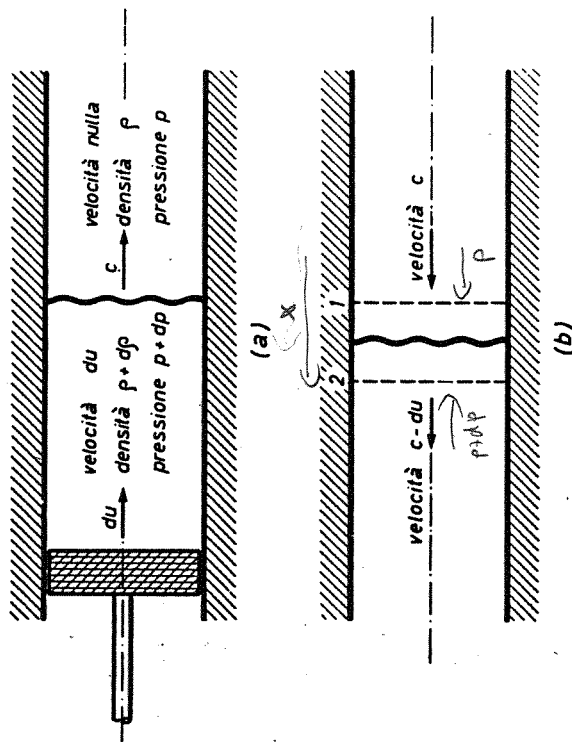


Fig. 1.4.1. - Propagazione di una perturbazione infinitesima di pressione:

- a) rispetto ad un osservatore in quiete;
b) rispetto ad un osservatore solidale col fronte d'onda.

ciò si riduce dal valore c al valore $c - du$; contemporaneamente la pressione passa dal valore p al valore $p + dp$ e la densità dal valore ρ al valore $\rho + dp$. Essendo il moto a regime stazionario rispetto al riferimento solidale col fronte d'onda, si possono applicare le equazioni della quantità di moto e di continuità nella forma 1.3.9 e 1.3.5 al fluido compreso tra le sezioni di controllo 1 (immediatamente a monte del fronte d'onda) e 2 (immediatamente a valle del fronte d'onda).

La prima fornisce (forze di attrito trascurabili):

$$A [p - (p + dp)] = W [(c - du) - c] \quad (1.4.1)$$

da cui, ricordando che $W = \rho c A$:

$$\| dp = \rho \cdot c \cdot du. \quad (1.4.2)$$

L'equazione di continuità si scrive:

$$\rho A c = (\rho + d\rho) A (c - du) \quad (1.4.3)$$

cioè, a meno di infinitesimi di ordine superiore:

$$d\rho = \rho \frac{du}{c}. \quad (1.4.4)$$

Dalla (1.4.2) e (1.4.4) si ricava:

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \quad (1.4.5)$$

Per una corretta interpretazione della relazione (1.4.5) bisogna stabilire la trasformazione lungo la quale valutare il termine $\frac{dp}{d\rho}$, non essendo la pressione p funzione della sola densità ρ . Analizzando le proprietà dei fluidi usuali si riconosce che le variazioni di volume specifico per effetto di una variazione di pressione infinitesima, nell'usuale campo di frequenze per i "suoni", sono essenzialmente adiabatiche. La variazione di pressione essendo infinitesima, il processo sarà anche re-

versibile, cioè isentropico ⁽¹⁾. Si definisce perciò come velocità del suono l'espressione:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad (1.4.6)$$

Tenendo conto dell'espressione (1.2.3) del modulo di elasticità isentropico, si riconosce immediatamente che vale la:

$$c = \sqrt{\frac{E_s}{\rho}} \quad (1.4.7)$$

Per un gas ideale si ricava l'espressione:

$$c = \sqrt{k p v} = \sqrt{k R T} = \sqrt{k \frac{\bar{R}}{M_m} T} \quad (1.4.8)$$

quello del gas *quello universale*

con:

$\bar{R}$: costante universale dei gas = 8317 joule/(kgmole °K);

M_m : massa molecolare del gas in considerazione.

Poiché k varia solo entro limiti ristretti, si vede come, in generale, gas a piccola massa molecolare hanno velocità del suono elevate e viceversa.

⁽¹⁾ Per una discussione esauriente su questo argomento, si veda: M. W. ZEMANSKY, *Calore e Termodinamica*, Zanichelli, Bologna, pag. 119.

PROBLEMA 1.4.1

Valutare la velocità di propagazione del suono nell'acqua a pressione atmosferica e alla temperatura $t = 20^\circ \text{C}$.

Si applica l'espressione (1.4.7):

$$c = \sqrt{\frac{E_s}{\rho}}$$

Per l'acqua a $t = 20^\circ \text{C}$ si ha: $E_s = 2,198 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$; $\rho = 998,2 \text{ kg/m}^3$:

$$c = \sqrt{\frac{2,198 \cdot 10^9}{998,2}} = 1483,9 \text{ m/sec} \quad ***$$

PROBLEMA 1.4.2

Valutare la velocità di propagazione del suono alla temperatura $t = 20^\circ \text{C}$ per:

a) Aria;

b) Idrogeno;

c) R-12 (Freon-12).

Il valore della pressione sia tale per cui il comportamento dei tre fluidi possa considerarsi ideale.

Nelle ipotesi poste si può applicare l'espressione (1.4.8):

$$c = \sqrt{k \frac{\bar{R}}{M_m} T}$$

a) per l'aria si ha: $k = 1,40$; $M_m = 28,97$ kg/kgmole:

$$c = \sqrt{1,40 \frac{8317}{28,97}} \quad 293 = 343 \text{ m/sec} \quad ***$$

b) per l'idrogeno: $k = 1,405$; $M_m = 2,016$ kg/kgmole:

$$c = \sqrt{1,405 \frac{8317}{2,016}} \quad 293 = 1303 \text{ m/sec} \quad ***$$

c) per l'R-12 si ha: $k = 1,14$; $M_m = 120,9$ kg/kgmole:

$$c = \sqrt{1,14 \frac{8317}{120,9}} \quad 293 = 152 \text{ m/sec} \quad ***$$

Un parametro assai utile per il riferimento dello stato dinamico del fluido in problemi di gas-dinamica è il *numero di Mach locale*, simbolo M , definito come rapporto della velocità locale del fluido u ed il valore c della velocità locale del suono nel fluido nello stesso punto:

$$M = \frac{u}{c} \quad (1.4.9)$$

Da notare che la velocità del suono c non è generalmente costante lungo il deflusso di un fluido, il suo valore dipendendo dallo stato termodinamico locale del fluido stesso.

Con riferimento al valore del numero di Mach

locale si distinguono il *moto subsonico* ed il *moto supersonico*; il moto subsonico si ha dove risulta $M < 1$, mentre il moto supersonico si ha dove risulta $M > 1$; nel caso particolare in cui $M = 1$, risultando ivi $u = c$, si parla di *moto sonico*. Vengono a volte impiegate anche le dizioni di *moto transonico* (numero di Mach attorno al valore unitario) e *moto ipersonico* (numero di Mach notevolmente maggiore di uno): questi regimi di moto, come si vede, non sono quantitativamente ben definiti.

Il *numero di Mach locale* non dovrà essere confuso con altre definizioni di numero di Mach di impiego particolare (come il *numero di Mach critico*, che verrà definito più avanti). Quando ci si riferisce semplicemente al *numero di Mach* di un fluido, andrà sempre inteso il numero di Mach locale, così come definito dalla relazione (1.4.9).

1.5 STATO DI RISTAGNO O DI ARRESTO.

Nello studio di un fluido in moto risulta molto comodo definire delle grandezze (dette di *ristagno* o di *arresto*), il cui valore dipende dallo stato termodinamico e dinamico locale del fluido.

Si ha così l'*entalpia di ristagno* o di *arresto* h_0 , definita dalla relazione:

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2} \quad (1.5.1)$$

Considerando l'equazione del Primo Principio della Termodinamica (1.3.4) in assenza di scambi

di calore e lavoro e con variazione di energia potenziale nulla, si vede come l'entalpia di ristagno h_0 coincide col valore dell'entalpia che avrebbe il fluido se, con un processo adiabatico, fosse portato (a partire dalle condizioni locali) sino alla condizione di velocità nulla. Si può anche osservare che l'entalpia totale rappresenta (quando l'energia potenziale è trascurabile) l'energia totale specifica del moto.

Per un gas ideale si ha:

$$T_0 = T + \frac{u^2}{2c_p}$$

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2} \quad h = c_p T$$

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2} \quad \Rightarrow \text{dividendo per } c_p \Rightarrow \text{ok!}$$

È così definita la temperatura di ristagno (o totale) T_0 , cioè la temperatura che avrebbe il gas se il moto fosse portato, a partire dalle condizioni locali, adiabaticamente allo stato di velocità nulla. Tenendo conto della espressione della velocità del suono e che $c_p = kR/(k-1)$ l'equazione (1.5.2) diventa:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} \frac{u^2}{c^2}$$

e quindi:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$$

Il rapporto tra la temperatura di ristagno T_0 e la temperatura "statica", T della corrente indisturbata è funzione del numero di Mach e del rapporto k dei calori specifici.

Si può ora definire la pressione di ristagno (o di arresto) p_0 come il valore della pressione cui il fluido si porterebbe se, a partire dalle condizioni locali nella sezione di tubo di flusso considerata, fosse portato con un processo isentropico fino allo stato di velocità nulla.

Per un gas ideale la relazione tra la pressione di ristagno p_0 e la pressione statica p del moto è:

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{k/(k-1)} \quad \text{ISOTROPICA} \quad (1.5.5)$$

e per la (1.5.4):

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{k/(k-1)} \quad (1.5.6)$$

Analogamente la densità di ristagno ρ_0 è espressa da:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/(k-1)} \quad (1.5.7)$$

e per la (1.5.4):

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{1/(k-1)} \quad (1.5.8)$$

Valori dei rapporti T/T_0 , p/p_0 , ρ/ρ_0 in funzione del numero di Mach sono diagrammati per gas ideale con $k = 1.4$ (aria) in fig. 1.5.1 e tabulati in Appendice (A1, A2, A3) per gas ideali mo-

$$\left(\frac{p}{p_0} \right)$$

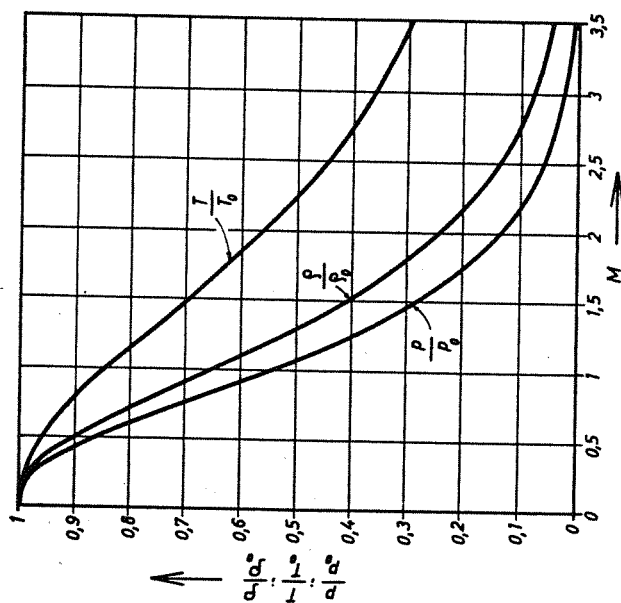


Fig. 1.5.1. - Rapporto tra grandezze statiche e corrispondenti grandezze di ristagno, per un gas ideale con $k = 1, 4$, in funzione del numero di Mach M .

noatomici ($k = 1,67$), biatomici ($k = 1,4$) e triatomici ($k = 1,3$). Le figg. 1.5.2 e 1.5.3 mettono in evidenza come il rapporto delle temperature T/T_0 dipenda dalle proprietà del gas (cioè da k) in maniera più rilevante di quanto avvenga per il rapporto delle pressioni p/p_0 .

Le relazioni ricavate in questo paragrafo permettono di determinare lo stato di ristagno (T_0 , p_0) associato ad un particolare stato locale del moto (T, p, u). Le grandezze di ristagno possono pure venire in ogni caso pensate come proprietà

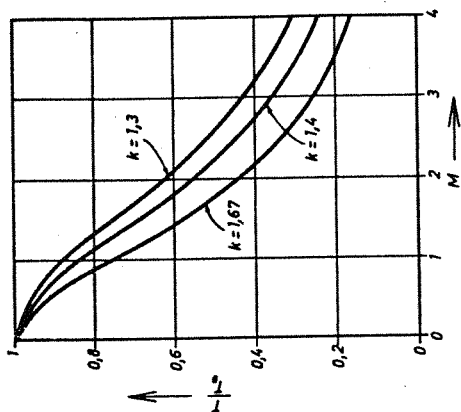


Fig. 1.5.2. - Rapporto tra la temperatura statica T e la temperatura di ristagno T_0 in funzione del numero di Mach M per gas ideali a differenti valori di k .

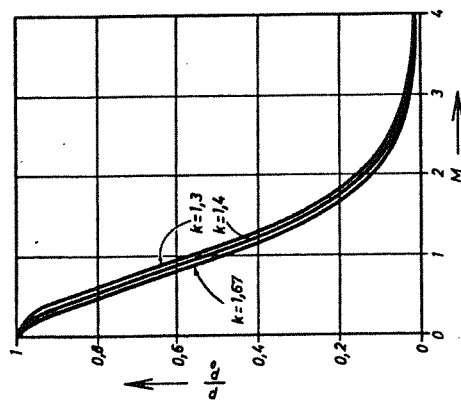


Fig. 1.5.3. - Rapporto tra la pressione statica p e la pressione di ristagno p_0 in funzione del numero di Mach M per gas ideali a differenti valori di k .

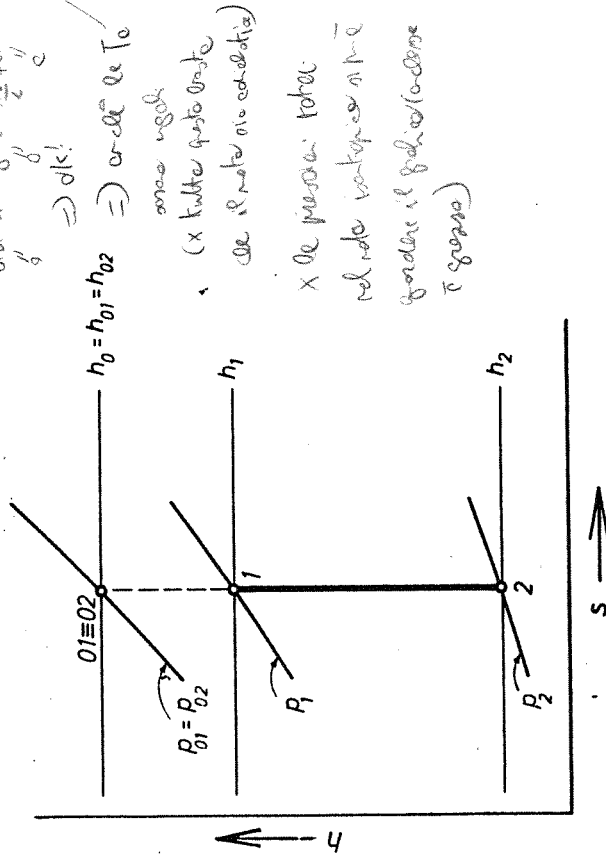
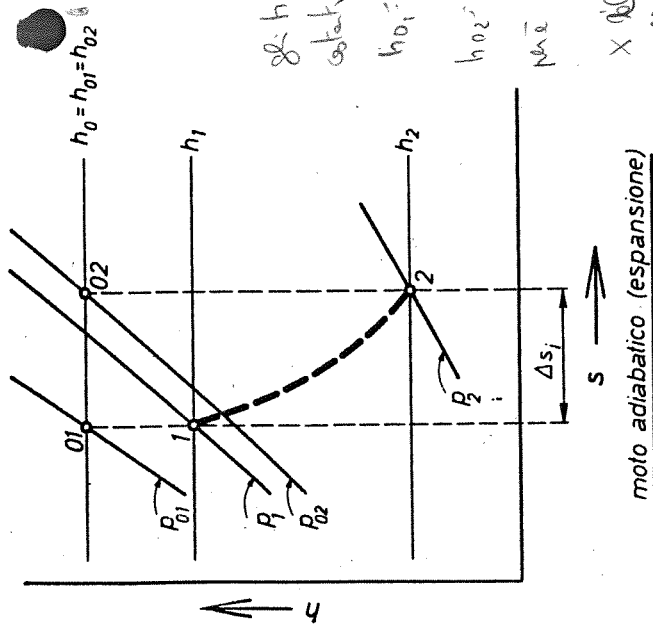


Fig. 1.5.4. - Nel moto adiabatico l'entalpia di ristagno ha valore costante; solo nel moto adiabatico reversibile (isentropico) anche la pressione di ristagno conserva valore costante lungo il deflusso.

X m nota costante $h_{01} = h_{02}$ si assume

*invece $P_{01} \neq P_{02}$ si assume
nota x
isentropico*

locali e se applicate a sezioni diverse qualsiasi 1 e 2 del tubo di flusso si avrà:

$$h_{01} = h_{02}; \quad T_{01} = T_{02} \quad (\text{gas ideale})$$

quando il moto è adiabatico ed inoltre:

$$p_{01} = p_{02}, \quad \rho_{01} = \rho_{02}$$

solo nel caso di deflusso isentropico (fig. 1.5.4).

*cioè se il moto è isentropico tutti i valori in un punto si conservano anche dopo l'espansione
cioè in un altro punto dove che non si è perso niente nel moto del fluido (nessuna
perdita di energia) allora si può dire che il moto è isentropico
in valore medio*

1.6 MOTO ADIABATICO PER GAS IDEALI: VELOCITÀ DI RIFERIMENTO; NUMERO DI MACH CRITICO.

Molti problemi che saranno considerati in seguito riguardano per lo più moti adiabatici a regime permanente.

L'equazione dell'energia (1.3.4), in assenza di scambio di calore e di lavoro e con variazione nulla di energia potenziale, si scrive:

$$h + \frac{u^2}{2} = h_0 = \text{cost}$$

che per un gas ideale, ricordando che $c_p = \frac{kR}{k-1}$ e $c = \sqrt{kRT}$, può essere scritta nella forma:

$$\frac{2}{k-1} c^2 + u^2 = \frac{2}{k-1} c_0^2 = \text{cost} \quad (1.6.1)$$

ove:

$$c_0 = \sqrt{kRT_0} \quad (1.6.2)$$

$$1.6.1 \quad \frac{2}{k-1} C^2 + U^2 = \frac{2}{k-1} C_0^2$$

$$\alpha C = 0 \Rightarrow U_{\max} = \frac{2}{k-1} C_0^2$$

è la velocità del suono nelle condizioni di ristagno e può essere pensata come la rappresentazione dinamica dell'energia totale specifica del moto. La (1.6.1) mostra che, in un dato tubo di flusso, la velocità del fluido è sempre inferiore ad un certo valore limite $u_{\max}$ corrispondente ad una velocità nulla del suono: $\Rightarrow T=0$

$$u_{\max} = \sqrt{\frac{2}{k-1}} C_0 \quad (1.6.3)$$

Questa massima velocità del fluido sarebbe in pratica realizzata se il contenuto entalpico del fluido (fino alla temperatura di 0°K) fosse completamente trasformato in energia cinetica. In questo caso un dispositivo termometrico mobile con la corrente dovrebbe indicare la temperatura di zero gradi assoluti.

In accordo con l'equazione (1.6.1) si vede che la velocità locale del suono C diminuisce all'aumentare della velocità locale del fluido u e viceversa come schematizzato in tabella:

u	$0 \longrightarrow u = C \longrightarrow u_{\max}$
C	$C_0 \longrightarrow C = u \longrightarrow 0$

Ad un dato punto le due velocità sono eguali ed il loro valore comune:

$$u = C = u^* = C^* \quad (1.6.4)$$

indicato dal simbolo asteriscato, è chiamato velocità critica del suono (o semplicemente velocità

critica). Sostituendo la (1.6.4) nella (1.6.1) si ottiene:

$$C^* = \sqrt{\frac{2}{k+1} k R T_0} = \sqrt{\frac{2}{k+1}} C_0 \quad (1.6.5)$$

La velocità critica del suono dipende dalle condizioni di ristagno e dalle caratteristiche fisiche del gas.

Si può fare riferimento alla temperatura critica T^* :

$$T^* = \frac{C^{*2}}{kR} \quad (1.6.6)$$

$C^* = \sqrt{kRT^*}$
velocità dello
gas a C

che per la (1.5.4) è legata alla temperatura di ristagno dall'espressione ($M=1$ nello stato critico):

$$\frac{T_0}{T^*} = 1 + \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2} \quad (1.6.7)$$

Dal confronto della (1.5.4) e (1.6.7) si ottiene una relazione tra la temperatura critica e la temperatura statica del fluido:

$$\frac{T^*}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \quad (1.6.8)$$

Così tramite la (1.6.8) la temperatura in una qualsiasi sezione può essere facilmente dedotta da quella in un'altra sezione solamente dalla conoscenza dei corrispondenti numeri di Mach. *velocità della*

Tutti gli stati dinamici possibili per un gas ideale in un tubo di flusso a regime permanente,

La relazione tra il numero di Mach critico $\bar{M}$ e quello locale M si ottiene da:

$$\bar{M}^2 = \frac{u^2}{c^{*2}} = \frac{u^2}{c^2} \frac{c^2}{c^{*2}} = \frac{u^2}{c^2} \frac{T}{T_0} \frac{c_0^2}{c^{*2}} \quad (1.6.10)$$

e per le (1.4.8), (1.5.4) e (1.6.5):

$$\bar{M}^2 = \frac{k+1}{2} \frac{M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \quad (1.6.11)$$

$$M^2 = \frac{2}{k+1} \frac{\bar{M}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \bar{M}^2} \quad (1.6.12)$$

Confrontando la (1.6.11) e la (1.6.12) si ottiene:

$M = 0$	per	$\bar{M} = 0$
$M < 1$	"	$\bar{M} < 1$
$M = 1$	"	$\bar{M} = 1$
$M > 1$	"	$\bar{M} > 1$
$M \rightarrow \infty$	"	$\bar{M} \rightarrow \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$

(1.6.13)

Quindi il numero di Mach critico risulta minore o maggiore dell'unità come lo stesso numero di Mach locale e presenta inoltre il vantaggio di assumere un valore finito al tendere di M all'infinito.

Per l'aria ($k = 1,4$) le (1.6.11) e (1.6.12) diventano:

come risulta dall'equazione adiabatica dell'energia, possono essere rappresentati in un diagramma (u, c) dalla curva dell'ellisse di fig. 1.6.1.

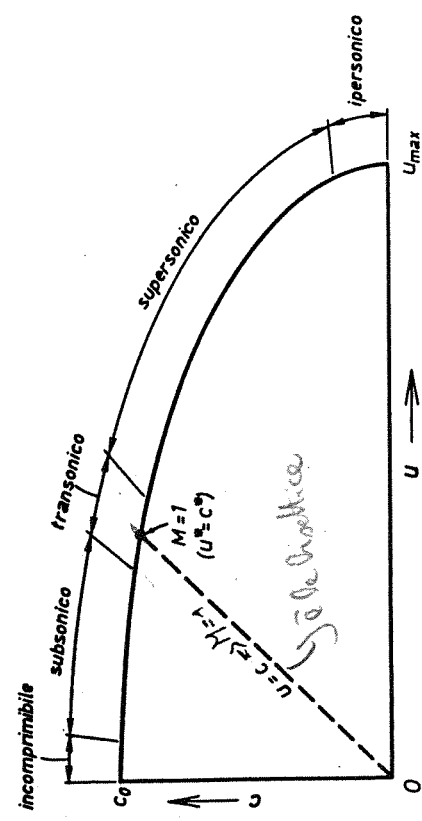


Fig. 1.6.1. - Ellisse rappresentante i diversi regimi di moto per un gas ideale che evolve adiabaticamente.

Il numero di Mach locale dipende sia dalla velocità del fluido che dalla velocità del suono nella medesima sezione di deflusso. Ma la velocità locale del suono varia con lo stato termodinamico del fluido, in particolare con la sola temperatura per un gas ideale; può essere utile introdurre un parametro ancora adimensionale ma funzione della sola velocità locale del fluido. Tale parametro può essere il rapporto tra la velocità del fluido e la velocità critica del suono che è una costante per il moto adiabatico; esso verrà chiamato *numero di Mach critico* ed indicato con il simbolo $\bar{M}$:

$$\bar{M} = \frac{u}{c^*} \quad (1.6.9)$$

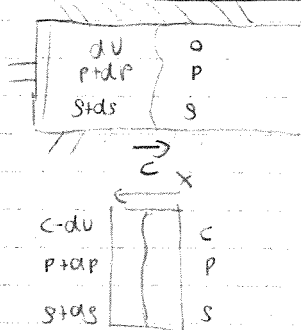
CA S D I N A M I C A

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{E} dp$$

$$\frac{dV^2}{2} + g dz + V dp + \sigma R + \sigma L' = 0 \quad \delta Q = dh + \frac{dV^2}{2} + g dz + \sigma L'$$

$$W = \rho V A \quad \text{oppure} \quad \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad \Sigma F_x = W(V_2 - V_1)$$

VELOCITA' DEL SUONO



$$\Sigma F_x = W(V_2 - V_1) \Rightarrow A[p - (p + dp)] = \rho A[(C - dV) - C]$$

$$\text{ma} \Rightarrow \rho A dV = (\rho + d\rho) A (C - dV)$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{k \frac{RT}{M}}$$

STATO DI RISTAGNO

$$h_0 = h + \frac{V^2}{2}$$

$$\Rightarrow c_p T_0 = c_p T + \frac{V^2}{2} \Rightarrow T_0 = T + \frac{V^2}{2 c_p}$$

$$p V^k = \text{cost} \Rightarrow \frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

$$\begin{aligned} \frac{T_0}{T} &= 1 + \frac{V^2}{2 c_p T} \\ &= 1 + \frac{V^2}{2 c^2} \frac{c_p T}{c^2} \\ &= 1 + \frac{V^2 (k-1)}{2 c^2} \\ &= 1 + \frac{(k-1) M^2}{2} \end{aligned}$$

VELOCITA' DI RIFERIMENTO

$$h + \frac{V^2}{2} = h_0 \Rightarrow c_p T + \frac{V^2}{2} = c_p T_0 \Rightarrow \frac{2}{k-1} c^2 + \frac{V^2}{2} = \frac{2}{k-1} c_0^2$$

$$\Rightarrow \underline{U_{max}} = \sqrt{\frac{2}{k-1}} c_0 \quad \text{ma si vede che durante il deflusso} \quad U = c = V^* = c^*$$

$$c^* = \sqrt{\frac{2}{k+1}} c_0 \quad \text{cioe' si ha } M=1$$

$$\Rightarrow \text{dopo le frasi sopra si trova } \frac{T_0}{T^*}, \frac{p_0}{p^*}, \frac{\rho_0}{\rho^*}$$

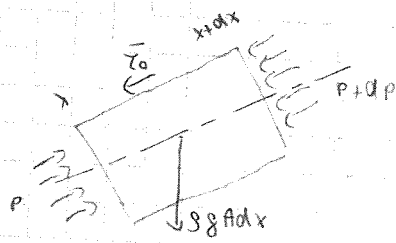
$$\bar{M} = \frac{U}{c^*}$$

$$\bar{M}^2 = \frac{U^2}{c^{*2}} = \frac{U^2}{\frac{c^2}{k}} = \frac{U^2}{c^2} \cdot k = \frac{U^2}{c^2} \cdot \frac{c_0^2}{T_0} \cdot \frac{T}{T^*} \Rightarrow \text{le frasi}$$

coste
cal.

$$= \frac{U^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{T^*} = \frac{U^2}{c^2} \cdot \frac{T}{T^*}$$

MOTO CON ATTRITO



$$\sum F_x = w du$$

$$-A dp - \tau_0 c dx + sg A dx = w du$$

$$\Rightarrow \frac{du^2}{2} + u dp + g dz + \tau_0 \frac{c}{A} \frac{dx}{s}$$

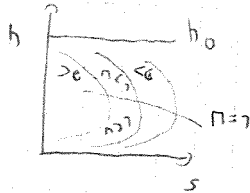
$$\Rightarrow \int R = \tau_0 \frac{c dx}{A s} = \frac{4 \tau_0 dx}{s} \frac{u^2}{2}$$

$$de = \frac{4A}{C} \quad h = \frac{\tau_0}{s \frac{u^2}{2}}$$

FANNO (V)

$$h + \frac{u^2}{2} = h_0 \quad C = \frac{w}{A} = s u$$

$$\Rightarrow h = h_0 + \frac{C^2}{2} s^2$$



$$dh + u^2 \frac{du}{u} = 0$$

$$T ds = dh - u dp \quad \frac{du}{u} + \frac{ds}{s} = 0$$

$$\frac{u^2}{u} = -\frac{dh}{\frac{du}{u}} = \frac{dh}{\frac{ds}{s}} = \frac{dp}{s} \cdot \frac{s}{ds} = \frac{dp}{ds}$$

$$dh + u^2 \frac{du}{u} = 0 \Rightarrow C p dT + u^2 \frac{du}{u} = 0 \Rightarrow \frac{k R dT}{(k-1) T} + \frac{u^2}{C^2} \frac{du}{u} = 0$$

$$dT + (k-1) n^2 \frac{du}{u} = 0$$

$$n = \frac{u}{C} \Rightarrow \frac{dn}{n} = \frac{du}{u} - \frac{1}{C} \frac{dC}{C} \Rightarrow \frac{dn}{n} = \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T}$$

Secondo il primo (1) e (2) trovo

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} n^2} \frac{dn}{n} \quad e \quad \frac{dT}{T} = \dots$$

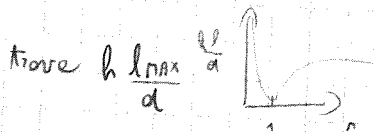
$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{ds}{s} + \frac{dT}{T} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \dots$$

$$\frac{u du}{C^2} + u dp + \frac{h dx}{C} \frac{u^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow k n^2 \frac{du}{u} + \frac{dp}{p} + R \frac{dx}{A} k n^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dn}{n} = \frac{k n^2 (1 + \frac{k-1}{2} n^2)}{2 (1 - n^2)} h \frac{dx}{A}$$

$$\Rightarrow \text{integrando} \int_0^{l_{max}} \frac{h dx}{A} = \int_0^1 \dots dn$$



$$l_{12} = (l_{max})_{n_1} - (l_{max})_{n_2}$$

STATI DI RIF. : $\times \frac{T}{T^*}$ si ha da $h_0 = h + \frac{u^2}{2}$

$$\Rightarrow \frac{s}{s^*} \Rightarrow \frac{u}{u^*}$$

$$p v = R T$$

$$\Rightarrow \frac{p^*}{s^* T^*} = \frac{p}{s T} \Rightarrow \frac{p^*}{p} = \frac{s^*}{s} \frac{T^*}{T} \Rightarrow \frac{p^*}{p} = \frac{s^*}{s}$$

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_2 C_2}{u_1 C_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\sqrt{k R T_2}}{\sqrt{k R T_1}}$$

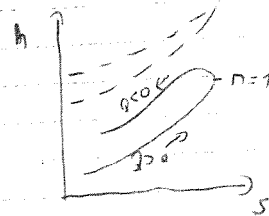
$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{p_0}{p} \frac{p}{p^*} \frac{p^*}{p_0^*} = \frac{p_0}{p} \frac{p}{p^*} \left(\frac{p}{p_0} \right)^k \Rightarrow \text{OK!!}$$

$$\frac{p_c}{p_1} = \left(\frac{p_c}{p_1^*} \right)_{n_1} \left(\frac{p_1^*}{p_1} \right)_{n_1}$$

NOTO D) RAYLEIGH

$$\int \rho dp + \rho u du = 0 \quad \frac{du}{u} - \frac{dv}{v} = 0$$

$$\Rightarrow \rho \left(1 + \frac{u^2}{v} \right) dv = 0 \quad \Rightarrow \rho + \left(\frac{u}{v} \right)^2 \rho = \text{const} \quad \text{or} \quad \rho + \frac{u}{A} u = \text{const}$$



STATI D) RIF.

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$\Rightarrow \rho_1 \left[1 + \frac{\rho_1 u_1^2}{p_1} \right] = \rho_2 \left[1 + \frac{\rho_2 u_2^2}{p_2} \right] \quad \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{\gamma + k \frac{p_1}{p_2}}{\gamma + k \frac{p_2}{p_1}}$$

$$p v = R T \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{v_2}{v_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{u_2}{u_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{u_2 \frac{v_2}{v_2}}{u_1 \frac{v_1}{v_1}} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{v_2}{v_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} =$$

$$T_0 = T \left(\gamma + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \Rightarrow \frac{T_0}{T_0^*} \quad p_0 = p \left(\gamma + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \Rightarrow \frac{p_0}{p_0^*}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{p^*} \cdot \frac{T}{T^*} \cdot \frac{T_0}{T_0^*} \cdot \frac{p_0}{p_0^*}$$

$$\overline{M}^2 = \frac{6}{5} \frac{M^2}{1 + \frac{M^2}{5}}; \quad M^2 = \frac{5}{6} \frac{\overline{M}^2}{1 - \frac{\overline{M}^2}{6}} \quad (1.6.14)$$

PROBLEMA 1.6.1

In un condotto orizzontale viene espansa adiabaticamente dell'aria (a comportamento ideale con $k = 1,4$). In una prima sezione del condotto si ha:

$$A_1 = 90 \text{ cm}^2, \quad p_1 = 40 \text{ psia}, \quad T_1 = 300^\circ \text{K}, \quad M_1 = 0,5$$

ed in una sezione a valle della prima:

$$p_2 = 30 \text{ psia}, \quad M_2 = 0,8.$$

Calcolare:

a) i valori di T_0 , c_0 , $u_{\max}$, c^* e T^* nelle due sezioni;

b) l'area della seconda sezione.

Nella prima sezione:

$$\frac{T_{01}}{T_1} = 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 = 1 + 0,2 \cdot 0,5^2 = 1,05$$

e nella seconda:

$$\frac{T_{02}}{T_2} = 1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 = 1 + 0,2 \cdot 0,8^2 = 1,128.$$

Poiché il moto è adiabatico si ha:

$$T_0 = T_{01} = T_{02} = 1,05 \cdot 300 = 315^\circ \text{K} \quad ***$$

da cui:

$$T_2 = \frac{315}{1,128} = 279,25^\circ \text{K}$$

e quindi:

$$c_0 = c_{01} = c_{02} = \sqrt{kRT_0} = \sqrt{1,4 \frac{8317}{28,97} \cdot 315} = 355,8 \text{ m/sec} \quad ***$$

e per le (1.6.3), (1.6.5) e (1.6.7):

$$u_{\max} = \sqrt{5} c_0 = 793,4 \text{ m/sec} \quad ***$$

$$c^* = \sqrt{\frac{5}{6}} c_0 = 323,8 \text{ m/sec} \quad ***$$

$$T^* = 0,833 T_0 = 262,4^\circ \text{K}. \quad ***$$

Applicando l'equazione di continuità (1.3.5) si ricava l'area della seconda sezione:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} A_1 \\ &= \frac{M_1 c_1}{M_2 c_2} \cdot \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} A_1 \\ &= \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/2} \cdot A_1 \\ &= \frac{0,5}{0,8} \cdot \frac{40}{30} \cdot \left(\frac{279,25}{300} \right)^{1/2} \cdot 90 = 72 \text{ cm}^2 \quad *** \end{aligned}$$

CAPITOLO II

ONDE D'URTO NORMALI

2.1 GENERALITÀ.

Le proprietà di un fluido in moto a regime permanente e con determinate condizioni al contorno non sempre variano in modo regolare e continuo. Si può avere la formazione di una cosiddetta *onda d'urto* ed allora tutte le proprietà termodinamiche e cinematiche variano con discontinuità attraverso il "fronte d'onda". Calcoli teorici e misure sperimentali mostrano che lo spessore di una onda d'urto normale è dello stesso ordine di grandezza del cammino libero medio delle molecole. Per questa ragione nello studio dell'onda di urto una discontinuità matematica sostituisce le sue caratteristiche interne e gli effetti dell'attrito e dello scambio di calore con le pareti del condotto possono essere completamente trascurati.

2.2 EQUAZIONI FONDAMENTALI PER UN'ONDA D'URTO NORMALE.

Lo studio di un'onda d'urto che si propaga attraverso un gas in quiete può essere affrontato in modo analogo a quello dell'onda sonora, assumendo un sistema di riferimento solidale con il fronte d'onda (§ 1.4). L'onda d'urto stazionaria normale divide il campo di moto in due regioni le cui grandezze meccaniche e termodinamiche, come schematizzato in fig. 2.2.1, sono indicate rispettivamente con gli indici 1 e 2 a seconda che rappresentino stati del fluido a monte o a valle dell'onda d'urto.

Il volume di controllo, comprendente il fronte d'urto, può essere considerato di spessore infinitesimo nella direzione del moto e quindi con le due sezioni trasversali di eguale area. Poichè at-

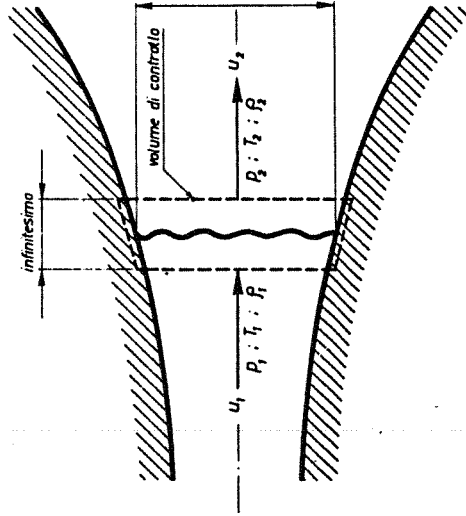


Fig. 2.2.1. - Volume di controllo per l'analisi di un'onda d'urto normale stazionaria.

ADIPACATICO MA
NON ISOENTROPICO

traverso la superficie di controllo non si hanno scambi di calore e di lavoro le equazioni dell'energia (1.3.4), di continuità (1.3.5) e della quantità di moto (1.3.9) possono essere scritte nella forma:

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} = h_0 \quad (2.2.1)$$

$$u_1 \rho_1 = u_2 \rho_2 \quad \text{per la conservazione della massa} \quad (2.2.2)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad \Sigma F_x = 0 \quad (2.2.3)$$

Queste tre equazioni sono espresse in funzione delle quattro variabili u , p , ρ e h ed è perciò necessario conoscere l'equazione di stato del fluido affinché sia possibile determinarne le proprietà a valle, note quelle a monte dell'onda d'urto.

2.3 ONDA D'URTO NORMALE IN UN GAS IDEALE.

$S_1 u_1^2 - S_2 u_2^2 = p_2 - p_1$
 $(u_2 u_1 - u_1 u_2) = p_2 - p_1$
 $u_2 (u_1 - u_2) \cdot (p_2 - p_1) = 0$

Dal confronto delle equazioni (2.2.2) e (2.2.3) si ha:

$$u_1 - u_2 = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1}{\rho_1 u_1} \quad (2.3.1)$$

e introducendo l'espressione della velocità del suono per un gas ideale, $c = \sqrt{kp/\rho}$:

$$k(u_1 - u_2) = \frac{c_2^2}{u_2} - \frac{c_1^2}{u_1} \quad (2.3.2)$$

L'equazione adiabatica dell'energia di un gas ideale (1.6.1) applicata alle sezioni 1 e 2 a monte ed a valle dell'onda d'urto permette il calcolo delle corrispondenti velocità del suono:

$$c_1^2 = c_0^2 - \frac{k-1}{2} u_1^2 \quad (2.3.3)$$

$$c_2^2 = c_0^2 - \frac{k-1}{2} u_2^2 \quad (2.3.4)$$

che sostituite nella (2.3.2) danno l'equazione:

$$u_1 \cdot u_2 = \frac{2}{k+1} c_0^2 = c^{*2} \quad (2.3.5)$$

e in funzione del numero di Mach critico:

$$\boxed{M_1 \cdot M_2 = 1} \quad (2.3.6)$$

Le (2.3.5) e (2.3.6), note come *equazioni di Prandtl* o di *Meyer*, rappresentano le relazioni tra le velocità del fluido ed i numeri critici di Mach attraverso un'onda d'urto normale; la loro importanza sarà dimostrata nel paragrafo successivo.

La relazione tra i numeri di Mach a monte, M_1 , ed a valle, M_2 , dell'onda d'urto si ottiene sostituendo nella (2.3.6) le espressioni date dalla (1.6.11):

$$\boxed{M_1 \cdot M_2 = 1} \quad \text{Basta sostituire } M_1 \text{ e } M_2 \text{ con } \frac{u}{c} \text{ e } \frac{u}{c^*}$$

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1} M_1^2 - 1} \quad (2.3.7)$$

Questa relazione è di grande utilità per scrivere le equazioni fondamentali relative all'onda di urto in forma da potere essere facilmente tabulate.

Per un gas ideale l'equazione dell'energia applicata, nelle condizioni di un'onda d'urto, agli stati 1 e 2 porge:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \quad (2.3.8)$$

$h + \frac{1}{2} u^2 = h + \frac{1}{2} u^{*2} = \text{costante}$

e per la (2.3.7):

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right) \left(\frac{2k}{k-1} M_1^2 - 1\right)}{(k+1)^2 M_1^2} \quad (2.3.9)$$

rapporto che può essere facilmente tabulato in funzione del numero di Mach M_1 a monte dell'onda d'urto, per i diversi valori di k .

Analogamente dall'equazione della quantità di moto (2.2.3), tenendo conto dell'espressione della

velocità del suono per un gas ideale, si ricava:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2}$$

$$\begin{aligned} p_1 + \rho_1 v_1^2 &= p_2 + \rho_2 v_2^2 \\ p_1 \left(1 + \frac{\rho_1 v_1^2}{p_1} \right) &= p_2 \left(1 + \frac{\rho_2 v_2^2}{p_2} \right) \\ p_1 (1 + kM_1^2) &= p_2 (1 + kM_2^2) \end{aligned}$$

da cui, per la (2.3.7):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \quad (2.3.10)$$

Dalle relazioni (2.3.9) e (2.3.10) e dall'equazione di stato si ottiene:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{2} \frac{M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \quad (2.3.11)$$

La misura della irreversibilità in un processo d'urto è data dal rapporto delle pressioni di ristagno:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_{01}} \quad (2.3.12)$$

e poiché i rapporti a secondo membro possono essere espressi tramite la (1.5.6), la (2.3.10) e la (2.3.7) in funzione di M_1 , si ha:

TUTTO IN DIPENDENZA DA M_1

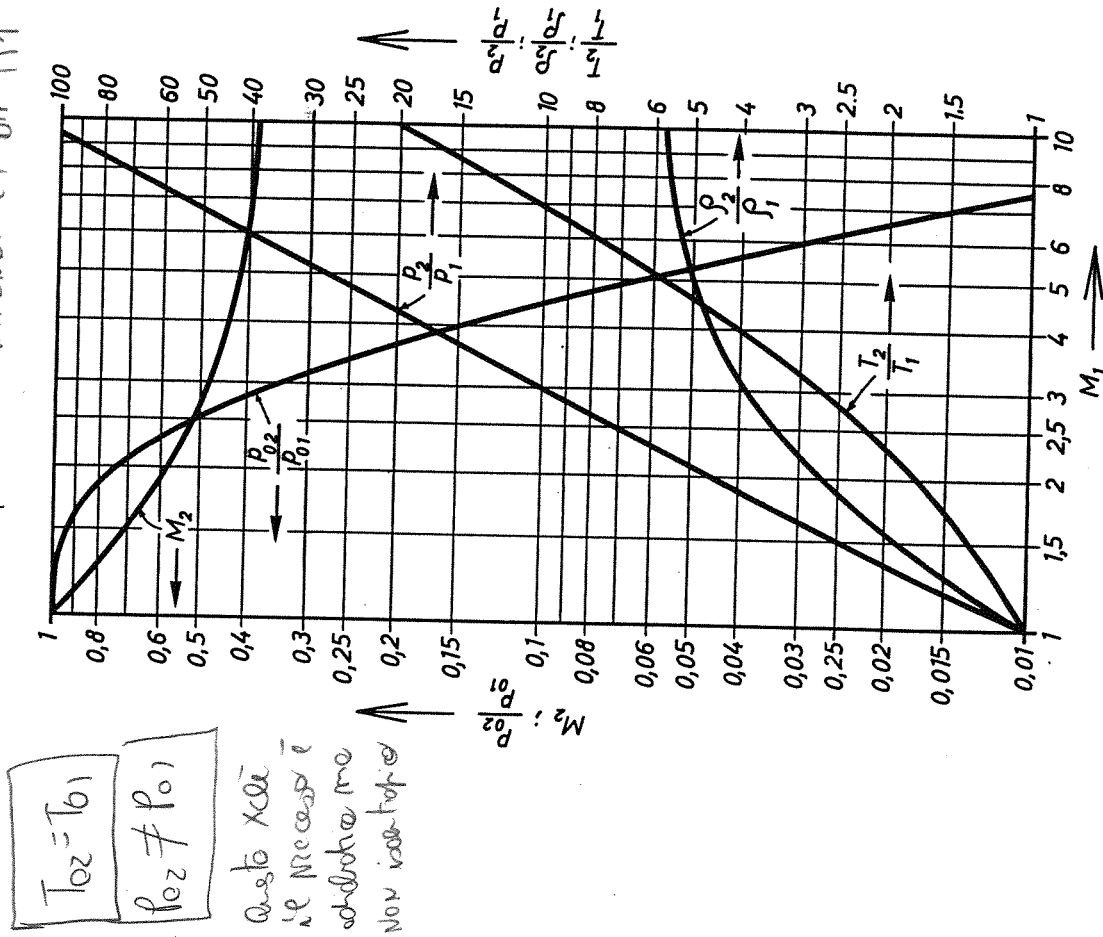


Fig. 2.3.1. - Funzioni dell'onda d'urto normale per un gas ideale con $k = 1,4$. I pedici 1 e 2 si riferiscono rispettivamente a valori a monte e a valle del fronte d'onda.

C'è una perdita
di pressione statica
(no isentropico)

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{\frac{k+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{k/(k-1)} \left(\frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \right)^{1/(1-k)}$$

(2.3.13)

In conclusione i rapporti tra i valori delle varie grandezze a monte ed a valle dell'onda d'urto dipendono solamente dal valore del numero di Mach incidente M_1 . Essi sono tabulati, assieme alla relazione (2.3.7), in Appendice (B1, B2, B3) per alcuni valori k e diagrammati per gas ideale con $k = 1,4$ (aria) in fig. 2.3.1.

2.4 IMPOSSIBILITÀ DI UN'ONDA D'URTO DA MOTO SUBSONICO A SUPERSONICO.

$$u_1 \cdot u_2 \leq C^2$$

$$M_1 \cdot M_2 = 1$$

Dalle relazioni di Prandtl (2.3.5) e (2.3.6), nell'ipotesi che si formi un'onda d'urto ($u_2 \neq u_1$), si deduce che risulta $\bar{M}_2 < 1$ se $\bar{M}_1 > 1$ e $\bar{M}_2 > 1$ se $\bar{M}_1 < 1$: cioè per le (1.6.13) un moto inizialmente supersonico diventa subsonico a valle dell'onda d'urto e viceversa. Si dimostrerà ora (solo per gas ideali, ma la conclusione è più generale) che il Secondo Principio della Termodinamica elimina questa seconda alternativa, cioè la possibilità di avere un'onda d'urto quando il moto è inizialmente subsonico.

ONDE D'URTO NORMALI

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

$$= \frac{d\theta}{T} + \frac{dU^2}{2T}$$

$$= \frac{p dT}{T} - \frac{v dP}{T}$$

49

La variazione dell'entropia attraverso un'onda d'urto normale è data per i gas ideali dall'espressione:

→ Monte portatore d'onda d'urto il cui profilo è p e densità ρ

$$S_2 - S_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = R \ln \left[\frac{p_1}{p_2} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{k/(k-1)} \right] \quad (2.4.1)$$

e poiché $S_2 = S_{02}$ e $S_1 = S_{01}$, per definizione dello stato di ristagno, si ha:

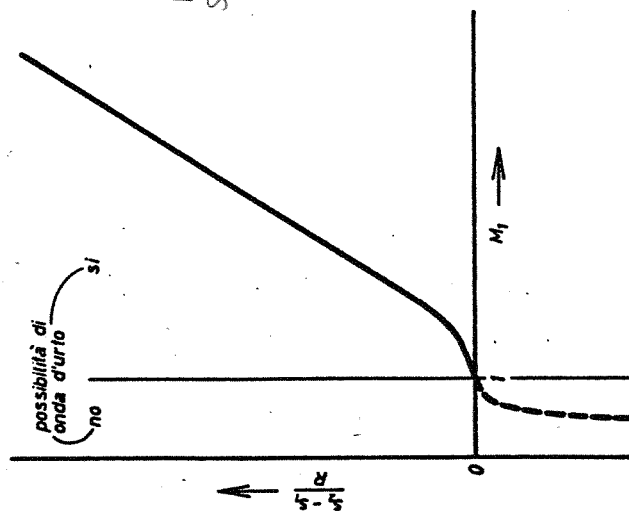
$$S_2 - S_1 = R \ln \left[\frac{p_{01}}{p_{02}} \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right)^{k/(k-1)} \right] \quad (2.4.2)$$

Il processo attraverso l'onda d'urto è adiabatico, cioè $T_{02} = T_{01}$, e quindi la variazione di entropia specifica per la (2.3.13) diventa:

$$\frac{S_2 - S_1}{R} = \frac{k}{k-1} \ln \frac{2 + (k-1)M_1^2}{(k+1)M_1^2} + \frac{1}{k-1} \ln \frac{2kM_1^2 - (k-1)}{k+1}$$

(2.4.3)

L'equazione (2.4.3) rappresentata graficamente per i gas ($1 < k < 1,67$) in fig. 2.4.1, mostra che la variazione di entropia tra monte e valle dell'onda d'urto è positiva se $M_1 > 1$ e negativa se $M_1 < 1$. Poiché per il Secondo Principio della Termodinamica l'entropia di un sistema adiabatico non può diminuire è così dimostrato che per un gas ideale l'onda d'urto è possibile solo al passare da velocità supersoniche a velocità subsoniche. Ciò comporta un aumento di pressione e quindi la im-



NO ONDE DI
ESPANSIONE MA
SOLO DI COMPRESSIONE

Fig. 2.4.1. - Variazione dell'entropia verso l'onda d'urto normale in funzione del valore del numero di Mach M_1 a monte.

possibilità che l'onda d'urto normale sia un'onda di espansione. *no < onda d'urto normale > solo onde di compressione*

Attraverso l'onda d'urto di compressione, come illustrato in fig. 2.3.1, anche la temperatura e la densità aumentano mentre diminuisce la pressione di ristagno a causa dell'aumento di entropia.

Una interessante relazione tra il rapporto delle densità e quello delle pressioni si ottiene dalle (2.3.10) e (2.3.11):

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{k+1}{k-1} \frac{p_2}{p_1}}{\frac{p_2}{p_1} + \frac{k+1}{k-1}} \quad (2.4.4)$$

La (2.4.4), nota come *equazione di Rankine-Hugoniot*, mette in evidenza la relazione esistente tra $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ e $\frac{p_2}{p_1}$ in un processo di compressione adiabatico ed irreversibile quale quello dell'onda d'urto. Il confronto con la compressione isentropica è illustrato, per un gas biatomico ($k = 1,4$), in fig. 2.4.2.

Si può osservare che per la compressione di

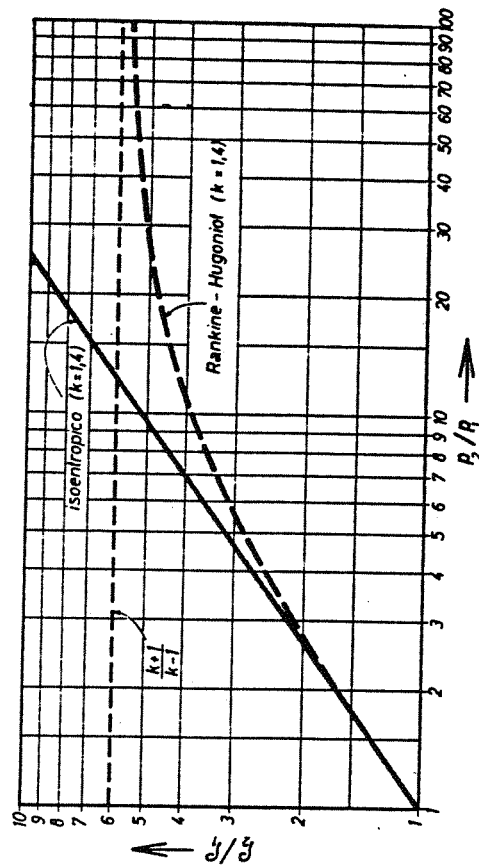
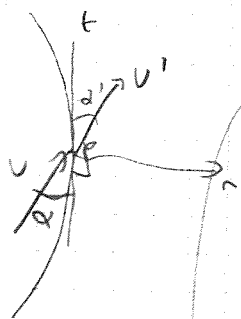


Fig. 2.4.2. - Confronto tra i processi di compressione attraverso un'onda d'urto normale (equazione di Rankine-Hugoniot) e in un processo isentropico per un gas ideale con $k = 1,4$.

Donc $V_{t1} = V_{t2}$



$\rightarrow S V_n = S' V'_n \quad \Sigma F_x dt = dm(v_2 - v_1)$

$S' v'_n \frac{dn'}{dn} - S v_n \frac{dn}{dn} = (P - P')_n \frac{dt}{\rho ds}$

$S' v'_n V'_n - S v_n V_n = (P - P')_n \quad \text{multiplier}$

$S' v'_t V'_n - S v_t V_n = 0$

$V'_t = V_t$

Ordonnée d'écoulement

$S_1 V_{m1} = S_2 V_{m2}$

$\frac{kR}{(k-1)} \int_{T_1}^{T^*} dt + \int_{V_1}^{V^*} V dV = 0 \quad dh + d\frac{V^2}{2} = 0$

$\frac{kR}{k-1} (T^* - T_1) + \frac{1}{2} (V^{*2} - V_1^2) = 0$

$R T_1 = \frac{P_1}{S_1}$

$\frac{V_{m1}^2 + V_{t1}^2}{2} + \frac{k}{(k-1)} \frac{P_1}{S_1} = 0^{x2} \frac{k+1}{2(k-1)}$

$\frac{V_{m2}^2 + V_{t2}^2}{2} + \frac{k}{(k-1)} \frac{P_2}{S_2} = 0^{x2} \frac{k+1}{2(k-1)}$

$P_1 + S_1 V_{m1}^2 = P_2 + S_2 V_{m2}^2$

$\frac{1}{S_1 V_{m1}} = \frac{1}{S_2 V_{m2}}$

$\frac{k}{k-1} \frac{P_1}{S_1 V_{m1}} + \frac{1}{2} V_{m1}^2 = \frac{k}{k-1} \frac{P_2}{S_2 V_{m2}} + \frac{1}{2} V_{m2}^2$

et voilà ok!!!

$V_{m1}, V_{m2} = 0^{x2} + \frac{k-1}{k+1} V_t^2$

urto, a differenza di quanto avviene per quella isentropica, il rapporto delle densità $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ è limitato al valore $\frac{k+1}{k-1}$ corrispondente ad un rapporto infinito di $\frac{p_2}{p_1}$. Inoltre le due curve sono quasi coincidenti per valori di $\frac{p_2}{p_1}$ prossimi all'unità: ciò significa che il processo attraverso una debole onda d'urto, cioè di piccola perturbazione in pressione, è "quasi" isentropico.

PROBLEMA 2.4.1

Una portata d'aria ($k = 1,4$) fluente in un condotto a $M = 2$ e con pressione e temperatura eguali rispettivamente a 1 ata ed a 15°C subisce un'onda d'urto normale.

Determinare (ipotizzando comportamento ideale):

- la pressione di ristagno e la velocità dell'aria a valle dell'onda d'urto;*
- la variazione di entropia attraverso l'onda d'urto.*

Dalla tabella A2 dell'Appendice si ha in corrispondenza a $M_1 = 2$:

$$\frac{p_1}{p_{01}} = 0,12780$$

da cui:

$$p_{01} = \frac{1}{0,12780} = 7,82472 \text{ ata}$$

e dalla tabella B2:

$$M_2 = 0,57735$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = 0,72088$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1,6875.$$

a) Si ha quindi:

$$p_{02} = p_{01} \cdot 0,72088 = 5,640 \text{ ata}$$

$$T_2 = T_1 \cdot 1,6875 = 486,25^\circ\text{K}$$

La velocità del suono risulta:

$$c_2 = \sqrt{kRT_2} = 373,6 \text{ m/sec}$$

da cui:

$$u_2 = M_2 c_2 = 215,7 \text{ m/sec}$$

b) La variazione di entropia è data dalla:

$$s_2 - s_1 = R \ln \frac{p_{01}}{p_{02}} = \frac{1,987}{28,97} \ln \frac{7,8247}{5,640} = 0,0224 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$$

CAPITOLO III

MOTO ISOENTROPICO

Il moto adiabatico di un fluido in un condotto quando sia trascurabile l'effetto delle forze dissipative può essere considerato, in prima approssimazione, *reversibile* e quindi *isoentropico*. L'ipotesi di reversibilità per il moto adiabatico non solo è di grande utilità per la risoluzione analitica di molti problemi ma presenta soprattutto un termine di confronto per situazioni reali di deflusso.

3.1 MOTO ISOENTROPICO IN CONDOTTI A SEZIONE VARIABILE. TEOREMA DI HUGONIOT.

L'equazione monodimensionale di continuità, per il moto a regime permanente di un fluido in un tubo di flusso, può essere applicata al moto in condotti nelle ipotesi che la velocità, pressione, densità e temperatura si possano considerare costanti attraverso ciascuna sezione.

In termini differenziali le equazioni di conservazione di massa e dell'energia per il moto adiabatico ($\delta L' = g \cdot dz = 0$) sono rispettivamente:

$$\frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = 0 \quad (3.1.1)$$

$$dh = -\frac{du^2}{2} = -u \cdot du. \quad (3.1.2)$$

Dalla relazione termodinamica:

$$T \cdot ds = dh - \frac{dp}{\rho} \quad (3.1.3)$$

si ha per il moto isentropico:

$$dh = \frac{dp}{\rho}$$

e quindi dalla (3.1.2):

$$u \cdot du = -\frac{dp}{\rho} = -\frac{dp}{\rho} \frac{dp}{dp} = -\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{dp}{\rho} \quad (3.1.5)$$

dove s è l'entropia specifica del fluido.

Eliminando il rapporto $\frac{dp}{\rho}$ tra la (3.1.1) e la (3.1.5) si ha:

$$\frac{dA}{A} = \frac{du}{u} \left[\frac{u^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} - 1 \right] \quad (3.1.6)$$

e introducendo il numero di Mach:

$$\frac{dA}{A} = \frac{du}{u} (M^2 - 1) \quad (3.1.7)$$

La (3.1.7), nota come *equazione di Hugoniot*, è fondamentale per il moto isoentropico monodimensionale e non dipende dalla natura del fluido, gas ideale o no. Da notare che per un fluido incomprimibile la velocità del suono è infinita ($d\rho = 0$) e la (3.1.7) si riduce alla semplice relazione $uA = \text{costante}$ qualunque sia la velocità del fluido.

Analogamente dal confronto delle (3.1.5) e (3.1.7) si ottengono le variazioni dell'area della sezione trasversale in funzione delle variazioni di pressione e densità:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dp}{\rho u^2} (M^2 - 1) \quad (3.1.8)$$

$$\frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} \frac{M^2 - 1}{M^2} \quad (3.1.9)$$

e riassumendo:

1) *moto subsonico* ($M < 1$):

$dA > 0$ implica $du < 0$, $dp > 0$, $d\rho > 0$
 $dA < 0$ implica $du > 0$, $dp < 0$, $d\rho < 0$.

2) *moto supersonico* ($M > 1$):

$dA > 0$ implica $du > 0$, $dp < 0$, $d\rho < 0$
 $dA < 0$ implica $du < 0$, $dp > 0$, $d\rho > 0$.

L'impiego delle equazioni (3.1.7), (3.1.8) e (3.1.9) è utile al dimensionamento di ugelli e dif-

dp dopo uguale se ds
c ds

fusori. Un *ugello* è un condotto che permette di ottenere un incremento nella velocità del fluido a spese di una diminuzione della pressione, e quindi dovrà essere convergente nel moto subsonico e divergente in quello supersonico.

Un *diffusore* invece è un condotto attraverso il quale il fluido viene deaccelerato con recupero di pressione e quindi avrà la forma di un convergente nel moto supersonico e di un divergente in quello subsonico (fig. 3.1.1).

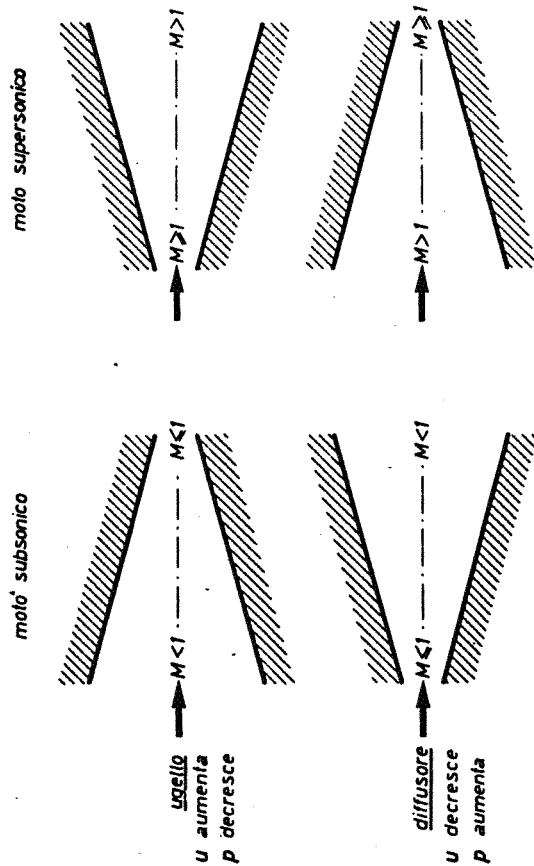


Fig. 3.1.1. - Effetto delle variazioni di area della sezione normale del condotto nel moto isentropico in regime subsonico e supersonico.

Quando il moto è *sonico* ($M = 1$) in accordo alla (3.1.7) e nell'ipotesi che non ci siano discontinuità nella velocità ($\frac{du}{dx}$ diversa da infinito) si ot-

tiene $\frac{dA}{dx} = 0$. La velocità locale del fluido può quindi essere eguale a quella del suono solo in una sezione del tubo di flusso avente area minima (l'alternativa di un'area massima viene esclusa da quanto dimostrato in precedenza).

Il reciproco di tale proprietà può non essere vero: infatti in una sezione di area minima, chiamata comunemente "gola", si può avere $M \neq 1$; dovrà allora essere $du/dx = 0$. Se si considera l'esempio illustrato in fig. 3.1.2 del convergente divergente con moto subsonico all'imbocco si presentano due alternative:

a) nella sezione di gola A_g la velocità locale del fluido eguaglia quella locale del suono. In questo caso nel divergente il moto può essere supersonico (curva a) o subsonico (curva b) a seconda delle condizioni di pressione allo sbocco del condotto;

b) nella sezione di gola la velocità può essere minore di quella del suono. In A_g si ha allora $M < 1$ ed il deflusso è completamente subsonico (curva c).

Considerazioni analoghe alle precedenti rivelano anche nel caso di moto inizialmente supersonico la possibilità di avere nella sezione di gola $M \neq 1$.

Concludendo, nella ipotesi di un deflusso continuo il passaggio da moto subsonico a moto supersonico (e viceversa) può avvenire solo nella sezione di gola.

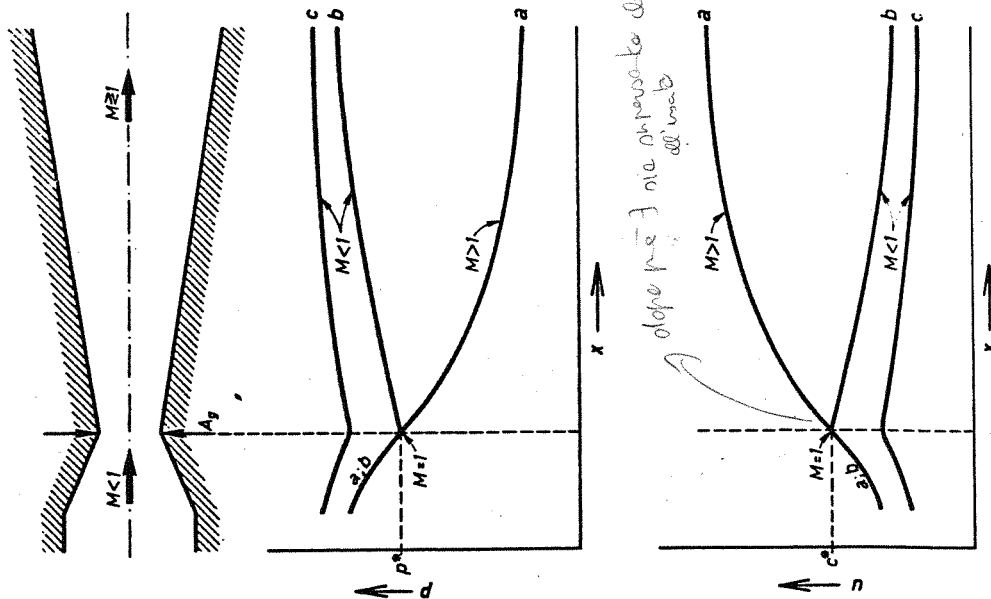


Fig. 3.1.2. - Possibili profili di velocità e pressione in un condotto convergente-divergente con regime di moto subsonico all'imbocco.

3.2 LO STATO CRITICO * DI RIFERIMENTO PER GAS IDEALI.

Nel paragrafo 1.6 si è definita la velocità critica del suono c^* e da essa la temperatura critica T^* (gas ideali):

$$\frac{T^*}{T} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \quad (1.6.8)$$

La temperatura critica dedotta con la sola condizione di adiabaticità non è di per sé sola sufficiente a definire uno stato termodinamico. A tal fine, come già per lo stato di ristagno, una ulteriore condizione deve essere imposta al processo: cioè quella "isoentropica". Lo stato critico è allora definito come lo stato corrispondente a $M = 1$ che a partire dalle condizioni locali viene raggiunto isoentropicamente. La pressione critica p^* è espressa in funzione del numero di Mach locale e del valore della pressione locale risulta:

$$\frac{p^*}{p} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{k/(k-1)} \quad (3.2.1)$$

Analogamente utilizzando l'equazione isoentropica si ricava la densità critica ρ^* dal valore del

numero di Mach locale e della densità locale:

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{1/(k-1)} \quad (3.2.2)$$

Se il moto è isentropico T^* , p^* e ρ^* hanno valore costante in ogni punto mentre se esso è adiabatico non reversibile la sola T^* è costante.

Le relazioni tra i valori dei parametri allo stato critico e allo stato di ristagno si ottengono dalle (1.5.4), (1.5.6) e (1.5.8) per $M = 1$ oppure dalle (1.6.8), (3.2.1) e (3.2.2) per $M = 0$:

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{k+1} \quad (3.2.3)$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)} \quad (3.2.4)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)} \quad (3.2.5)$$

e per l'aria ($k = 1,4$) diventano:

$$\frac{T^*}{T_0} = 0,8333 \quad (3.2.6)$$

$$\frac{p^*}{p_0} = 0,5283 \quad (3.2.7)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = 0,6339 \quad (3.2.8)$$

Per il moto a regime permanente di un fluido in un tubo di flusso è possibile pure ricavare una relazione tra il numero di Mach e l'area della sezione trasversale espressa adimensionalmente. Ciò implica la scelta dell'area di riferimento il cui valore A^* , relativo allo stato critico $M = 1$, è costante per ogni moto isentropico. Dall'equazione di continuità si ha:

$$A u \rho = A^* u^* \rho^* = A^* c^* \rho^* \quad (CONTINUITÀ)$$

da cui:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{c^*}{u} \frac{\rho^*}{\rho} = \frac{1}{M} \frac{\rho^*}{\rho}$$

e per le (1.6.11) e (3.2.2):

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{1/2} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{1/(k-1)}$$

cioè:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (3.2.9)$$

I valori del rapporto $\frac{A}{A^*}$ sono tabulati in Appendice (A1, A2, A3) e diagrammati in fig. 3.2.1 in funzione del numero di Mach per differenti valori di k ; si vede che il valore di k influenza in modo determinante il rapporto $\frac{A}{A^*}$ solo ad elevati numeri di Mach. Le curve presentano un minimo in corrispondenza alla sezione $A = A^*$ in cui $M = 1$; per ogni altro valore del rapporto $\frac{A}{A^*} > 1$ si hanno due valori di M : uno per il regime di moto subsonico ed uno per regime di moto supersonico. In accordo con quanto dedotto dall'equazione

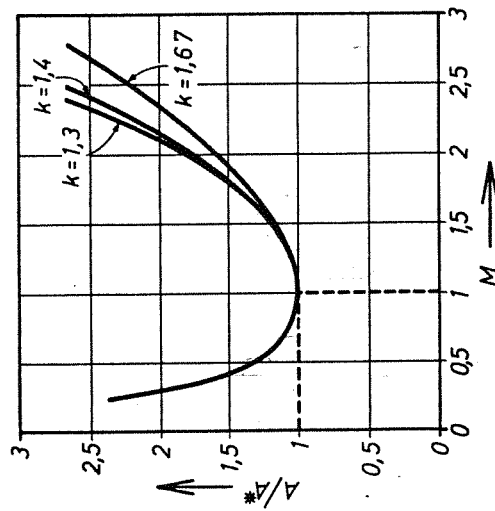


Fig. 3.2.1. - Rapporto $\frac{A}{A^*}$ in funzione del numero di Mach per il moto isentropico di gas ideali a differenti valori di k .

di Hugoniot si ha che nel moto isentropico in un condotto a sezione variabile per aumentare il numero di Mach l'area della sezione trasversale deve diminuire (nel senso del deflusso) a velocità subsoniche ed aumentare a velocità supersoniche (e viceversa per diminuire il numero di Mach).

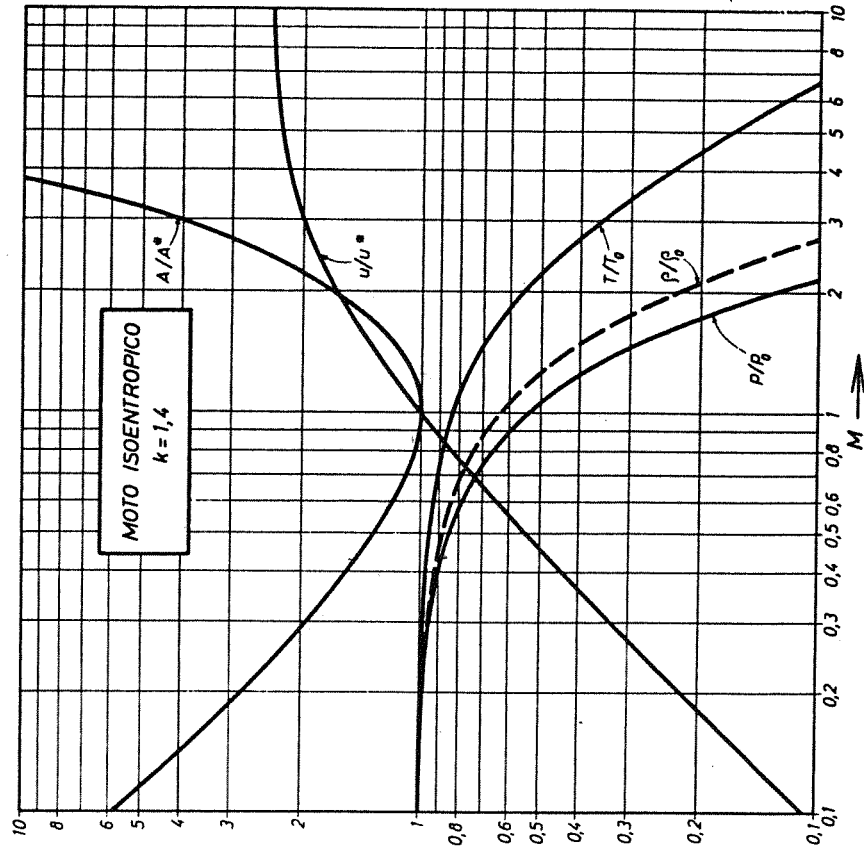


Fig. 3.2.2. - Funzioni del moto isentropico e delle proprietà di ristagno per un gas ideale con $k = 1,4$.

Un diagramma riassuntivo dei valori dei rapporti $\frac{A}{A^*}$, $\frac{u}{u^*}$, $\frac{p}{p_0}$, $\frac{T}{T_0}$ e $\frac{\rho}{\rho_0}$ in funzione del numero di Mach è dato in fig. 3.2.2 per un gas ideale con $k = 1,4$.

PROBLEMA 3.2.1

Un gas a comportamento ideale ($k = 1,4$) fluisce isentropicamente in un condotto. In un dato punto l'area della sezione trasversale è di 100 cm^2 ed il corrispondente numero di Mach è $M_1 = 0,5$. Determinare:

- l'area della sezione trasversale del condotto nella quale il numero di Mach è uguale a 2;*
- il numero di Mach in due sezioni trasversali la cui area è di $149,64 \text{ cm}^2$ e di 70 cm^2 rispettivamente.*

Dalla tabella A2 dell'Appendice si ottiene in corrispondenza a $M_1 = 0,5$:

$$\frac{A_1}{A_1^*} = 1,34$$

da cui:

$$A_1^* = \frac{A_1}{1,34} = 74,638 \text{ cm}^2.$$

- a) In corrispondenza a $M_2 = 2$ si ha:

$$\frac{A_2}{A_2^*} = 1,687$$

e poiché il moto è isoentropico $A_2^* = A_1^* = A^*$:

$$A_2 = A^* \cdot 1,687 = 125,95 \text{ cm}^2.$$

- b) Ancora dalla tabella A2, essendo:

$$A_2 = 149,64$$

e quindi:

$$\frac{A_2}{A_2^*} = 2,005$$

si ottengono in corrispondenza due valori di M :

$$M_2 = 2,2$$

$$M_2 = 0,305.$$

Se non si hanno altre informazioni entrambe le soluzioni sono possibili. È chiaro che se $M_2 = 2,2$ è necessario che nel condotto esista un'area di gola eguale ad A^* .

Invece per $A_2 = 70 \text{ cm}^2$ risulta:

$$\frac{A_2}{A_2^*} = \frac{70}{74,638} < 1,$$

ma nel moto isoentropico il rapporto $\frac{A}{A^*}$ deve essere maggiore dell'unità e quindi in questo caso nessuna soluzione è possibile.

3.3 MASSIMA PORTATA SPECIFICA.

L'equazione di continuità espressa mediante i parametri allo stato critico, che conservano valore costante in ogni moto isentropico, si può scrivere nella forma:

$$W = u \rho A = u^* \rho^* A^* = \sqrt{k R T^*} \rho^* A^* \quad (3.3.1)$$

da cui per la (3.2.3), la (3.2.5) e l'equazione di stato di un gas ideale si ottiene:

$$\frac{W}{A} = \sqrt{k} \frac{p_0}{R \sqrt{T_0}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \frac{1}{\left(\frac{A}{A^*} \right)} \quad (3.3.2)$$

e per la (3.2.9):

$$\frac{W}{A} = \sqrt{k} \frac{p_0}{R \sqrt{T_0}} \frac{M}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \quad (3.3.3)$$

relazione che esprime la portata specifica in funzione dello stato di ristagno e del numero di Mach. I risultati di prove sperimentali, ad esempio su compressori e turbine, possono essere così generalizzati a condizioni di temperatura e pressione differenti da quelle di prova se si assume come variabile del moto il gruppo adimensionale $\frac{W}{A} \sqrt{R T_0} \frac{1}{p_0}$.

La condizione per cui la portata specifica risulta massima si ottiene eguagliando a zero la de-

rivata $d\left(\frac{W}{A}\right)/dM$. Direttamente dalla (3.3.2) risulta l'espressione di $\left(\frac{W}{A}\right)_{\max}$ in corrispondenza al valore $A = A^*$, cioè $M = 1$, che rende minimo il rapporto $\frac{A}{A^*}$:

$$\left(\frac{W}{A}\right)_{\max} = \frac{W}{A^*} = \sqrt{k} \frac{p_0}{R \sqrt{T_0}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (3.3.4)$$

La massima portata specifica si ha nella sezione di area minima A^* nella quale il numero di Mach è unitario; essa dipende, per un fissato stato di ristagno, solo dal tipo di gas. Ciò per una data portata esiste una sezione di area minima A^* attraverso la quale il deflusso può essere isentropico, con stato di ristagno fissato.

Tramite la (1.5.6) la portata di massa per unità di area viene espressa in funzione della pressione locale in ogni sezione del moto dall'equazione di St. Venant-Wantzel:

$$\frac{W}{A} = \sqrt{2} \frac{k}{k-1} p_0 \rho_0 \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{2/k} - \left(\frac{p}{p_0} \right) \right]^{\frac{k+1}{k}}$$

La rappresentazione analitica della (3.3.5) mostra che la portata attraverso una fissata area di passaggio si annulla quando la pressione locale p

viene ridotta a zero. Questo risultato, fisicamente inconcepibile, pone il problema dei limiti di validità della (3.3.5) nelle sue applicazioni. Ad esempio in questo caso è lecito porre la condizione che la pressione statica in una data sezione trasversale possa essere ridotta isentropicamente a zero?

Il problema sarà trattato nel prossimo paragrafo che descrive le caratteristiche del moto in un ugello convergente di fissata geometria per diverse condizioni di prova.

PROBLEMA 3.3.1

In una galleria a vento supersonica fluisce una portata d'aria (a comportamento ideale, $k = 1,4$) proveniente da un serbatoio alla pressione di 1,5 ata e alla temperatura di 25 °C come illustrato in fig. 3.3.1 P.

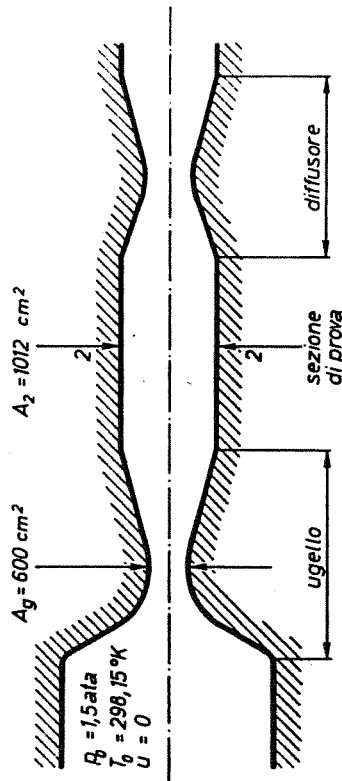


Fig. 3.3.1 P. - Problema 3.3.1.

Determinare la portata d'aria fluente e il suo stato nella sezione di gola dell'ugello, la cui area è di 600 cm², e in quella di prova ove il numero di Mach vale $M = 2$; determinare inoltre l'area della sezione di prova.

Poiché l'ugello che alimenta il condotto di prova è supersonico la massima portata specifica si ha in corrispondenza alla sezione di gola $A_g = A^*$; il valore della portata risulta perciò dato dalla (3.3.4):

$$W = A_g \sqrt{k} \cdot \frac{p_0}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{T_0}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} = 20,65 \text{ kg/sec} \quad ***$$

Determinato:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = 1,718 \text{ kg/m}^3$$

dalle funzioni delle proprietà di ristagno (tabella A2) si ricavano le proprietà del fluido in corrispondenza a $M = 1$ e $M = 2$.

Per $M = 1$ si ricava:

$$\frac{T^*}{T_0} = 0,8333 \quad \text{da cui} \quad T^* = 248,44 \text{ °K} \quad ***$$

$$\frac{p^*}{p_0} = 0,52828 \quad \rightarrow \quad p^* = 0,79 \text{ ata} \quad ***$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = 0,63394 \quad \rightarrow \quad \rho^* = 1,089 \text{ kg/m}^3 \quad ***$$

e analogamente in corrispondenza a $M = 2$:

$$T_2 = T_0 \cdot 0,55556 = 165,64 \text{ } ^\circ\text{K} \quad ***$$

$$p_2 = p_0 \cdot 0,1278 = 0,19 \text{ ata} \quad ***$$

$$\rho_2 = \rho_0 \cdot 0,23005 = 0,395 \text{ kg/m}^3 \quad ***$$

$$A_2 = A_g \cdot 1,6875 = 1012,5 \text{ cm}^2. \quad ***$$

3.4 UGELLO CONVERGENTE.

Il termine ugello fa sempre riferimento ad un condotto che accelera il moto indipendentemente dalla forma geometrica dello stesso. Se si tratta di un semplice convergente il moto risulta ovunque subsonico e perciò in assenza di onde d'urto.

Si consideri una sezione del condotto avente una area di dimensioni tali che la velocità locale del fluido possa ivi essere assunta eguale a zero. Anche se tale sezione non esiste nei casi reali ad essa si può sempre fare riferimento in quanto note le proprietà locali (p, T, u) di uno stato del moto sono pure determinate quelle dello stato di ristagno (p_0, T_0) ad esso associato.

La fig. 3.4.1 rappresenta un ugello convergente che espande isentropicamente un gas di note proprietà di ristagno, p_0 e T_0 (costanti), in un ambiente la cui pressione p_s può essere variata con continuità dal valore p_0 a zero.

Le figure 3.4.1, 3.4.2 e 3.4.3 illustrano rispettivamente gli effetti delle variazioni di p_s nella distribuzione delle pressioni attraverso l'ugello, sul-

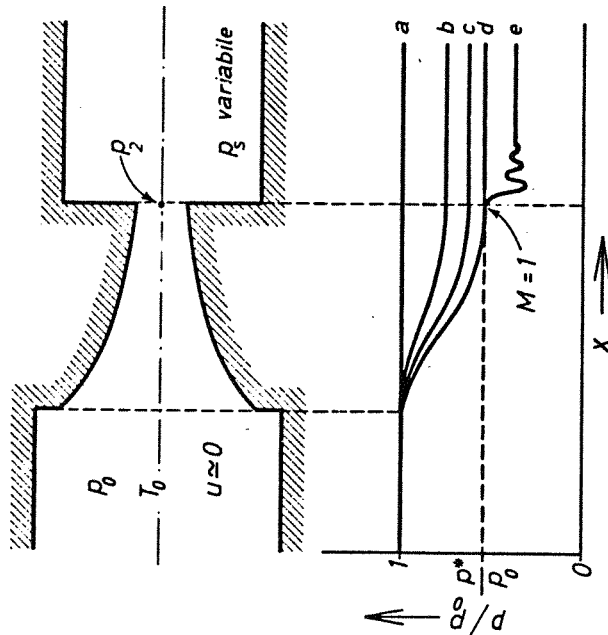


Fig. 3.4.1. - Ugello convergente nel quale un gas si espande isentropicamente in diverse condizioni operative.

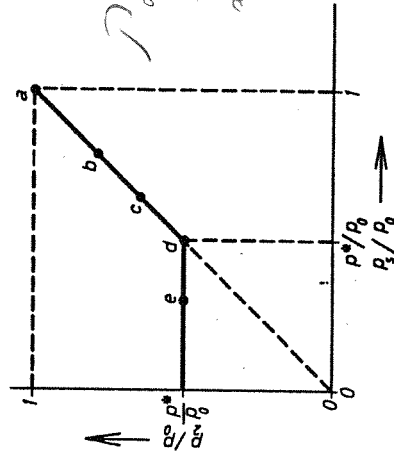


Fig. 3.4.2. - Effetto della variazione della pressione di scarico p_s sulla pressione nella sezione di uscita p_2 per l'ugello convergente di fig. 3.4.1.

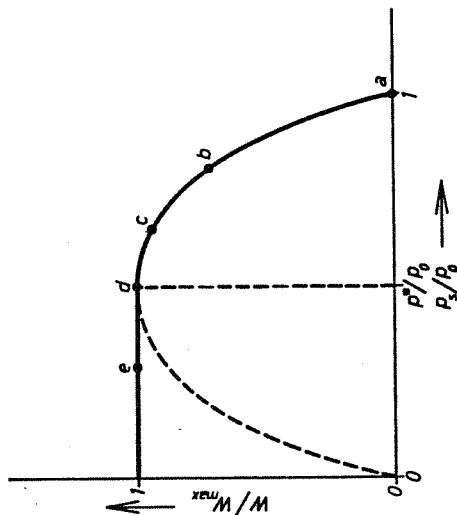


Fig. 3.4.3. - Variazione della portata di massa W in funzione della pressione di scarico p_s per l'ugello convergente di fig. 3.4.1.

la variazione della pressione e della portata nella sezione di uscita.

Se $p_s = p_0$ la pressione è costante attraverso l'ugello e non si ha deflusso (caso indicato dalla lettera a).

Se la pressione a valle p_s è ridotta ad un valore di poco inferiore a p_0 (caso b) si ha una diminuzione della pressione locale p lungo il convergente e poiché il moto è subsonico la pressione p_2 nella sezione di uscita è praticamente eguale a p_s .

La velocità in questa sezione per la (1.6.1) risulta:

$$u_2 = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \quad (3.4.1)$$

$$\frac{2 C^2 v_0^2}{k-1} \frac{1}{k} \frac{1}{p_0^2} \frac{1}{20k}$$

e la portata specifica per la (3.3.5) risulta:

$$\frac{W}{A_2} = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_0 \rho_0 \left[\left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \quad (3.4.2)$$

Una ulteriore riduzione della pressione di scarico p_s (caso c) porta ad un aumento della velocità u_2 , della portata W ed una diversa distribuzione di pressione nell'ugello senza cambiare le caratteristiche del moto.

Il caso d si presenta quando:

$$p_s = p^* = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} p_0 \quad (3.4.3)$$

La velocità locale del fluido nella sezione di uscita eguaglia la velocità locale del suono:

$$u_2 = c^* = \sqrt{k p^* v^*} \quad (3.4.4)$$

e la portata specifica raggiunge il massimo valore:

$$\left(\frac{W}{A_2} \right)_{\max} = \frac{W_{\max}}{A^*} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (3.4.5)$$

Se ora la pressione p_s viene ulteriormente diminuita (caso e) la distribuzione delle pressioni nell'ugello e la pressione nella sezione di uscita rimangono fisse ai valori del caso d; la pressione p_2 non può diventare minore di p^* perché in tal caso si dovrebbero realizzare velocità supersoni-

che non compatibili per il moto isentropico in un ugello convergente.

Viene così chiarito il quesito, posto alla fine del paragrafo precedente, sulla possibilità di ridurre isentropicamente a zero la pressione locale statica di uscita in un ugello convergente e di ottenere una portata nulla. Se l'area A e la pressione p dell'equazione (3.3.5) sono considerate rispettivamente come A_2 e p_2 nell'ugello, la presente discussione mostra che p non può tendere a zero (anche se $p_s \rightarrow 0$) in quanto non può risultare minore di p^* che per una fissata pressione di ristagno (finita e non nulla) ha un valore costante diverso da zero.

Quando la pressione p_s viene resa minore di p^* (caso e) la pressione nella sezione di uscita dell'ugello rimane eguale a p^* e solo a valle si ha l'adeguamento esterno di pressione (onde di espansione). Anche la portata rimane "bloccata" al suo valore massimo; il tratto di curva tratteggiato dO di fig. 3.4.3 ($p_s < p^*$) non corrisponde quindi ad alcuna situazione reale di deflusso e deve essere sostituito da quello orizzontale dI luogo dei punti rappresentativi stati di portata massima.

3.5 UGELLO CONVERGENTE-DIVERGENTE.

Una discussione simile a quella del paragrafo precedente permette di determinare le caratteristiche del moto in ogni sezione di un ugello convergente-divergente di fissata geometria e in di-

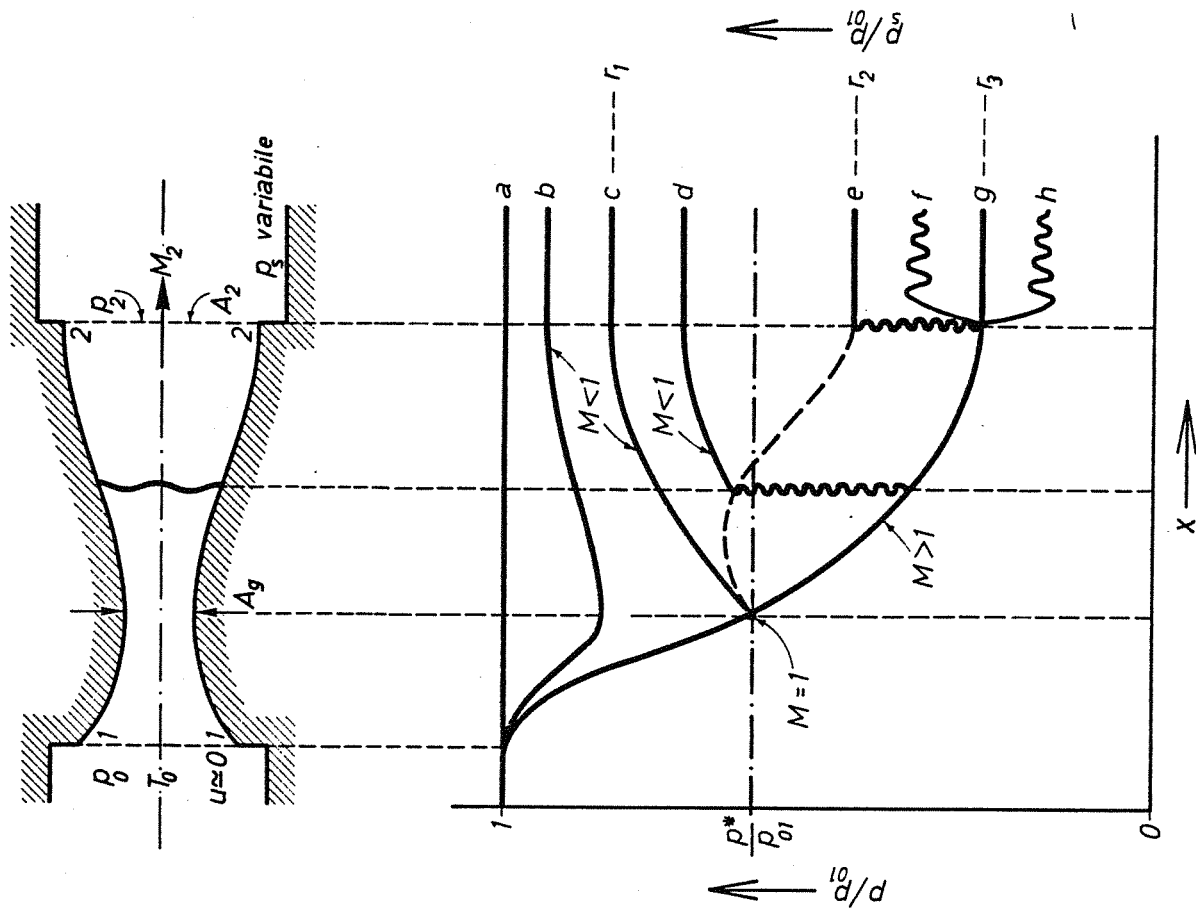


Fig. 3.5.1. - Ugello convergente-divergente nel quale un gas si espande isentropicamente (con eventuale formazione di onde d'urto normali) in diverse condizioni operative.

verse condizioni operative.

Lo stato di ristagno all'imbocco (p_{01} , T_0) (¹) è supposto noto e costante mentre la pressione di scarico p_s è ridotta con continuità dal valore p_{01} a valori via via decrescenti; cfr. la fig. 3.5.1. Fino a che la pressione nella sezione di gola risulta maggiore di quella critica $p_g > p^*$ la velocità del fluido è ovunque minore di quella del suono ed il moto è completamente subsonico (caso b); il condotto si comporta più propriamente come un tubo di Venturi. Nella sezione di uscita A_2 la pressione è eguale a quella imposta $p_2 = p_s$ (fig. 3.5.2) e la portata espressa tramite la (3.3.5) risulta funzione del rapporto di pressione $\frac{p_2}{p_{01}} = \frac{p_s}{p_{01}}$ (fig. 3.5.3).

Quando $p_g = p^*$ (caso c) nella sezione di gola si raggiunge la velocità del suono, il numero di Mach è unitario e la portata risulta massima:

$$\left(\frac{W}{A_g} \right)_{\max} = \frac{W}{A^*} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (3.5.1)$$

Il moto nel convergente è ora completamente definito mentre il moto nel divergente dipende dalle condizioni imposte a valle.

Nel moto isoentropico dal confronto della (3.5.1) e (3.3.5) si ottiene:

(¹) Si adotta la scrittura p_{01} per indicare la pressione di ristagno in quanto nel moto supersonico diventa possibile la presenza di un'onda d'urto che è accompagnata da una diminuzione della pressione di ristagno.

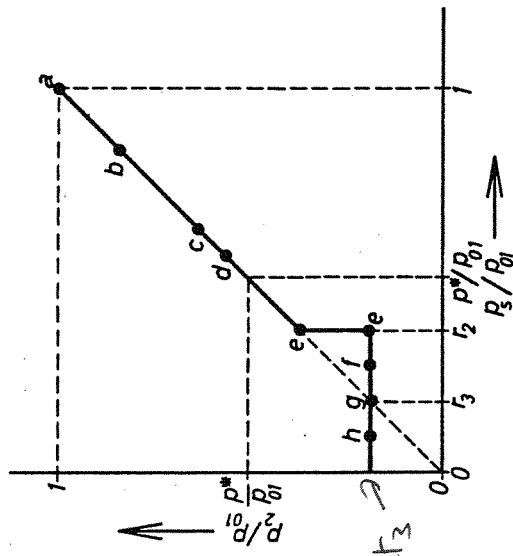


Fig. 3.5.2. - Effetto della variazione della pressione di scarico p_s sulla pressione nella sezione d'uscita p_2 per l'ugello convergente-divergente di fig. 3.5.1.

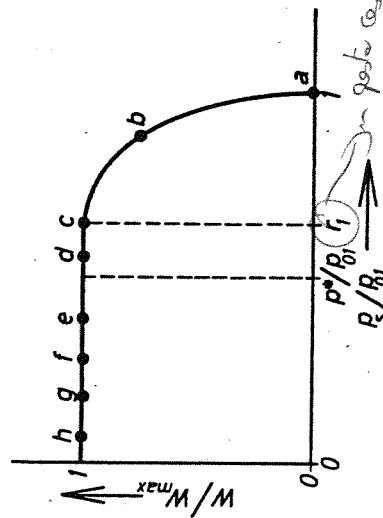
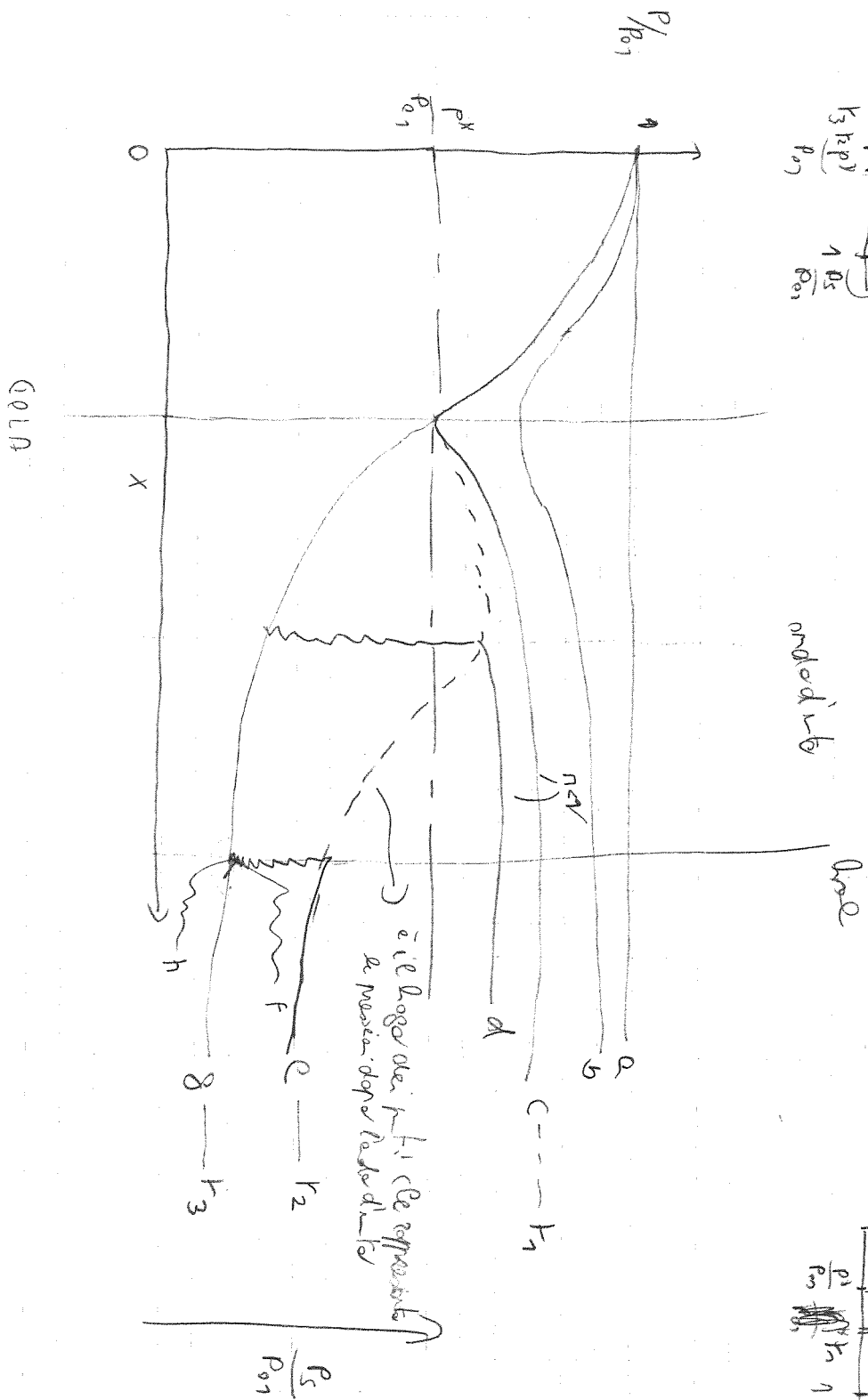
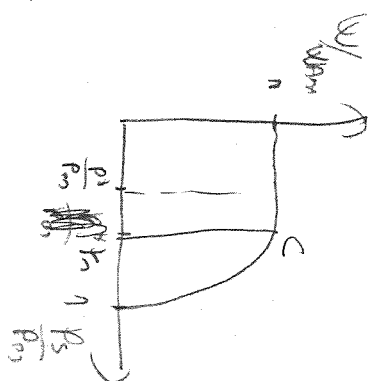
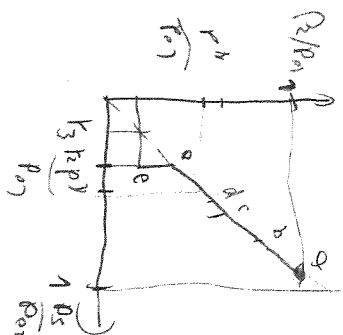


Fig. 3.5.3. - Variazione della portata di massa W in funzione della pressione di scarico p_s per l'ugello convergente-divergente di fig. 3.5.1.



GOLD

tutte queste cose che io
 ho visto del rapporto $\frac{p_s}{p_1}$ trova $A=A^*$
 $\Rightarrow \frac{p_1}{p_s} > \frac{p^*}{p_1}$ $M_2 < 1$
 $\frac{p_3}{p_2} < \frac{p^*}{p_2}$ $M_2 < 1$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{A}{A_g} = \frac{1}{\left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \cdot \frac{k-1}{2}} \cdot \left(\frac{p}{p_01} \right)^{\frac{k+1}{k}} - \left(\frac{p}{p_01} \right)^{\frac{k+1}{k}}$$

espressione che assieme alla (3.2.9) dà il rapporto $\frac{A}{A^*}$ in funzione di $\frac{p}{p_01}$ e del numero di Mach.

Ad ogni valore di $\frac{A}{A_g} = \frac{A}{A^*}$ nella sezione del divergente corrispondono due soluzioni isentropiche, una di moto subsonico ed una di moto supersonico. Le curve denotate con le lettere c, g mostrano queste due soluzioni isentropiche; in particolare nella sezione di uscita A_2 i rapporti di pressione $\frac{p_2}{p_01}$ (analoga osservazione per i numeri di Mach) assumono valori ben determinati, indicati in fig. 3.5.1 con i simboli r_1 ed r_3 e rispettivamente maggiore ($r_1 > \frac{p^*}{p_01}$, $M_2 < 1$) e minore ($r_3 < \frac{p^*}{p_01}$, $M_2 > 1$) del rapporto $\frac{p^*}{p_01} = \frac{p_g}{p_01}$.

Quando $\frac{p_s}{p_01}$ è compreso tra r_1 ed r_3 si ha una onda d'urto normale in una sezione del divergente (caso d) o onde di compressione oblique esternamente all'ugello (caso f).

Il confine tra queste due situazioni di moto è determinato dal rapporto di pressioni r_2 a cui corrisponde un'onda d'urto normale nella sezione di

uscita del divergente (caso e). Il rapporto tra le pressioni a monte e a valle dell'onda d'urto, per la (2.3.10), risulta allora:

$$\frac{r_2}{r_3} = \frac{2k}{k+1} M_{(r_3)}^2 - \frac{k-1}{k+1} \quad (3.5.3)$$

dove $M_{(r_3)}$ è il numero di Mach a monte dell'onda d'urto, corrispondente al cosiddetto rapporto delle "pressioni di progetto", r_3 per l'ugello convergente-divergente (supersonico). I valori di r_1 ed r_3 subsonico e supersonico, corrispondenti a $\frac{A}{A^*} = \frac{A_2}{A_g}$ sono dati dalle funzioni per il moto isentropico (tabelle A1, A2, A3).

La sezione trasversale del divergente in cui si forma l'onda d'urto dipende dal valore della pressione imposta a valle p_s . Per il caso d di fig. 3.5.1 il moto segue un tratto della curva isentropica a regime supersonico ma in una certa posizione del divergente il processo d'urto (non isentropico) riduce il moto a subsonico e la rimanente lunghezza agisce come un diffusore subsonico, nel quale il moto si può considerare ancora isentropico, ma con valore minore della pressione di ristagno p_0 .

Al diminuire della pressione a valle p_s l'onda d'urto si allontana dalla sezione di gola spostandosi verso l'uscita dell'ugello; nel caso limite $\frac{p_s}{p_01} = r_2$ l'onda d'urto si forma nella sezione di uscita (caso e).

	$\gamma_1 < \frac{p_s}{p_{01}} < 1$	$\gamma_2 < \frac{p_s}{p_{01}} < \gamma_1$	$\gamma_3 < \frac{p_s}{p_{01}} < \gamma_2$	$\frac{p_s}{p_{01}} < \gamma_3$
$\frac{p_g}{p_{01}}$	$\left\{ \begin{array}{l} < \frac{p_s}{p_{01}} \\ > \frac{p^*}{p_{01}} \end{array} \right.$	$\frac{p^*}{p_{01}}$	$\frac{p^*}{p_{01}}$	$\frac{p^*}{p_{01}}$
$\frac{p_2}{p_{01}}$	$\frac{p_s}{p_{01}}$	$\frac{p_s}{p_{01}}$	γ_3	γ_3
M_2	$f\left(\frac{p_s}{p_{01}}\right) < 1$	$f\left(\frac{p_s}{p_{01}}\right) < 1$	> 1	> 1
$\frac{W}{W_{\max}}$	$f\left(\frac{p_s}{p_{01}}\right) < 1$	1	1	1
	moto subsonico isentroico	onda d'urto normale nel divergente	moto supersonico isentropico nell'ugello con onde esterne di compressione (fluido sopraespanso)	espansione (fluido sottoespanso)

TABELLA 3.5.1

Modi di funzionamento in un ugello convergente-divergente di fissata geometria ed assegnate condizioni di ristagno a monte

Il luogo dei valori $\frac{p}{p_{01}}$ a valle dell'onda d'urto è rappresentato dalla linea tratteggiata di fig. 3.5.1.

Una ulteriore riduzione di p_s , $\gamma_3 < \frac{p_s}{p_{01}}$, causa onde di compressione oblique oltre la sezione di uscita (caso f). Il deflusso nel divergente è completamente supersonico e il sistema di onde oblique di compressione esterna non può essere studiato con l'analisi monodimensionale.

Per rapporti di pressione $\frac{p_s}{p_{01}} < \gamma_3$ le condizioni nella sezione di uscita dell'ugello rimangono invariate e come per l'ugello convergente l'adeguamento di pressione avviene mediante onde esterne di espansione (caso h).

Un quadro riassuntivo dei modi di funzionamento di un ugello convergente-divergente è presentato in tab. 3.5.1.

* vedere anche velocità e il
 p.d. di p. e usare la formula
 da dare da $h \sqrt{2} \cdot h_0$ (pelle onde
 a MACCINIO) oppure $U \sqrt{2} \cdot h_0$

PROBLEMA 3.5.1.

Una portata $W = 0,5$ kg/sec d'aria (supposta a comportamento ideale e $k = 1,4$ (costante)), inizialmente alla pressione di ristagno $p_{01} = 8$ ata ed alla temperatura di ristagno $t_0 = 30^\circ \text{C}$, fluisce da un ugello convergente-divergente supersonico avente le aree della sezione di uscita e di gola nel rapporto $\frac{A_2}{A_g} = 2,4$. Supposta uniforme la divergenza

della sezione del divergente di lunghezza l , determinare:

- l'area della sezione di gola, della sezione di uscita e la corrispondente pressione p_2 di progetto;
- la pressione di scarico p_s quando un'onda d'urto normale si forma nella sezione di uscita;
- la sezione nella quale si forma un'onda d'urto normale quando la pressione di scarico vale $p_s = 4$ ata.

a) Dalle relazioni (3.2.6), (3.2.7) e (3.2.8) si ha:

$$T^* = 0,8333 \cdot T_0 = 252,62 \text{ } ^\circ\text{K}$$

$$p^* = 0,5283 \cdot p_{01} = 4,226 \text{ ata}$$

$$\rho^* = 0,6339 \cdot \rho_{01} = 0,6339 \cdot p_{01}/RT_0 = 5,715 \text{ kg/m}^3$$

da cui:

$$u^* = c^* = \sqrt{kRT^*} = 318,65 \text{ m/sec}$$

$$A_g = A^* = \frac{W}{\rho^* u^*} = 2,74 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 2,4 \text{ } A_g = 6,59 \text{ cm}^2.$$

Dalla tabella A2 (in Appendice) delle funzioni del moto isoentropico in corrispondenza a $\frac{A_2}{A_g} = \frac{A_2}{A^*}$ si ricavano i due rapporti di pressione:

$$\frac{p_2}{p_{01}} = \tau_1 = 0,957$$

$$W = 0,5 \text{ kg/s} \quad k = 1,5 \quad p_{01} = 8 \text{ ata}$$

$$T_0 = 30^\circ\text{C} \quad \frac{A_2}{A_g} = 2,4$$

$$\frac{p_2}{p_{01}} = \tau_3 = 0,068$$

ma poiché l'ugello è stato progettato per condizioni di moto supersonico solo la seconda soluzione:

$$p_2 = 0,068 \cdot p_{01} = 0,544 \text{ ata} \quad ***$$

a cui corrisponde:

$$M_2 = 2,39$$

risulta accettabile.

b) Cfr. fig. 3.5.1 P(b). Il moto è isoentropico fino alla sezione di uscita ove si ha:

$$M_2 = M_x = 2,39.$$

(Si indicano con i pedici x ed y i valori delle grandezze rispettivamente a monte ed a valle dell'onda d'urto).

Dalla tabella B2 relativa alle funzioni dell'onda d'urto normale ($k = 1,4$) si ha:

$$M_y = 0,524$$

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{p_s}{p_2} = 6,497$$

da cui:

$$p_s = 6,497 \cdot p_2 = 3,534 \text{ ata} \quad ***$$

c) Cfr. fig. 3.5.2 P(c).

In questo caso il rapporto $\frac{p_s}{p_{01}} = \frac{4}{8} = 0,5$ è compreso tra τ_1 ed τ_2 :

$$\frac{0,3534}{8} = 0,441 = \tau_2 < 0,5 < \tau_1 = 0,957.$$

Si ha quindi un'onda d'urto in una sezione del divergente ad una distanza l' dalla sezione di gola che si ottiene dalla relazione:

$$\frac{l'}{l} = \frac{\frac{d'}{d_g} - 1}{\frac{d_2}{d_g} - 1} = \frac{\sqrt{\frac{A'}{A_g}} - 1}{\sqrt{\frac{A_2}{A_g}} - 1} \quad (c)$$

*applicato
rapporto
gola*

Poiché il moto a monte ed a valle dell'onda d'urto è isoentropico e la portata W è "bloccata" al valore massimo corrispondente al valore unitario del numero di Mach nella sezione di gola, si può scrivere:

$$\frac{W}{A_g} = \frac{W}{A^*} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_{01}}{\sqrt{T_0}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$\frac{W}{A_2^*} = \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p_{02}}{\sqrt{T_0}} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

*pressione totale dopo
onda d'urto*

da cui:

$$A_2^* p_{02} = A_g p_{01}$$

e quindi:

$$\frac{A_2 p_2}{A_2^* p_{02}} = \frac{A_2 p_s}{A_g p_{01}} = 2,4 \cdot 0,5 = 1,2$$

*2,4
0,5*

e per la tabella A2:

$$M_2 = 0,472$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_2 p_2}{A_2^* p_{02}} &= \frac{A_2 p_s}{A_g p_{01}} \\ \frac{p_2}{p_{02}} &= \frac{p_s}{p_{01}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{tabella M.}$$

$$\frac{p_2}{p_{02}} = 0,8585.$$

Si può ora calcolare il rapporto tra le pressioni di ristagno a valle ed a monte dell'onda d'urto:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_{01}} \frac{p_{01}}{p_2} = \frac{0,5}{0,8585} = 0,5824$$

ps

e tramite la tabella B2 dell'onda d'urto normale:

$$M_x = 2,302$$

$$M_y = 0,534.$$

Il moto è isoentropico fino alla sezione dell'onda d'urto e perciò dalla tabella A2 in corrispondenza a M_x si ottiene:

$$\frac{A'}{A^*} = \frac{A'}{A_g} = 2,2$$

*dalla M
trovo il rapporto
tra le aree*

che sostituita nella (c) dà:

$$\frac{l'}{l} = \frac{\sqrt{2,2-1}}{\sqrt{2,4-1}} = 0,88$$

cioè:

$$l' = 0,88 l.$$

3.6 MOTO ADIABATICO CON ATTRITO IN UN UGELLO. RENDIMENTO.

Il processo di espansione in un ugello, anche se può essere considerato adiabatico per quanto riguarda gli scambi di calore con l'esterno, non può prescindere dal fenomeno dell'attrito il cui effetto è quello di aumentare, rispetto all'equivalente trasformazione isentropica fino alla stessa pressione finale, la temperatura ed il volume specifico allo sbocco se si tratta di un gas o di un vapore surriscaldato, o di accrescere il titolo finale nel caso di vapore saturo umido con conseguente diminuzione della velocità teorica di efflusso.

Si definisce usualmente il *rendimento isentropico* η_u dell'ugello come rapporto tra il valore dell'energia cinetica $u_2^2/2$ effettivamente raggiunta dall'unità di massa del fluido nella sezione di uscita del condotto ed il valore $(u_2^2/2)_s$ che si realizzerebbe se l'espansione adiabatica fosse reversibile, cioè isentropica, a partire dallo stesso stato iniziale e fino alla stessa pressione finale.

Indicato con 1 lo stato iniziale del fluido (posto ivi a velocità trascurabile, $u_1 \approx 0$ e $p_1 = p_{01}$) e 2 lo stato finale, dall'espressione (1.3.4), trascurando la variazione di energia potenziale, si ottiene:

$$\eta_u = \frac{u_2^2/2}{(u_2^2/2)_s} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2s}} \quad (3.6.1)$$

dove il pedice s indica che lo stato finale è raggiunto isentropicamente.

Nel diagramma di fig. 3.6.1 sono riportati qualitativamente gli andamenti dell'espansione adiabatica nel caso reale (linea a tratto) e nel caso ideale di espansione isentropica (linea continua).

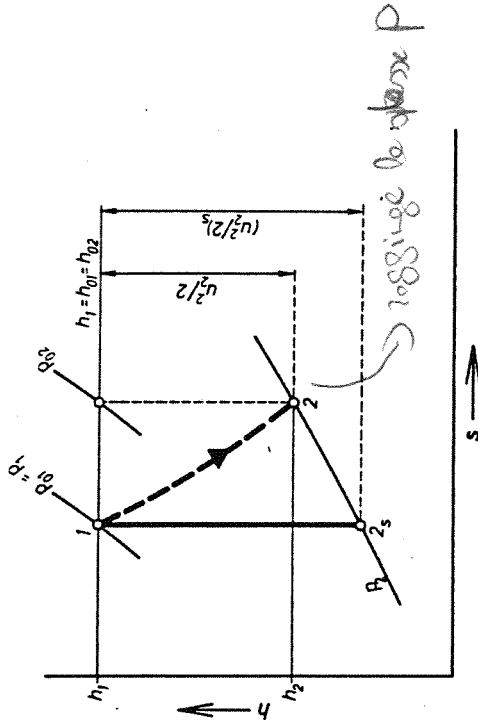


Fig. 3.6.1. - Espansione adiabatica in un ugello; 1-2: trasformazione reale non reversibile; 1-2_s: trasformazione ideale isentropica.

La velocità reale di efflusso allo sbocco dell'ugello si può ricavare dalla (3.6.1), che per la (1.3.2) si scrive nella forma:

$$u_2 = \sqrt{\eta_u} \sqrt{2 \int_{2s}^1 v \cdot dp} = \phi \sqrt{2 \int_{2s}^1 v \cdot dp} \quad (3.6.2)$$

dove $\phi = \sqrt{\eta_u}$, minore dell'unità, è chiamato *coefficiente di velocità* ed esprime il rapporto tra la velocità reale di efflusso u_2 e quella ideale $(u_2)_s$.

Il valore di u_2 si può allora ottenere risolvendo l'integrale a secondo membro della (3.6.2) median-
te l'impiego dell'equazione politropica $pv^n = \text{cost.}$:

$$u_2 = \varphi \sqrt{\frac{2n}{n-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right]} \quad (3.6.3)$$

ed assegnando all'esponente n il valore:

$n = k$ se si tratta di un gas a comportamento ideale;

oppure i valori empirici:

$n = 1,3$ se il fluido è vapore d'acqua surriscaldato;

$n = 1,035 + 0,1 \cdot X$ se il fluido è vapore d'acqua saturo umido a
titolo medio x .

Un metodo alternativo (più immediato quando si può disporre dei diagrammi termodinamici) per la valutazione della velocità di efflusso reale u_2 si ricava immediatamente dalla relazione (1.3.4):

$$u_2 = \sqrt{2(h_1 - h_2)}. \quad (3.6.4)$$

Questo metodo verrà illustrato in dettaglio nel Problema 3.6.1.

Il dimensionamento dell'ugello che, per l'assegna-
gnata portata di fluido, permette di realizzare la massima velocità possibile consentita dalle condizioni assegnate a monte e dalla pressione imposta a valle p_2 richiede dapprima la conoscenza del valore della pressione critica p^* .

Il valore della pressione critica p^* si può calcolare a mezzo dell'espressione:

$$p^* = p_{01} \left(\frac{2}{n+1} \right)^{\frac{n}{n-1}} \quad (3.6.5)$$

con i valori di n precisati più sopra. Nel caso il fluido non sia un gas ideale, l'espressione (3.6.5) con i relativi valori dell'esponente n deve essere riguardata come relazione empirica⁽¹⁾.

Se risulta $p_2 \geq p^*$ l'ugello sarà formato solo da un condotto convergente in quanto il moto non può che essere ovunque subsonico, raggiungendo al più la velocità sonica per $p_2 = p^*$.

Se $p_2 < p^*$ il condotto dovrà essere costituito da un convergente, che permette di ottenere $M = 1$ nella sezione di gola $A_g = A^*$, seguito da un divergente. La configurazione che ne risulta è quella ben nota dell'ugello di De Laval rappresentato in fig. 3.6.2 nella forma ad asse rettilineo, e che è anche di frequente applicazione con asse curvilineo nei distributori delle turbine a vapore.

Ugelli ad asse rettilineo realizzano usualmente un rendimento isoentropico compreso tra 0,94 e 0,99 mentre quelli ad asse curvilineo realizzano valori compresi tra 0,90 e 0,95.

La lunghezza del tratto tronco-conico divergente deve essere ridotta al fine di minimizzare le perdite dovute alle forze dissipative di attrito,

⁽¹⁾ Anche nel caso che il rendimento isoentropico dell'ugello non possa considerarsi unitario il valore della pressione critica p^* può venire calcolato tramite la relazione (3.6.5); l'irreversibilità dell'espansione è infatti quasi interamente localizzata nell'eventuale tratto divergente dell'ugello, ove il regime di moto è supersonico.

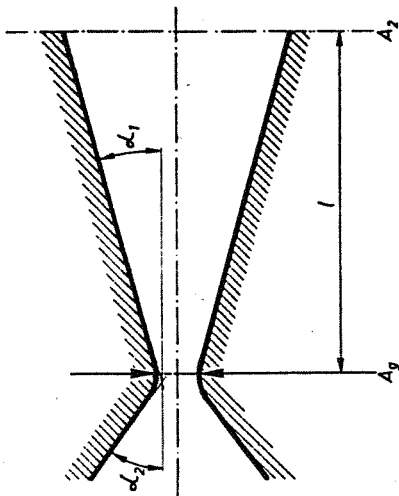


Fig. 3.6.2. - Dimensionamento di un ugello convergente-divergente.

compatibilmente però con la necessità di evitare distacchi di vena: negli ugelli ad asse rettilineo di comune impiego industriale il semiangolo al vertice di apertura α_1 non supera i 10° con valori preferiti compresi tra 5° e 8° . Una conicità variabile con angoli maggiorati in vicinanza della sezione di gola può essere adottata per evitare condotti troppo lunghi.

Il tratto convergente, sempre ben raccordato con l'ambiente a monte, deve essere molto corto per consentire al fluido un rapido incremento della velocità: si impiegano condotti conici con angolo al vertice $2\alpha_2 \approx 45^\circ$ (cfr. fig. 3.6.2).

PROBLEMA 3.6.1

Dimensionare un ugello di De Laval ad asse rettilineo per una portata di $W = 9500 \text{ kg/h}$ di vapor d'acqua surriscaldato inizialmente alla pres-

sione $p_1 = 30 \text{ ata}$ e temperatura $t_1 = 400^\circ \text{C}$ quando la pressione finale è $p_2 = 1 \text{ ata}$. Si assuma trascurabile la velocità all'ingresso ed isentropica l'espansione.

Determinare inoltre la velocità di efflusso se il rendimento isoentropico dell'ugello, anziché unitario, risultasse $\eta_u = 0,9$.

La fig. 3.6.1 P illustra il processo nel diagramma $h-s$.

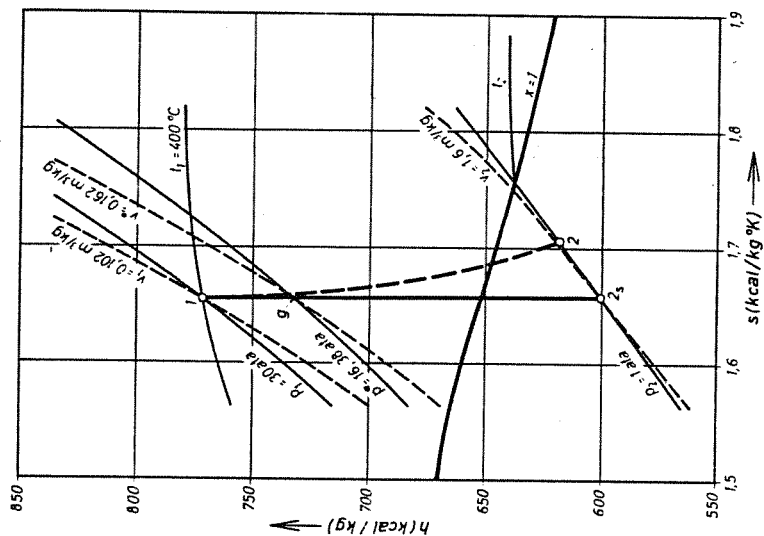


Fig. 3.6.1.P. - Problema 3.6.1.

Si determina dapprima mediante la (3.6.5) il valore della pressione critica p^* assumendo come esponente della trasformazione $n = 1,3$:

$$p^* = p_1 \left(\frac{2}{n+1} \right)^{\frac{n}{n-1}} = 30 \cdot 0,546 = 16,38 \text{ ata.}$$

Poiché $p_2 < p^*$ il condotto deve essere costituito da un convergente-divergente al fine di realizzare la massima velocità possibile consentita dalle condizioni operative fissate.

Con l'ausilio del diagramma $h-s$ si ricava:

$$\begin{aligned} v^* &= 0,162 \text{ m}^3/\text{kg}; \\ h_1 &= 772 \text{ kcal/kg}; \\ h_g &= 730 \text{ kcal/kg}. \end{aligned}$$

La velocità critica del suono nella sezione di gola risulta:

$$u^* = c^* = \sqrt{2(h_1 - h_g)} = \sqrt{2 \cdot 4186 (772 - 730)} = 593 \text{ m/sec}$$

e quindi dall'equazione di continuità si può calcolare l'area della sezione medesima:

$$A_g = A^* = \frac{Wv^*}{c^*} = 7,2 \text{ cm}^2.$$

Dal diagramma $h-s$ si ha ancora:

$$v_{2s} = 1,6 \text{ m}^3/\text{kg}; \quad h_{2s} = 600 \text{ kcal/kg}$$

e quindi:

$$u_{2s} = \sqrt{2(h_1 - h_{2s})} = 1200 \text{ m/sec.}$$

L'area della sezione di uscita A_2 risulta allora:

$$A_2 = \frac{Wv_{2s}}{u_{2s}} = 35,2 \text{ cm}^2.$$

Si possono ora calcolare il diametro della sezione di gola d_g e della sezione terminale del divergente d_2 : risulta $d_2 = 6,7 \text{ cm}$ e $d_g = 3,0 \text{ cm}$; assunto un semiangolo di apertura $\alpha_1 = 7^\circ$ rimane anche determinata la lunghezza l del tratto divergente:

$$l = \frac{d_2 - d_g}{2 \cdot \text{tg } \alpha_1} = \frac{6,7 - 3,0}{2 \cdot 0,1227} = 15 \text{ cm.}$$

Se il rendimento dell'ugello è $\eta_u = 0,9$ la velocità reale di efflusso si ottiene dalla (3.6.1):

$$u_2 = \sqrt{\eta_u} \sqrt{2(h_1 - h_{2s})} = 1138 \text{ m/sec}$$

e l'entalpia dello stato finale 2 (cfr. diagramma di fig. 3.6.1 P) risulta:

$$\begin{aligned} h_2 &= h_1 - \eta_u (h_1 - h_{2s}) = \\ &= 772 - 0,9 (772 - 600) = 617,2 \text{ kcal/kg.} \end{aligned}$$

Si osserva che l'espressione empirica $pv^{1,3} = \text{cost}$ è stata impiegata per determinare la pressione critica e quindi indirettamente l'area di gola. Le velocità nelle sezioni di gola e di uscita sono state calcolate con l'ausilio del diagramma $h-s$ (differenze di entalpia in espansioni isoentropiche) e non con l'integrale $\int v dp$ della relazione (3.6.2).

Prima di ultimare l'argomento si dà un breve cenno del fenomeno di *soprassaturazione* che si presenta quando l'espansione attraverso l'ugello porta il vapore dallo stato surriscaldato entro la zona di coesistenza liquido-vapore.

L'espansione isentropica 1-2 in fig. 3.6.1 P indica ad esempio un cambiamento di fase che dovrebbe avere inizio a partire dalla curva limite di saturazione $x = 1$: la rapidità dell'espansione ritarda però il raggiungimento dell'equilibrio tra la fase liquida e quella vapore; il vapore continua ad espandersi in uno stato metastabile surriscaldato (fase gassosa) fino ad una pressione e temperatura tale a cui avviene un'improvvisa condensazione con comparsa di minuscole gocce di liquido. Il processo irreversibile di condensazione ripristina uno stato di equilibrio stabile con aumento dell'entropia specifica e diminuzione della velocità di efflusso locale.

Nell'intervallo tra il punto sulla curva limite e quello in cui ha luogo l'improvvisa condensazione, il vapore è in uno stato *metastabile* di *soprassaturazione* o di *sottoraffreddamento*, nel senso che la temperatura è ivi minore di quella di saturazione corrispondente alla pressione locale.

Quando il fenomeno della soprassaturazione interessa la gola dell'ugello, si riscontra sperimentalmente una portata maggiore di quella teorica calcolata rispetto all'espansione adiabatica reversibile (moto ovunque in condizioni d'equilibrio termodinamico).

CAPITOLO IV

MOTO CON ATTRITO IN CONDOTTI A SEZIONE COSTANTE

4.1 GENERALITÀ. FATTORE DI ATTRITO.

Il precedente capitolo è stato quasi interamente indirizzato allo studio del moto isentropico attraverso condotti a sezione variabile; anche quando si è fatto riferimento a ugelli e diffusori in condizioni reali di funzionamento, come nel paragrafo 3.6, l'analisi è stata condotta sulla base del moto isentropico e appropriati coefficienti di rendimento tenevano conto delle irreversibilità nel deflusso.

In parecchie situazioni di moto in condotti a sezione costante l'attrito è un fattore importante nel determinare le variazioni delle proprietà nel fluido ed è perciò utile, per valutarne gli effetti, vedere come può essere introdotto quantitativamente nell'analisi del moto monodimensionale.

Si è visto che nell'equazione dell'energia meccanica (1.3.1) compare il termine δR , lavoro delle

forze dissipative riferito all'unità di massa del fluido. Il meccanismo dell'attrito interno che insorge nel moto di un fluido entro un condotto è associato a variazioni radiali di velocità del fluido nella sezione del condotto, quindi ad un fenomeno tipicamente non monodimensionale. È tuttavia spesso possibile (e molto utile per valutazioni quantitative pratiche) esprimere gli effetti dell'attrito interno nel moto di un fluido entro condotti in termini di proprietà "medie" del fluido nella sezione considerata (in particolare velocità media u , densità media ρ ecc.), tali valori medi essendo poi utilizzati trattando il moto come esattamente monodimensionale.

Si consideri un condotto cilindrico, ed in esso il volume elementare di fluido compreso tra le sezioni normali di ascissa x e $(x + dx)$; cfr. fig. 4.1.1.

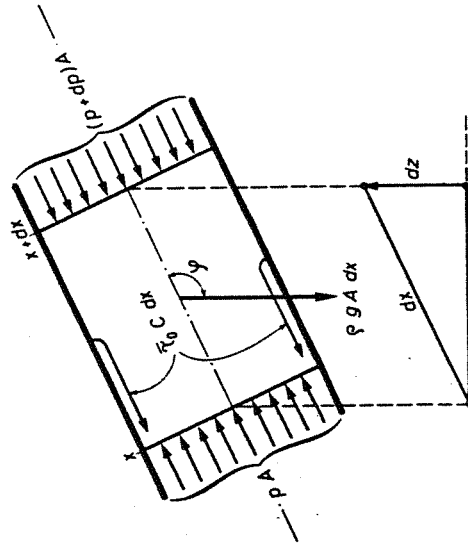


Fig. 4.1.1. - Forze agenti su un elemento di fluido compreso tra due sezioni normali del condotto a distanza infinitesima.

Le forze che agiscono sull'elemento di fluido considerato sono:

- forza d'attrito alla parete cilindrica perimetrale: $\tau_0 C \cdot dx$, ove:

τ_0 : sforzo tangenziale d'attrito (eventualmente medio se il condotto cilindrico non è a sezione circolare) nella parete cilindrica laterale;

C : perimetro della sezione normale del condotto.

- forza peso: $\rho g A \cdot dx$, ove:

A : area della sezione normale del condotto;

g : accelerazione gravitazionale;

ρ : densità del fluido;

- forza di pressione sulle sezioni laterali dell'elemento cilindrico:

$$Ap \quad \text{e} \quad A(p + dp).$$

L'equazione della q.d.m. (1.3.9) applicata (in termini differenziali) all'elemento di fluido considerato porge:

$$-A \cdot dp - \tau_0 C \cdot dx + \rho g A \cdot dx \cos \varphi = W \cdot du \quad (4.1.1)$$

$\sum \vec{F}_x = W \cdot du$

ove l'angolo φ è definito nella figura stessa.

Dividendo tutti i termini per ρA , ricordando che $W = \rho u A$ si ottiene:

$$-v \cdot dp - \tau_0 \frac{C}{A} \frac{dx}{\rho} - g \cdot dz = \frac{du^2}{2} \quad (4.1.2)$$

$$\delta R = \frac{\tau_0}{\rho} < \frac{dx}{8\theta}$$

Il confronto della (4.1.2) con la (1.3.1) porge immediatamente ($\delta L' = 0$):

$$\delta R = \frac{4\tau_0}{\rho} \frac{dx}{d_e} \quad (4.1.3)$$

avendo indicato con d_e il *diametro equivalente* del condotto, definito dalla:

$$d_e = \frac{4A}{C} \quad (4.1.4)$$

Il *fattore d'attrito* f viene definito dalla relazione:

$$f = \frac{\tau_0}{\rho u^2/8} \quad (4.1.5)$$

Tenendo conto della relazione (4.1.5), la (4.1.3) si riduce alla:

$$\delta R = f \frac{dx}{d_e} \frac{u^2}{2} \quad (4.1.6)$$

L'analisi dimensionale mostra che, nel caso di moto completamente sviluppato all'interno di condotti cilindrici geometricamente simili, il fattore d'attrito f è funzione del numero di Reynolds del deflusso $Re = (\rho u d_e)/\mu$, del numero di Mach del deflusso $M = u/c$ e della scabrezza relativa del condotto ε/d_e . In formule:

$$f = \phi(Re, M, \varepsilon/d_e). \quad (4.1.7)$$

Sviluppi teorici indicano, e l'esperienza conferma, che per regimi di moto subsonici ($M < 1$),

il fattore d'attrito f dipende inapprezzabilmente dal numero di Mach. Per moti subsonici completamente sviluppati si ha pertanto:

$$f = \phi(Re, \varepsilon/d_e). \quad (4.1.8)$$

Per condotti cilindrici a sezione circolare la dipendenza funzionale (4.1.8) è rappresentata in forma grafica sul *diagramma di Moody* (fig. 4.1.2); si noti che per questa geometria $d_e = d$. Analiticamente il legame funzionale (4.1.8) può essere rappresentato dalle relazioni:

- *moto laminare* ($Re \leq 2000$):

$$f = \frac{64}{Re} \quad (4.1.9)$$

- *moto turbolento* ($Re \geq 10\,000$):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon/d}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (4.1.10)$$

(*relazione di Colebrook*)

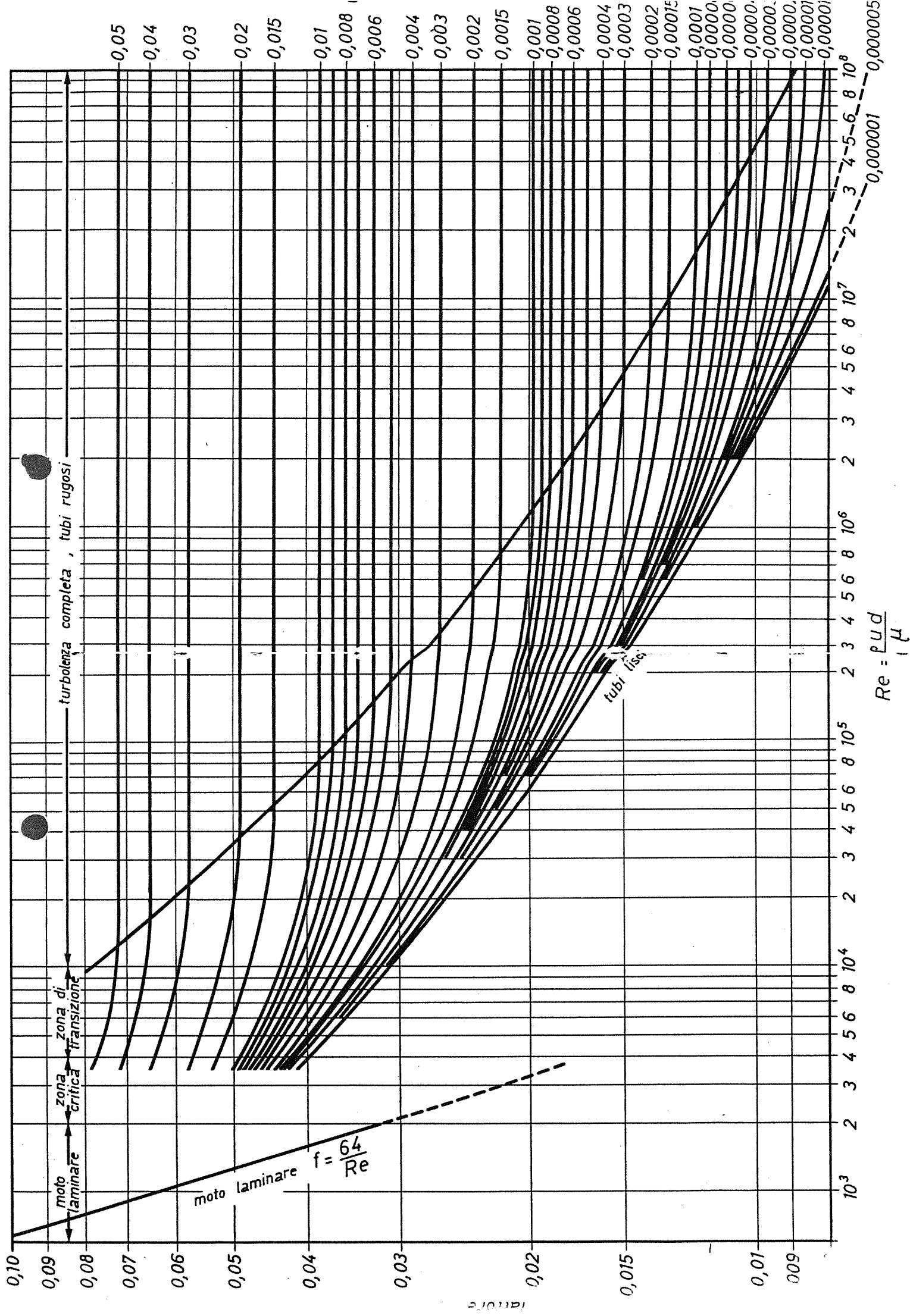
- *moto turbolento* ($3\,000 \leq Re \leq 10^5$), *tubi lisci*:

$$f = \frac{0.3164}{Re^{0.25}} \quad (4.1.11)$$

(*relazione di Blasius*).

Da notare che in tutti questi casi ε è la *scabrezza artificiale equivalente* del condotto.

Nel caso di condotti cilindrici a sezione non



circolare, varie esperienze con sezioni normali di forma quadrata, rettangolare, triangolare e anulare hanno confermato che, per regime di moto turbolento completamente sviluppato fino a numero di Mach $M = 1$ possono essere usate per la valutazione del fattore di attrito f le stesse correlazioni stabilite nel caso di sezione circolare, naturalmente impiegando il diametro equivalente d_e come definito dalla (4.1.4) nella valutazione del numero di Reynolds Re e della scabrezza relativa ϵ/d_e . Per moto laminare invece la dipendenza funzionale (4.1.8) è differente in relazione alle differenti forme della sezione del condotto cilindrico; l'ipotesi di monodimensionalità del moto è d'altra parte una grossolana approssimazione nel caso di regime di flusso laminare.

In prossimità della sezione di imbocco di un condotto il regime di moto non è completamente sviluppato, e le equazioni basate sull'ipotesi di monodimensionalità del deflusso non possono rendere conto degli effetti dovuti al variare del profilo di velocità del fluido nel deflusso stesso. Si dà in questo caso al simbolo f il significato di *fattore di attrito apparente* e lo si definisce come il valore che rende verificata l'equazione monodimensionale del moto (1.3.1), con il termine δR calcolato formalmente secondo la (4.1.6).

In questa situazione il fattore di attrito apparente viene a dipendere da altri parametri, oltre quelli messi in evidenza nella relazione funzionale (4.1.7), come ad esempio il numero di Reynolds locale $Re_x = (\rho u x)/\mu$, con x : distanza della sezio-

ne considerata dalla sezione di imbocco del condotto. Per la medesima ragione il fattore d'attrito apparente medio in condotti corti può avere valori in eccesso rispetto a quanto rilevabile dal diagramma di Moody.

Nel caso di moto supersonico del fluido si applicano le osservazioni relative ai condotti corti, in quanto (come sarà dimostrato nel seguito) la lunghezza massima di condotto in cui si possono mantenere condizioni di moto supersonico è così limitata che non si possono mai raggiungere ivi condizioni di moto completamente sviluppato; oltre a ciò le proprietà del fluido variano molto rapidamente nel moto supersonico, ciò che contribuisce ad ostacolare il raggiungimento di condizioni di regime per il profilo di velocità. In queste condizioni si capisce come i parametri da cui dipende il valore del coefficiente d'attrito apparente f (computato da prove sperimentali a mezzo delle equazioni monodimensionali del moto) sono vari e complessi (numero di Mach M , numero di Reynolds Re , numero di Reynolds locale Re_x , scabrezza relativa del condotto, spessore iniziale dello strato limite, grado di turbolenza iniziale). Prove sperimentali hanno mostrato che per condotti cilindrici lisci a sezione circolare di lunghezza compresa tra 10 e 50 volte il diametro, con numeri di Mach del deflusso compresi tra 1,2 e 3, e numeri di Reynolds compresi tra 25000 e 700000, il coefficiente medio apparente di attrito f assume valori compresi tra 0,008 e 0,012, cioè valori circa metà di quelli comunemente incontrati nel moto com-

pletamente sviluppato di un fluido incompressibile (diagramma di Moody).

Nel seguito di questo capitolo, trattando moti con attrito verrà supposto che il condotto cilindrico considerato sia a sezione circolare; l'eventuale estensione a sezioni differenti dovrà tener conto di quanto esposto più sopra.

A - MOTO ADIABATICO (MA NON

4.2 GENERALITÀ. $dA \neq 0$ ISOTHERMICO

Per il moto adiabatico in un condotto orizzontale a sezione costante l'equazione del Primo Principio della Termodinamica (1.3.4), in assenza di scambi di lavoro e con variazione di energia potenziale nulla, e l'equazione di continuità (1.3.5) assumono rispettivamente la forma:

$$h + \frac{u^2}{2} = h_0 = \text{cost} \quad (4.2.1)$$

$$\rho u = \frac{W}{A} = G = \text{cost} \quad (4.2.2)$$

dove il simbolo G rappresenta la portata specifica che ha un valore costante in ogni sezione del condotto.

Dal confronto delle due relazioni si ottiene:

$$h = h_0 - \frac{G^2}{2} v^2 \quad (4.2.3)$$

linea parabolica

La (4.2.3) è nota come equazione di Fanno e resta determinata dai valori dell'entalpia specifica totale h_0 e della portata specifica G ; tutti i possibili stati di moto sono perciò rappresentati nel piano $(h-v)$ dalla curva (parabola) di fig. 4.2.1.

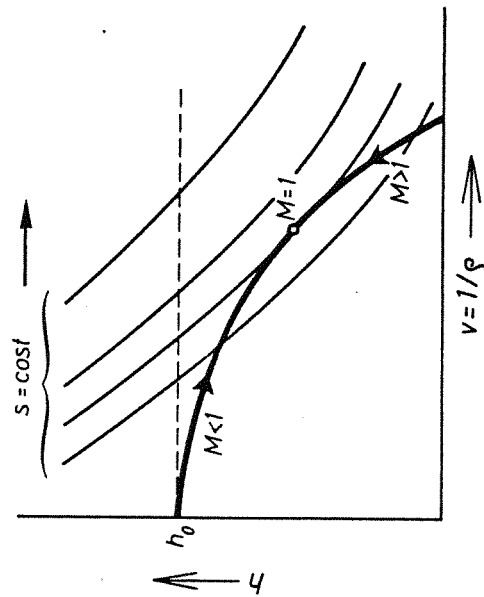


Fig. 4.2.1. - Curva di Fanno nel diagramma $h-v$.

Se il fluido è una sostanza pura di cui è nota l'equazione di stato, $s = s(h, v)$, il valore dell'entropia è determinato dai valori dell'entalpia specifica e del volume specifico e le linee di Fanno per il medesimo valore di h_0 ma a diversa portata specifica G assumono nel diagramma $(h-s)$ la forma illustrata in fig. 4.2.2.

Le linee a entalpia costante sono pure linee a velocità costante e perciò gli stati appartenenti al ramo superiore della curva corrispondono a ve-

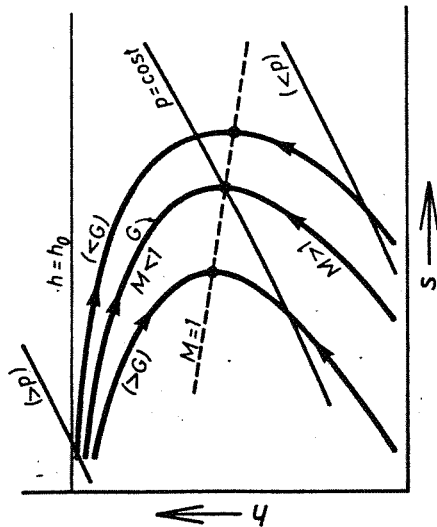


Fig. 4.2.2. - Curve di Fanno nel diagramma $h-s$, relative allo stesso valore dell'entalpia di ristagno h_0 ma a differenti valori della portata specifica G .

locità minori rispetto a quelli 2 del ramo inferiore (fig. 4.2.3). Inoltre punti successivi rappresentano stati differenti del moto non possono appartenere ad entrambi i rami della curva poiché, in accordo al Secondo Principio della Termodinamica, l'entropia in un processo adiabatico può solamente aumentare.

Il verso di evoluzione del moto deve quindi essere quello indicato dalle frecce; i punti rappresentativi di stati successivi approssimano uno stato limite di massima entropia la cui caratteristica si ottiene dal confronto delle (4.2.1) e (4.2.2) scritte in forma differenziale:

$$dh + u^2 \frac{du}{u} = 0 \quad (4.2.4)$$

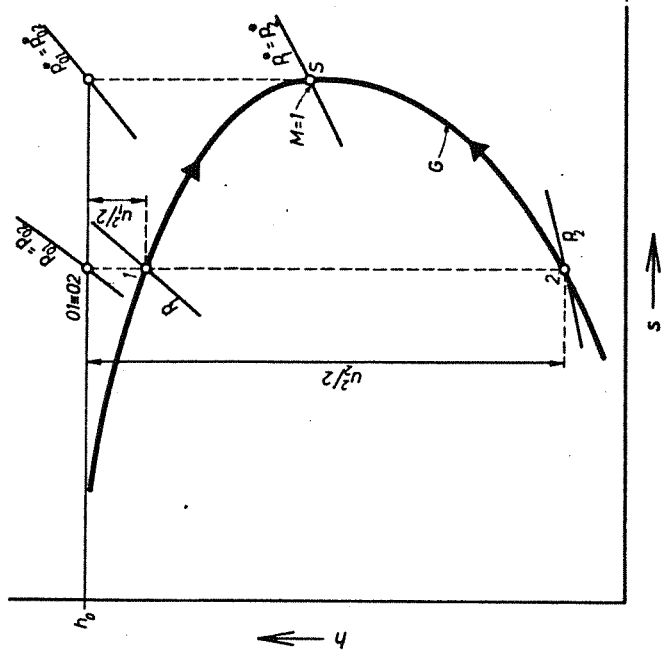


Fig. 4.2.3. - Curva di Fanno nel diagramma $h-s$.

$$\frac{du}{u} + \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (4.2.5)$$

con la relazione termodinamica:

$$T ds = dh - \frac{dp}{\rho}. \quad (4.2.6)$$

Si ha:

$$u^2 = - \frac{dh}{\frac{du}{u}} = \frac{dh}{\frac{dp}{\rho}} = \rho T \frac{ds}{dp} + \frac{dp}{dp}. \quad (4.2.7)$$

La derivata $\frac{dp}{dp}$ rappresenta la velocità del suono se la trasformazione lungo cui viene valutata è quella isentropica. Poiché $ds = 0$ nel punto S di massima entropia la (4.2.7) porge:

$$u^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = c^2 \quad (4.2.8)$$

ed il numero di Mach corrispondente a questo stato limite risulta unitario. Ne consegue che il ramo superiore della curva di Fanno rappresenta stati di moto subsonico e quello inferiore stati di moto supersonico.

Se il moto è inizialmente subsonico (punto 1 di fig. 4.2.3) un aumento di entropia dovuto agli effetti dell'attrito porta ad un aumento di velocità e del numero di Mach ed a una diminuzione dell'entalpia e della pressione.

Se il moto è inizialmente supersonico (punto 2 di fig. 4.2.3) all'aumento crescente dell'entropia corrispondono velocità e numeri di Mach decrescenti associati a entalpie e pressioni crescenti.

In entrambi i casi gli stati del fluido tendono a $M = 1$ e perciò un moto subsonico, adiabatico con attrito in un condotto a sezione costante, non può mai diventare supersonico ed un moto supersonico, in assenza di discontinuità, non può mai diventare subsonico.

4.3 RELAZIONI DI FANNO PER GAS IDEALI.

L'equazione differenziale dell'energia (4.2.4) e l'espressione differenziata del numero di Mach si possono scrivere, per un gas ideale, nella forma:

$$\frac{dT}{T} + (k-1) M^2 \frac{du}{u} = 0 \quad (4.3.1)$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \quad \rightarrow \quad \frac{dM}{M} = \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \quad (4.3.2)$$

Dal loro confronto si ottiene:

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (4.3.3)$$

$$\frac{dT}{T} = - \frac{(k-1) M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (4.3.4)$$

relazioni che danno le variazioni relative di velocità e di temperatura in funzione del numero di Mach. La loro validità non è limitata al moto di Fanno ma è estesa a qualsiasi moto adiabatico di un gas a comportamento ideale.

L'equazione di stato di un gas ideale in forma differenziale si scrive:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho} \quad (4.3.5)$$

e tenendo conto della (4.2.5) e delle (4.3.3) e (4.3.4) si ottiene:

$$\frac{du}{u} = \frac{ds}{s} = 0$$

$$\frac{dp}{p} = - \frac{1 + (k-1)M^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \frac{dM}{M} \quad (4.3.6)$$

L'espressione (1.5.6) relativa alla pressione di ristagno, in forma differenziale diventa:

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{kM^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \frac{dM}{M} \quad (4.3.7)$$

e per la (4.3.6):

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \frac{dM}{M} \quad (4.3.8)$$

Infine l'equazione dell'energia meccanica (1.3.1) nelle ipotesi poste ($\delta L' = g dz = 0$) e per la (4.1.6) si scrive:

$$kM^2 \frac{du}{u} + \frac{dp}{p} + f \frac{dx}{d} \frac{kM^2}{2} = 0 \quad (4.3.9)$$

$\frac{u du}{d} + \frac{u dp}{d} + \frac{f dx}{d} = 0$
 $\frac{u^2}{2d} + \frac{u dp}{d} + \frac{f dx}{d} = 0$
 $\Rightarrow \frac{u^2}{2} + \frac{u dp}{d} + \frac{f dx}{d} = 0$

e per le (4.3.3) e (4.3.6):

$$\frac{dM}{M} = \frac{kM^2 \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2 \right)}{2(1-M^2)} f \frac{dx}{d} \quad (4.3.10)$$

Poiché il termine $f \frac{dx}{d}$ è sempre positivo nel senso del moto la (4.3.10) indica che ($k > 1$) la variazione del numero di Mach deve essere positiva,

$dM > 0$, nel moto subsonico ($M < 1$) e negativa, $dM < 0$, nel moto supersonico ($M > 1$).

Gli effetti dell'attrito sulle proprietà del fluido sono così evidenziati dalle variazioni delle grandezze M, u, ρ, T, p e p_0 nel senso del deflusso e sono riassunti per i moti subsonico e supersonico nella tabella:

MOTO	M	u	ρ	T	p	p_0
subsonico $M < 1$	cresce	cresce	cala	cala	cala	cala
supersonico $M > 1$	cala	cala	cresce	cresce	cresce	cala

colonna
inversa

4.4 PARAMETRO LIMITE DI ATTRITO. LUNGHEZZA MASSIMA.

Si è visto che in un tubo a sezione costante in presenza di attrito il moto può evolvere adiabaticamente solo verso il regime sonico, $M = 1$, senza che tale limite possa essere oltrepassato. Quindi per fissate condizioni iniziali, numero di Mach eguale a M in una data sezione, esiste una lunghezza massima (valutata dalla sezione considerata) compatibile con le condizioni fissate e che non introduce discontinuità nel deflusso (onde d'urto). La massima lunghezza possibile, indicata con $l_{\max}$, è la lunghezza valutata dalla sezione considerata del condotto alla sezione *reale o fittizia* a cui corrisponde numero di Mach unitario, raggiunto in condizioni di moto di Fanno.

L'espressione di $l_{\max}$ si ottiene dalla (4.3.10) scritta nella forma:

$$f \frac{dx}{d} = \frac{2(1-M^2)}{kM^3(1 + \frac{k-1}{2}M^2)} dM$$

$$= \frac{2}{k} \left(\frac{1}{M^3} - \frac{\frac{k+1}{2}}{M} + \frac{\frac{k+1}{2}M}{M^2 + \frac{k-1}{2}} \right) dM \quad (4.4.1)$$

e integrata tra i limiti 0 e $l_{\max}$ per la variabile x ed M e 1 per la variabile M . L'integrazione della (4.4.1) porge:

$$\bar{f} \frac{l_{\max}}{d} = \frac{1}{k} \left(\frac{1-M^2}{M^2} + \frac{k+1}{2} \ln \frac{\frac{k+1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right) \quad (4.4.2)$$

dove $\bar{f}$ è il fattore medio di attrito definito da:

$$\bar{f} = \frac{1}{l_{\max}} \int_0^{l_{\max}} f \cdot dx \quad (4.4.3)$$

(per semplicità di scrittura il simbolo f viene in seguito usualmente impiegato anche per indicare il valore medio del fattore di attrito).

Il gruppo adimensionale $f \frac{l_{\max}}{d}$, chiamato *parametro limite di attrito* relativo alla sezione considerata, è tabulato in funzione di M per alcuni valori di k in Appendice (tabelle C1, C2, C3) e rappresentato graficamente in fig. 4.4.1 per $k = 1,4$.

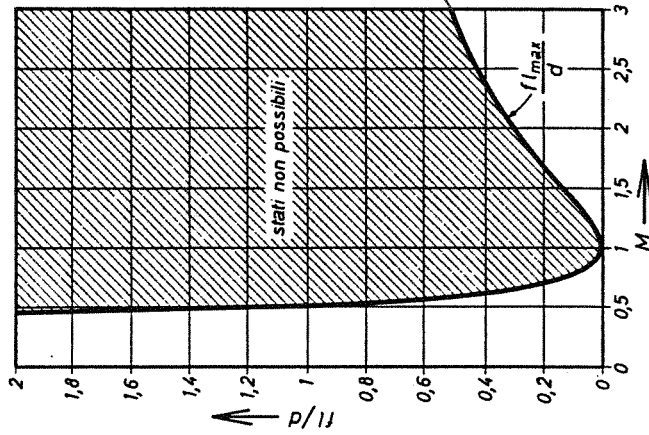


Fig. 4.4.1. Parametro limite d'attrito $f l_{\max} / d$ in funzione del numero di Mach M per moto di Fanno di un gas ideale con $k = 1,4$. La zona tratteggiata rappresenta situazioni di moto non possibili (almeno in assenza di onde d'urto normali).

In questo diagramma il simbolo l (nel gruppo adimensionale in ordinata) rappresenta la lunghezza del condotto tra la sezione considerata (ove il numero di Mach vale M) e la sezione di uscita. I punti esterni all'area tratteggiata rappresentano stati possibili di moto: quelli sulla curva corrispondono a numeri di Mach unitari all'estremità del condotto, mentre quelli al di sotto della curva $f \frac{l_{\max}}{d}$ corrispondono a numeri di Mach maggiori

o minori dell'unità all'uscita del condotto a seconda che il moto sia inizialmente supersonico o subsonico.

Si può anche dedurre che per un prefissato valore del gruppo $f \frac{l}{d}$ il numero di Mach iniziale non può, nel caso di moto subsonico, superare un valore limite massimo e, nel caso di moto supersonico in assenza di onde d'urto, essere inferiore ad un certo valore minimo.

La forma della curva di $f \frac{l_{\max}}{d}$ in funzione di M mostra che gli effetti dell'attrito sono molto sensibili ad elevati numeri di Mach. Infatti dalla (4.4.2) si ottiene:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left(f \frac{l_{\max}}{d} \right) = \frac{1}{k} \left(\frac{k+1}{2} \ln \frac{k+1}{k-1} - 1 \right) \quad (4.4.4)$$

e questa per $k = 1,4$ e un fattore medio di attrito pari a $f = 0,01$ dà:

$$\left(\frac{l_{\max}}{d} \right)_{M=\infty} \cong 82. \quad (4.4.5)$$

Si vede così che per quanto elevato sia il numero di Mach nella sezione iniziale, al limite infinito, il moto è decelerato a $M = 1$ in un condotto la cui lunghezza è pari a circa 82 volte il suo diametro.

La lunghezza l_{12} del condotto necessaria affinché il moto passi dal valore M_1 nella sezione 1 al valore M_2 in una successiva sezione 2 si determina, come illustrato in fig. 4.4.2, dalla differenza:

*o al picco
o al minimo
o al valore
M=1*

$$l_{12} = (l_{\max})_{M_1} - (l_{\max})_{M_2} \quad (4.4.6)$$

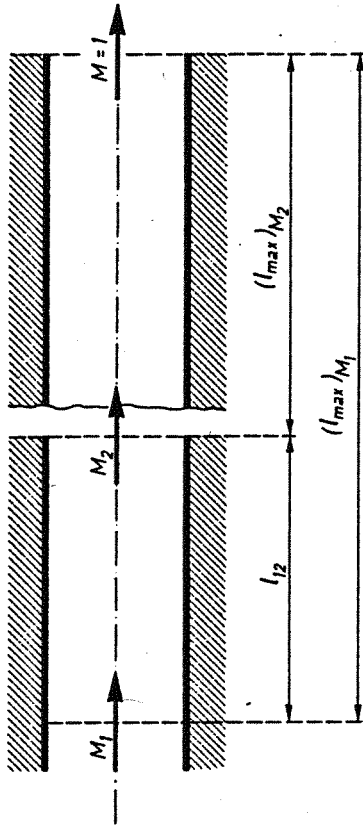


Fig. 4.4.2. - Determinazione della lunghezza di condotto nel quale il numero di Mach passa dal valore M_1 al valore M_2 .

4.5 STATI DI RIFERIMENTO. TABELLA DI FANNO.

I risultati ottenuti dalle relazioni dei precedenti paragrafi possono essere dedotti da tabelle espresse in funzione di rapporti adimensionali.

A tal fine è necessario ricorrere a stati di riferimento; lo stato di riferimento più conveniente ed utile è lo stato sulla linea di Fanno di massa ma entropia. Questo stato corrispondente a $M = 1$ viene ancora indicato con un apice asteriscato, tuttavia esso differisce da quello critico isentropico. Nel moto di Fanno infatti l'entropia non è costante e lo stato critico, a partire dalle condizioni locali, è raggiunto irreversibilmente.

L'equazione dell'energia (4.2.1) per un gas ideale diventa:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \quad (4.5.1)$$

da cui si ottiene:

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \quad (4.5.2)$$

T^* = temperatura del gas
pede $\eta = 1$ a monte
a valle

questo vale per gas
nei flussi stazionari

Dall'equazione di continuità, tenendo conto dell'espressione del numero di Mach e della (4.5.1), si ha:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{M_2 \sqrt{kRT_2}}{M_1 \sqrt{kRT_1}} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{1/2} \quad (4.5.3)$$

da cui:

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{1/2} \quad (4.5.4)$$

e:

$$\frac{u}{u^*} = M \left(\frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right)^{1/2} \quad (4.5.5)$$

Dall'equazione di stato $p v = RT$ e per le (4.5.2) e (4.5.4) si ricava:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right)^{1/2} \quad (4.5.6)$$

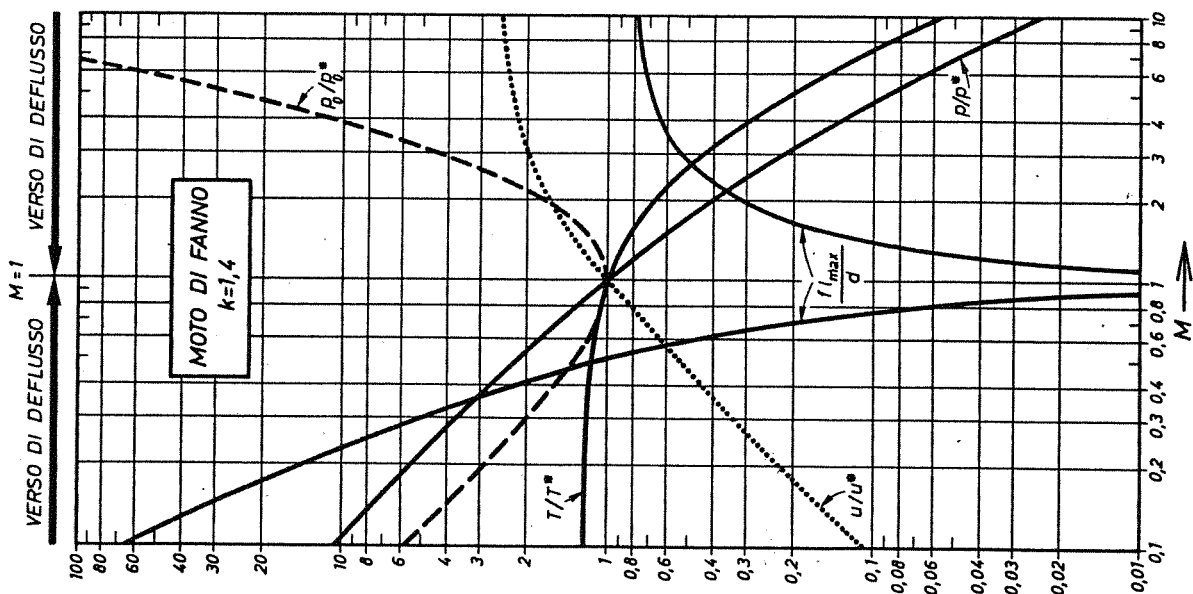
e poiché il rapporto delle pressioni di ristagno si può esprimere nella forma:

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{p_0}{p} \cdot \frac{p}{p^*} \cdot \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{p_0}{p} \right) \frac{p}{p^*} \quad (4.5.7)$$

per la (1.5.6) e (4.5.6) si ha:

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (4.5.8)$$

La fig. 4.5.1 illustra per $k = 1,4$ le variazioni dei rapporti $\frac{T}{T^*}$, $\frac{p}{p^*}$, $\frac{u}{u^*}$, $\frac{p_0}{p_0^*}$ e di $f \frac{L_{\max}}{d}$ in

Fig. 4.5.1. - Funzioni del moto di Fanno per un gas ideale con $k = 1,4$.

funzione del numero di Mach. Un più ampio campo di variabilità delle medesime grandezze si ha dai valori riportati nelle tabelle di Appendice C1, C2, C3, relative a differenti valori di k .

Poiché i valori dello stato critico sono costanti per un determinato moto adiabatico in un condotto a sezione costante è possibile determinare il rapporto tra le grandezze locali di due stati 1 e 2 del fluido solo dalla conoscenza dei rispettivi numeri di Mach M_1 ed M_2 . Ad esempio per le pressioni si ha:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_2}}{\left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_1}}. \quad (4.5.9)$$

PROBLEMA 4.5.1

L'ugello convergente-divergente del problema 3.5.1 progettato per $M = 2,39$ allo sbocco viene collegato a un tubo a sezione costante, eguale a quella terminale del divergente. Determinare:

- la lunghezza del condotto necessaria a ridurre il numero di Mach a $M = 1,3$ (si ipotizzi isoentropico il moto nell'ugello e adiabatico nel condotto);
- la pressione di uscita dal condotto a sezione costante nell'ipotesi che esso sia lungo 30 cm

e che un'onda d'urto normale si formi a 20 cm dalla sua sezione d'imbocco.

In entrambi i casi si assuma per il fattore medio d'attrito il valore $f = 0,01$.

a) Il numero di Mach all'ingresso del condotto a sezione costante è $M_1 = 2,39$ ed in corrispondenza, della tabella C2 si ha:

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_1} = 0,40760.$$

A. $M_2 = 1,3$ ancora dalla tabella C2:

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_2} = 0,06483$$

per cui la differenza:

$$f \frac{l}{d} = \left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_1} - \left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_2} = 0,34277$$

permette di ricavare la lunghezza necessaria per ridurre il numero di Mach dal valore $M_1 = 2,39$ al valore $M_2 = 1,3$.

Si ottiene, essendo $d = 2,86$ cm:

$$l = \frac{0,34277 \cdot 2,86 \cdot 10^{-2}}{0,01} = 0,980 \text{ m.} \quad ***$$

b) Cfr. la figura 4.5.1 P. Per la (4.4.6) si ha:

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_x} = \left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_1} - \left(f \frac{l_{1,x}}{d}\right) = 0,4076 - 0,06993 = 0,33767$$

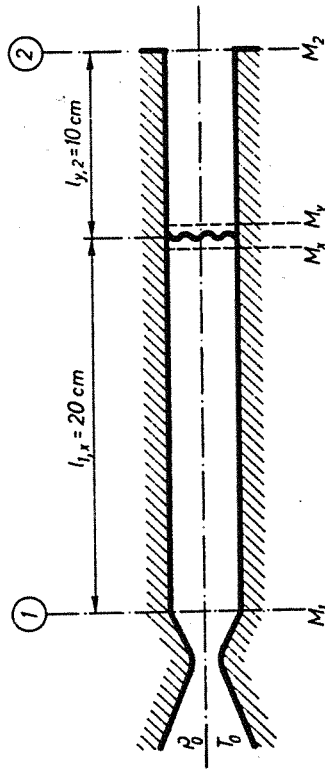


Fig. 4.5.1. P. - Problema 4.5.1.

e dalla tabella C2:

$$M_x = 2,11373$$

in quanto non si tiene conto del valore subsonico di M_x che non corrisponde ai dati di progetto.

In corrispondenza a $M_x = 2,11373$ la funzione dell'onda d'urto normale (tabella B2) dà:

$$M_y = 0,55922$$

e per le funzioni del moto di Fanno (tab. C2):

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_y} = 0,67767.$$

Ancora per la (4.4.6):

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_2} = \left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_y} - \left(f \frac{l_{y,2}}{d}\right) = 0,6427$$

da cui:

$$M_2 = 0,566.$$

La pressione nella sezione di uscita del tubo a sezione costante può essere così calcolata tramite la relazione:

$$\frac{p_2}{p_0} = \underbrace{\left(\frac{p_2}{p^*} \right)_{M_2}}_{\text{Fanno}} \underbrace{\left(\frac{p^*}{p_y} \right)_{M_y}}_{\text{onda d'urto}} \underbrace{\left(\frac{p_y}{p_x} \right)_{M_x}}_{\frac{p_x}{p_y}} \underbrace{\left(\frac{p_x}{p^*} \right)_{M_x}}_{\frac{p^*}{p_x}} \underbrace{\left(\frac{p^*}{p_1} \right)_{M_1}}_{\text{Fanno}} \underbrace{\left(\frac{p_1}{p_0} \right)_{M_1}}_{\text{Fanno}}$$

*non tutti i vari
seleziona p*

dove i rapporti di pressione in corrispondenza ai diversi numeri di Mach si ricavano dalle funzioni delle proprietà di ristagno (tab. A2), dalle funzioni dell'onda d'urto normale (tab. B2) e da quelle del moto di Fanno (tab. C2).

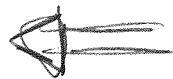
Si ottiene:

$$p_2 = 1,87624 \frac{1}{1,90035} \cdot 5,04583 \cdot 0,3766 \frac{1}{0,31314} \cdot 0,06948 \cdot 8 =$$

$$= 3,33 \text{ ata.}$$

4.6 MOTO DI FANNO CON CONDIZIONI DI RISTAGNO INIZIALI FIS-SATE.

Si consideri un condotto cilindrico, isolato termicamente, che collega attraverso un ugello convergente o convergente-divergente un serbatoio a pressione e temperatura di ristagno fissate e costanti ad un ambiente ove è possibile mantenere una pressione di scarico p_s a differenti valori. Ipotezzando moto isentropico nell'ugello, si possono evidenziare due casi a seconda che il moto adiabatico con attrito nel condotto è inizialmente a regime subsonico o supersonico.



1° caso: Condotto alimentato da un convergente.

Con riferimento alla fig. 4.6.1 siano l, d ed A la lunghezza, il diametro e l'area della sezione trasversale del tratto cilindrico del condotto.

A valori della pressione di scarico p_s prossimi alla pressione di ristagno p_{01} , fissata nella sezione iniziale 1 del tratto cilindrico, la velocità del fluido nella sezione di uscita 2 è subsonica ($M_2 < 1$) e l'andamento delle pressioni lungo il condotto è illustrato dalle curve a e b di fig. 4.6.1. La pressione di scarico $p_s = p_2$ determina il valo-

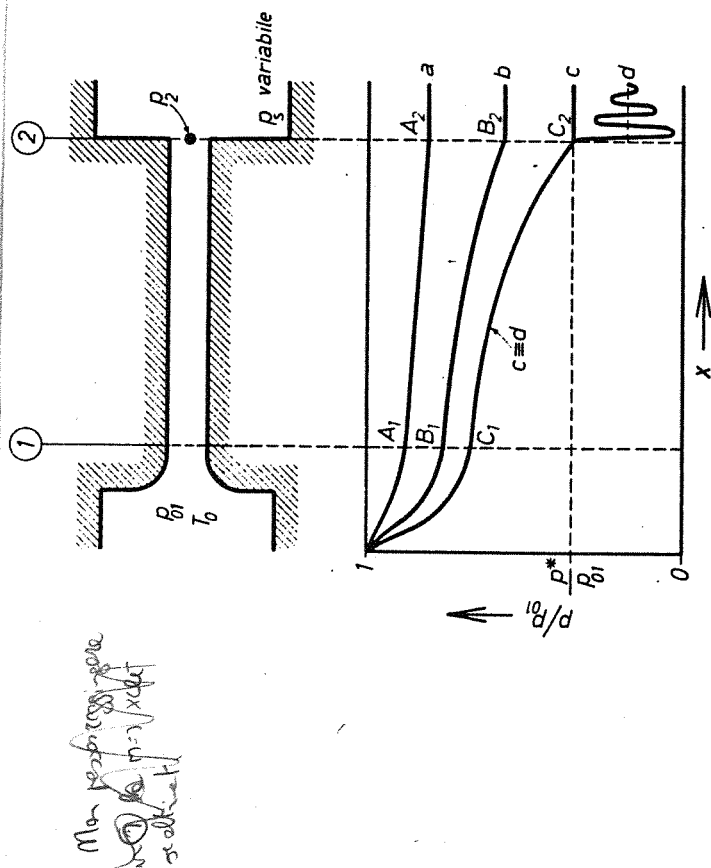


Fig. 4.6.1. - Profili di pressione nel moto di Fanno in un condotto alimentato da un ugello convergente.

re del numero di Mach M_1 all'imbocco della parte cilindrica del condotto e quindi per la (3.3.3) quello della portata W :

$$W = A \sqrt{\frac{k}{RT_0}} p_{01} \frac{M_1}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \quad (4.6.1)$$

Al decrescere di p_s rispetto a p_{01} la portata W , come illustrato in fig. 4.6.2, aumenta fino a raggiungere un valore massimo alla pressione $p_s = p_2 = p^*$ a cui corrisponde $M_2 = 1$ nella sezione di uscita del condotto (condizione c). In ogni sezione

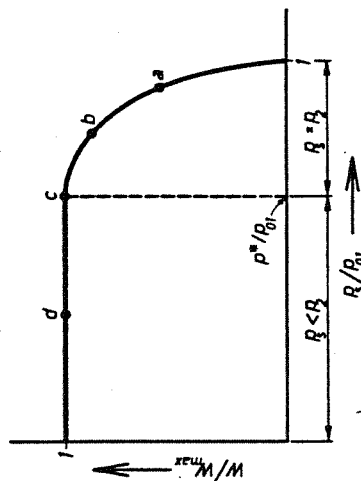


Fig. 4.6.2. - Variazione della portata di massa W in funzione della pressione di scarico p_s per il condotto di fig. 4.6.1.

a monte la pressione è più elevata ed il moto è ovunque subsonico; all'imbocco del tratto cilindrico del condotto il numero di Mach ha raggiunto un valore massimo $M_{1\max}$, dipendente dalle condizioni iniziali, per cui risulta:

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d}\right) M_{1\max} = f \frac{l}{d} \quad (4.6.2)$$

Una ulteriore riduzione della pressione di scarico p_s (condizione d) non comporta variazioni nella portata: *essa rimane bloccata al valore relativo alle condizioni corrispondenti a $M_2 = 1$* . Il deflusso nel condotto non viene modificato ($c \equiv d$) e solo oltre la sezione di uscita ha luogo l'adeguamento di pressione mediante onde oblique di espansione.

Le situazioni di moto relative alle differenti condizioni di pressione di scarico p_s esaminate in fig. 4.6.1 sono illustrate anche nel diagramma (T-s) di fig. 4.6.3.

È importante rilevare che gli effetti dell'attrito, nel moto in un condotto a sezione costante

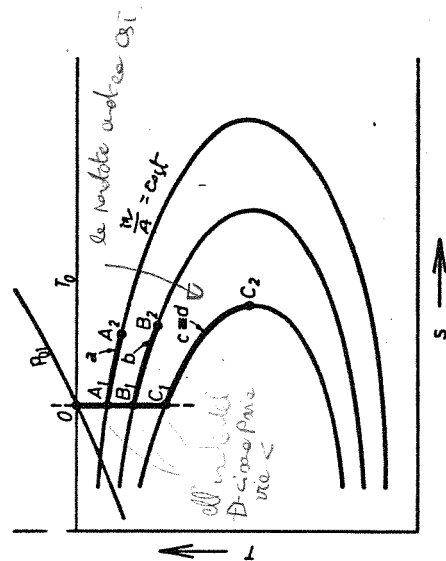


Fig. 4.6.3. - Rappresentazione nel diagramma T-s del moto di Fanno nelle diverse condizioni operative per il condotto di fig. 4.6.1.

IMP. raggiunta $M_2 = 1$
 ne re $M_1 = 1$ (questo)
 $\Rightarrow$ da $W_{max} <$

alimentato da un convergente con fissate condizioni di ristagno, limitano la portata ad un valore che, poiché $M_{1,max} < 1$, è sempre minore a quello massimo possibile in condizioni di deflusso isentropico ($W_{max,s}$, cioè con $f \frac{l}{d} = 0$ e $M_{1,max} = 1$).

Le variazioni di portata W rispetto a ($W_{max,s}$) sono diagrammate per differenti valori del rapporto $f \frac{l}{d}$, relativamente a un gas ideale con $k = 1,4$, in funzione di $\frac{p_s}{p_{01}}$ nel diagramma di fig. 4.6.4.

Se il parametro d'attrito $f \frac{l}{d}$ ha valore nullo

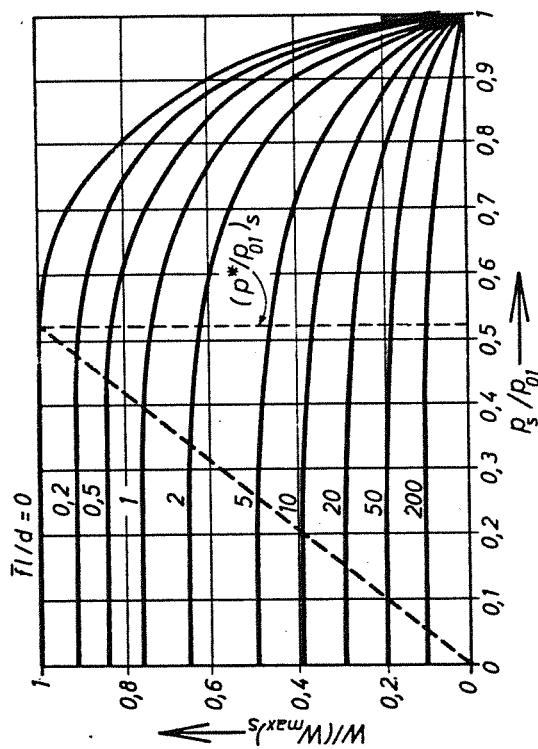


Fig. 4.6.4. - Variazione della portata di massa W in funzione della pressione di scarico p_s relativamente al moto di Fanno di un gas ideale ($k = 1,4$) in condotti a differenti valori del parametro d'attrito $f l / d$ alimentati da un ugello convergente.

l'andamento di $\frac{W}{(W_{max})_s}$ rispetto a $\frac{p_s}{p_{01}}$ è quello già illustrato in fig. 3.4.3 per il deflusso isentropico in un ugello convergente. Se invece il valore del parametro d'attrito è diverso da zero, come nel moto di Fanno, un aumento di $f \frac{l}{d}$ (ad esempio a seguito di un incremento del valore del fattore medio di attrito f o del rapporto $\frac{l}{d}$) limita la portata massima possibile W_{max} a valori via via decrescenti raggiunti in corrispondenza a rapporti di pressione $\frac{p^*}{p_{01}} = \frac{p_s}{p_{01}}$ sempre più piccoli.

La costruzione del diagramma di fig. 4.6.4 può essere fatta determinando dapprima i punti corrispondenti a Mach unitario all'uscita del condotto, $M_2 = 1$. A tal fine fissato un valore per il parametro limite di attrito $f \frac{l_{max}}{d}$ dalla espressione (4.4.2) o dalla tabella C2 rimane determinato il numero di Mach $M_{1,max}$ nella sezione di imbocco del tubo ed il rapporto $\frac{W_{max}}{(W_{max})_s}$ che per la (4.6.1) si scrive:

$$\frac{W_{max}}{(W_{max})_s} = M_{1,max} \left(\frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k-1}{2} M_{1,max}^2} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (4.6.3)$$

In corrispondenza al valore di $M_{1,max}$ dalla relazione (1.5.6) e dalle funzioni del moto di Fanno

sono valutati i rapporti $\frac{p_1}{p_{01}}, \left(\frac{p_1}{p^*}\right)_F$ ⁽¹⁾ e quindi:

$$\frac{p^*}{p_{01}} = \frac{p_s}{p_{01}} = \frac{p_1}{p_{01}} \left(\frac{p^*}{p_1}\right)_F = M_{1\max} \frac{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_{1\max}^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \quad (4.6.4)$$

La (4.6.4) rappresenta l'ascissa estrema del segmento orizzontale di ordinata $\frac{W_{\max}}{(W_{\max})_s}$ ed i punti corrispondenti a tale ascissa appartengono alla retta tratteggiata di fig. 4.6.4 come risulta dall'eguaglianza dei rapporti ⁽²⁾:

$$\frac{W_{\max}}{(W_{\max})_s} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \frac{1}{\left(\frac{p^*}{p_{01}}\right)_s} \quad (4.6.5)$$

La parte di ogni curva alla destra del segmento orizzontale, relativa al medesimo valore del pa-

⁽¹⁾ Il pedice F è qui usato per sottolineare che il rapporto (p_1/p^*) è relativo a condizioni di deflusso di Fanno.

⁽²⁾ Il pedice s è qui usato per sottolineare che il rapporto (p^*/p_{01}) è relativo a condizioni di moto isentropiche, e corrisponde al valore assunto dalla (4.6.4) per $M_{1\max} = 1$.

rametro $f \frac{l}{d}$, si può costruire per punti in relazione a differenti valori del numero di Mach all'ingresso del tratto cilindrico del condotto minori di quello massimo $M_{1\max}$ calcolato precedentemente tramite la (4.6.2). Scelto $M_1 < M_{1\max}$ dalla relazione:

$$f \frac{l}{d} = \left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_1} - \left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_2} \quad (4.6.6)$$

si ottiene, per le relazioni del moto di Fanno, M_2 e $\left(\frac{p_2}{p^*}\right)_F$ che permettono, con l'ausilio della relazione (1.5.6), di determinare il rapporto:

$$\frac{p_s}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_{01}} = \left(\frac{p_2}{p^*}\right)_F \left(\frac{p^*}{p_{01}}\right)_F \frac{p_1}{p_{01}} \quad (4.6.7)$$

Per ogni valore del numero di Mach minore di $M_{1\max}$ rimane determinato per la (4.6.3) $\frac{W}{(W_{\max})_s}$ e per la (4.6.7) $\frac{p_s}{p_{01}}$; si può così completare la parte di curva, alla destra del segmento orizzontale, corrispondente ad ogni fissato valore del parametro $f \frac{l}{d}$.

Il diagramma è di interesse applicativo in quanto permette una valutazione diretta della portata in funzione delle pressioni di scarico qualora siano fissate le condizioni di ristagno a monte e la geometria del condotto. Si sottolinea che in ta-

li condizioni la portata non può superare, per quanto bassa sia mantenuta la pressione di scarico, il valore limite corrispondente alla pressione di scarico $p_s = p^*$, valore per cui il numero di Mach all'estremità del condotto risulta unitario.

II° caso: Condotto alimentato da un convergente-divergente.

$$(\gamma > 1)$$

Il corrispondente caso di moto adiabatico con attrito in un condotto, di assegnata geometria, alimentato da un convergente-divergente viene analizzato nelle differenti condizioni operative in fig. 4.6.5. Le condizioni di ristagno siano fissate e costanti mentre possano essere variate le condizioni di pressione a valle del condotto. Viene conservata la simbologia del caso precedente.

Il numero di Mach $M_1 (> 1)$ (¹) e la pressione p_1 nella sezione di raccordo tra l'ugello e il condotto sono determinati dal rapporto isentropico

co $\frac{A_1}{A_g} = \frac{A}{A^*}$; per le relazioni del moto di Fanno

restano quindi pure fissati il valore del parametro limite d'attrito $\left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_1}$ ed il valore della pressione p^* .

(¹) Si suppone moto inizialmente supersonico ($M_1 > 1$). Se risulta $M_1 < 1$, o il moto è ovunque subsonico nell'ugello, ed allora si possono trarre conclusioni uguali a quelle relative al condotto cilindrico alimentato da un ugello convergente; oppure vi è formazione di un'onda d'urto normale nel divergente dell'ugello, e le conclusioni possono essere tratte considerando anche quanto detto al § 3.5.

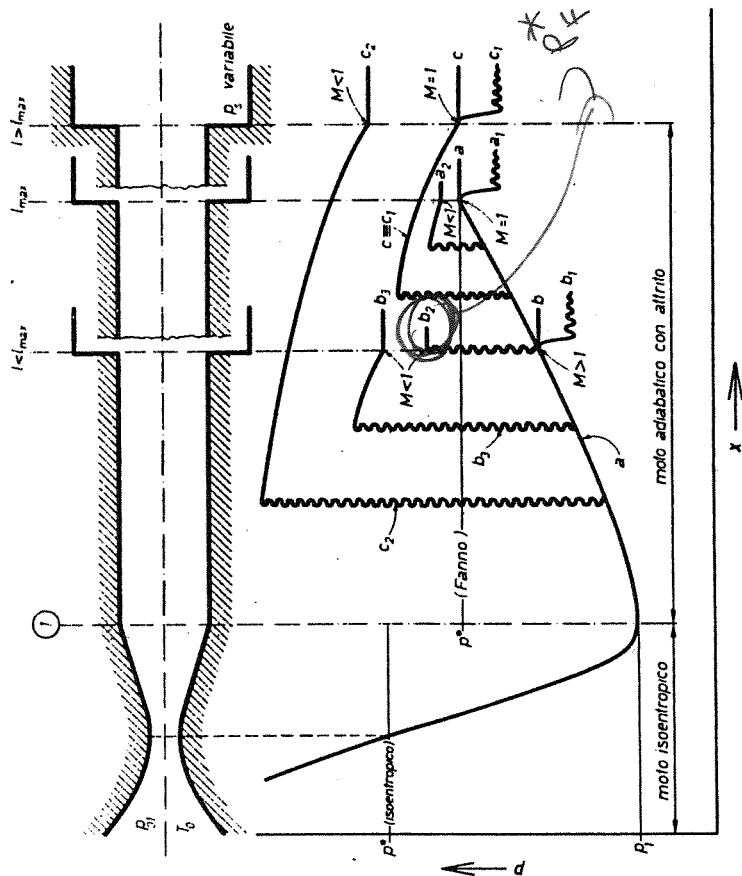


Fig. 4.6.5. - Profili di pressione nel moto di Fanno in condotti di differenti lunghezze alimentati da un ugello convergente-divergente, per diversi valori della pressione allo scarico p_s .

Si vuole analizzare l'influenza della pressione di scarico p_s nel deflusso ed a tal fine si differenziano tre casi a seconda che la lunghezza reale del condotto è eguale, minore o maggiore di quella massima compatibile con le condizioni iniziali fissate nella sezione 1; si preferisce confrontare direttamente le lunghezze del condotto piuttosto

che i relativi parametri d'attrito fl/d , supponendo noti e costanti i valori del diametro d e del fattore d'attrito medio f : con ciò si potrà dare maggior concretezza ai ragionamenti che seguono, che d'altra parte possono prestarsi ad una estensione immediata.

$\rho_1 > 1$

$$l = (l_{\max}) M_1$$

a)

$p_s \leq p^*$. - Il moto è interamente supersonico nel condotto; nel senso del moto la pressione aumenta e il numero di Mach diminuisce fino a raggiungere le condizioni soniche nella sezione terminale di sbocco:

$$\begin{array}{ll} \text{curva } a-a & \text{per } p_s = p^* \\ \text{curva } a-a_1 & \text{per } p_s < p^* \end{array}$$

in quest'ultima ipotesi l'adeguamento di pressione ha luogo oltre la sezione di sbocco mediante onde di espansione

$p_s > p^*$. - La velocità allo sbocco del tubo non può che essere subsonica. Un'onda d'urto normale (¹) si forma in una sezione del condotto in di-

(¹) E' facile rendersi conto che un'onda d'urto normale fa passare il fluido da uno stato sul ramo supersonico della curva di Fanno ad uno stato (determinato) sul ramo subsonico della medesima linea di Fanno. L'onda d'urto non modifica pertanto il valore p^* .

pendenza del valore di p_s : curva $a-a_2$; all'aumentare di p_s l'onda d'urto si sposta verso monte rispetto al senso di deflusso.

Le trasformazioni corrispondenti a questi due casi possono essere rappresentate nel diagramma entropico ($T-s$) di fig. 4.6.6 dalle curve 0-1-b-S e 0-1-x-y-z rispettivamente.

$c_p \frac{p_0 - p}{\rho_0 - \rho}$
 $p_3 = p_2 < p^*$

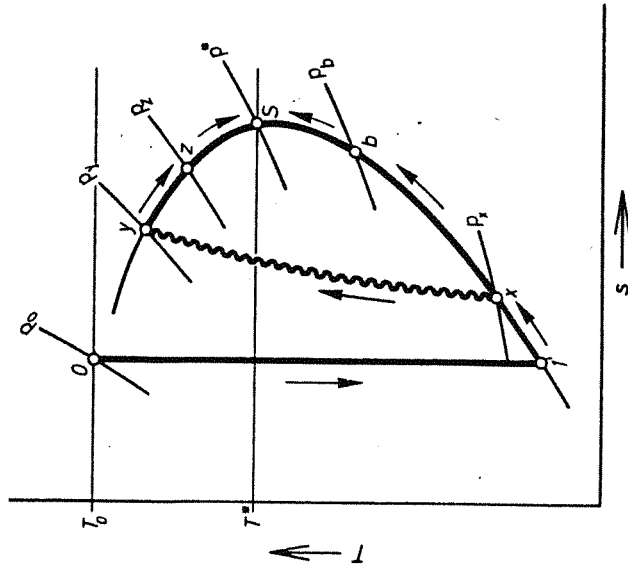


Fig. 4.6.6. - Trasformazioni nel diagramma $T-s$ relative al moto di Fanno entro condotti alimentati da un ugello convergente-divergente.

b)

$$l < (l_{\max})_{M_1}$$

Il parametro d'attrito fl/d , con i valori della pressione p_1 all'imbocco del condotto cilindrico e del relativo numero di Mach $M_1 (> 1)$, definiscono, tramite le funzioni del moto di Fanno, il valore $p_b (< p^*)$ della pressione nella sezione di sbocco, per cui il moto è supersonico senza onde d'urto:

$$p_b = p_1 \left(\frac{p}{p^*} \right)_{M_b} / \left(\frac{p}{p^*} \right)_{M_1}$$

con $M_b (> 1)$ tale da soddisfare alla:

$$f \frac{l}{d} = \left(f \frac{l_{\max}}{d} \right)_{M_1} - \left(f \frac{l_{\max}}{d} \right)_{M_b}$$

Si possono distinguere i casi:

$p_s \leq p_b$. - Il deflusso è continuo e supersonico lungo tutto il condotto e la velocità di uscita è supersonica:

$$\begin{array}{ll} \text{curva } a-b & \text{per } p_s = p_b < p^* \\ \text{curva } a-b_1 & \text{per } p_s < p_b < p^* \end{array}$$

in quest'ultima ipotesi l'adeguamento di pressione ha luogo oltre la sezione di uscita mediante onde di espansione.

Per una particolare pressione di scarico $p_s = p_{b2}$ un'onda d'urto normale si forma nella sezione di uscita: curva $a-b_2$; il valore di questa

$\rightarrow p^*$

pressione in funzione della pressione p_b e del numero di Mach M_b nella sezione di sbocco a monte dell'onda d'urto si ottiene dalla (2.3.10):

$$p_{b2} = p_b \left(\frac{2k}{k+1} M_b^2 - \frac{k-1}{k+1} \right). \quad (4.6.8)$$

Si ha quindi:

$p_b < p_s < p_{b2}$. - Il moto è ancora supersonico nel condotto e l'adeguamento di pressione avviene esternamente mediante onde d'urto oblique.

$p_s > p_{b2}$. - Si ha la formazione di un'onda d'urto in una sezione del condotto: curva $a-b_3$. Il moto passa da supersonico a subsonico attraverso l'onda d'urto e la pressione di scarico p_s ne determina la sua posizione. Al crescere del valore di p_s l'onda d'urto si sposta verso monte rispetto al senso del deflusso.

Nel diagramma di fig. 4.6.6 i primi due casi sono rappresentabili dalla trasformazione 0-1-b, e l'ultimo ancora da una trasformazione del tipo 0-1-x-y-z.

c)

$$l > (l_{\max})_{M_1}$$

In questo caso un deflusso completamente privo di discontinuità è impossibile. Un'onda d'urto si forma sempre in una sezione del condotto.

$\rightarrow$ dove vedere la velocità max. in pelle del neo

$l > l_{max}$

$l = l_{max}$

$l < l_{max}$

①

K_1

c_2

p_{1F}^*

p_{12}^*

β

$n=1$

w_{c1}

o_2

$n=1$

under
in no case
appears
definite $c \in C_1$

b_3

b_2

b_3

b_3

b_3

c_1

c_2

$p_s > p^*$. - La velocità allo sbocco è subsonica e la sezione del condotto nella quale si forma l'onda d'urto dipende dal valore della pressione di scarico p_s : curva C_2 .

$p_s \leq p^*$. - Il numero di Mach nella sezione di uscita è unitario:

curva $a - C$ per $p_s = p^*$
 curva $a - C_1$ per $p_s < p^*$

*in regime di
 moto (M=1)
 (onde d'urto e
 onde d'espansione)*

in questa seconda ipotesi l'adeguamento di pressione ha luogo a mezzo di onde oblique di espansione.

A differenza del caso precedente la posizione dell'onda d'urto normale è ben definita nel condotto e risulta indipendente dal valore della pressione di scarico p_s ($\leq p^*$). *× (Q) valore p_s e p₀*

I due casi sono rappresentabili rispettivamente nel diagramma T-s di fig. 4.6.6 con le trasformazioni 0-1-x-y-z e 0-1-x-y-S.

In fig. 4.6.7 è illustrato l'andamento della pressione e del numero di Mach per successivi incrementi di lunghezza (a partire dal valore $(l_{\max}/M_1)$ di un condotto con fissate condizioni all'imbocco. L'onda d'urto si sposta a monte fino a formarsi nella sezione di ingresso del tubo (lunghezza l_2''). In queste condizioni il moto nel tratto cilindrico del condotto è completamente subsonico ed è sempre accelerato verso il valore di Mach unitario che viene raggiunto nella sezione terminale.

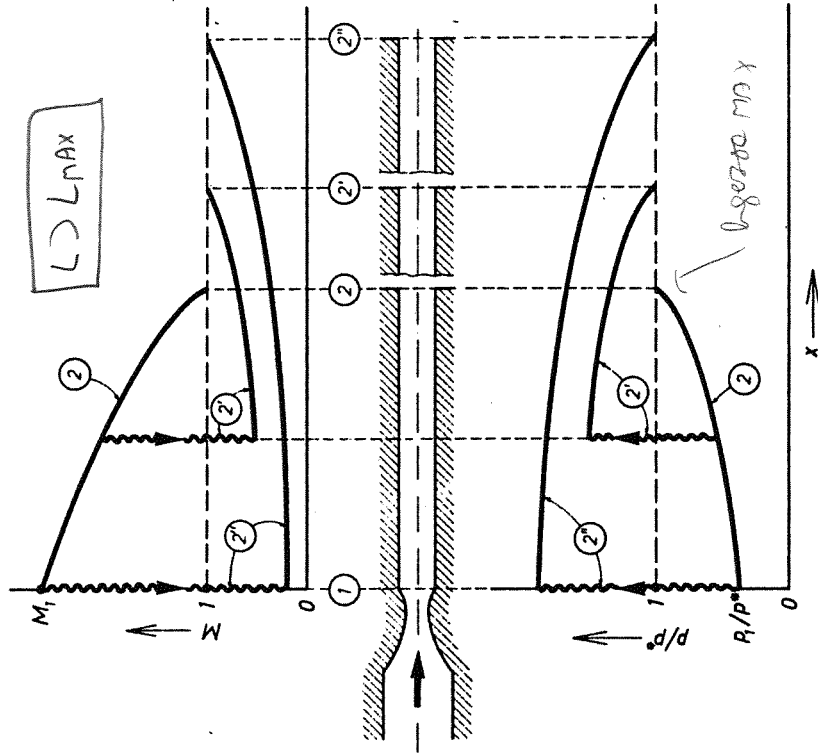


Fig. 4.6.7. - Andamento della pressione p e del numero di Mach M nel moto di Fanno in condotti di lunghezza $l \geq (l_{\max})_{M_1}$ alimentati con un ugello convergente-divergente. La pressione di scarico p_s è assunta $p_s < (p^*)_{M_1}$.

Per ulteriori aumenti di lunghezza l'onda d'urto si sposta nel divergente dell'ugello fino a formarsi nella sezione di gola ed in tal caso un successivo incremento cambia completamente le caratteristiche del deflusso riducendo il valore della portata (choking).

Analogo risultato di spostamento dell'onda di urto fino a condizioni di choking si ottiene nei casi trattati più sopra di moto subsonico allo sbocco aumentando oltre un certo limite il valore della pressione di scarico.

PROBLEMA 4.6.1

Da un serbatoio un gas a comportamento ideale (con $k = 1,3$ e $M_m = 16$ kg/kgmole) alla pressione $p_0 = 8$ ata e alla temperatura $T_0 = 320$ °K fluisce attraverso un ugello convergente in un tubo a sezione circolare di lunghezza $l = 80$ cm e diametro $d = 50$ mm. Assunto per il fattore di attrito il valore medio $f = 0,01$ e supposto il moto isoentropico nel convergente e adiabatico nel condotto, determinare la portata quando la pressione di scarico a valle risulta eguale rispettivamente a:

- a) $p_s = 2$ ata
b) $p_s = 7$ ata

Poiché non si ha a disposizione un diagramma analogo a quello di fig. 4.6.4 per gas ideale con $k = 1,3$, la determinazione della portata può essere fatta solo dopo aver confrontato tra di loro il valore dei rapporti $\frac{p^*}{p_0}$ e $\frac{p_s}{p_0}$.

Se $\frac{p^*}{p_0} \geq \frac{p_s}{p_0}$ la lunghezza del condotto è tale

che $f \frac{l}{d} = \left(f \frac{l_{\max}}{d} \right)_{M_1}$ e quindi massima risulta la

portata per le condizioni (di ristagno e geometriche) fissate.

Se invece $\frac{p^*}{p_0} < \frac{p_s}{p_0}$ la portata non risulta massima per le condizioni imposte e la sua determinazione ha luogo con procedimento iterativo come viene in seguito illustrato per una delle due condizioni di pressione di scarico imposte.

a) Indicate con 1 e 2 le sezioni di ingresso e di uscita del condotto cilindrico e supposto:

$$f \frac{l}{d} = \left(f \frac{l_{\max}}{d} \right)_{M_1} = \frac{0,01 \cdot 0,80}{0,05} = 0,16$$

dalle funzioni del moto di Fanno (tabella C1) si ottiene:

$$M_1 = 0,7379$$

$$\left(\frac{p_1}{p^*} \right)_F = 1,3974$$

e poiché il moto è isoentropico nell'ugello in corrispondenza al valore di M_1 la tabella A1 porge:

$$\frac{p_1}{p_0} = 0,7116; \quad \frac{T_1}{T_0} = 0,9245$$

e quindi:

$$p_1 = 0,7116 \cdot p_0 = 5,6928 \text{ ata}$$

$$T_1 = 0,9245 \cdot T_0 = 295,84 \text{ °K}$$

$$\rho_1 = 3,635 \text{ kg/m}^3$$

$$u_1 = M_1 c_1 = M_1 \sqrt{k R T_1} = 329,93 \text{ m/sec}$$

$$W = u_1 \rho_1 A = 2,354 \text{ kg/sec.}$$

Il rapporto tra la pressione critica e quella di ristagno si esprime:

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{p^*}{p_1} \right)_F \frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{1,3974} 0,7116 = 0,5092$$

e poiché:

$$\frac{p_s}{p_0} = \frac{2}{8} < \frac{p^*}{p_0} = 0,5092$$

la portata precedentemente calcolata risulta quella richiesta:

$$W = W_{\max} = 2,354 \text{ kg/sec.}$$

b) In questo caso si ha:

$$\frac{p_s}{p_0} = \frac{7}{8} = 0,875 > \frac{p^*}{p_0} = 0,5092$$

la portata quindi non può risultare quella massima. La sua determinazione verrà fatta con un metodo iterativo fissando un valore di M_1 , evidentemente inferiore a quello del caso precedente.

Ad esempio fissato $M_1 = 0,6$ dalla tabella C1 si ha:

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d} \right)_{0,6} = 0,54086; \quad \left(\frac{p_1}{p^*} \right)_F = 1,74091$$

e quindi:

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d} \right)_{M_2} = 0,54086 - 0,16 = 0,38086$$

da cui:

$$M_2 = 0,6429; \quad \left(\frac{p_2}{p^*} \right)_F = 1,6187.$$

Essendo $\frac{p_2}{p_0} = \frac{p_s}{p_0} = 0,875$ si può ora calcolare il rapporto:

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{p_1}{p^*} \right)_F \left(\frac{p^*}{p_2} \right)_F \frac{p_2}{p_0} = 0,94103$$

a cui corrisponde, nella tabella A1, $M_1 = 0,30686$.

Questo valore è notevolmente discorde da quello assunto inizialmente $M_1 = 0,6$ e quindi il procedimento di calcolo deve essere ripetuto assumendo $M_1 = 0,30686$ come nuovo valore iniziale. Si ottiene così la successione:

M_1 (fissato)	M_1 (calcolato)
0,30686	0,4368
0,4368	0,4077
0,4077	0,41622
0,41622	0,41386
0,41386	0,41456
0,41456	0,41435
0,41435	0,41439

che permette di determinare con buona approssimazione il valore richiesto $M_1 = 0,41437$.

La portata può essere ora calcolata secondo il procedimento già descritto nel caso a); in corrispondenza al valore di M_1 la tabella A1 porge:

$$\frac{p_1}{p_0} = 0,89566$$

$$\frac{T_1}{T_0} = 0,97489$$

e quindi:

$$p_1 = 0,89566 \cdot p_0 = 7,165 \text{ ata}$$

$$T_1 = 0,97489 \cdot T_0 = 311,96^\circ \text{K}$$

$$\rho_1 = 4,33 \text{ kg/m}^3$$

$$u_1 = M_1 c_1 = M_1 \sqrt{kRT_1} = 190,25 \text{ m/sec}$$

$$W = u_1 \rho_1 A = 1,61 \text{ kg/sec.}$$

B - MOTO ISOTERMO PER UN GAS IDEALE

4.7 GENERALITÀ.

Viene qui trattato il moto di un gas a comportamento ideale che defluisce in condizioni isoterme in un condotto a sezione costante con variazioni trascurabili di energia potenziale; viene considerata l'azione dell'attrito concomitante ad uno scambio termico con l'esterno di entità tale da mantenere il gas a temperatura costante durante tutto il deflusso.

Tipica applicazione di questo regime di deflusso (in condizioni naturalmente subsoniche) si ha nei lunghi gasdotti interrati o no, ove si hanno

(per effetto dell'attrito) notevoli variazioni di pressione che impediscono di trattare, anche in prima approssimazione, il moto come quello di un fluido incomprimibile; d'altra parte, per effetto degli scambi termici si può considerare il gas ovunque in equilibrio termico con l'ambiente esterno, e quindi in condizioni isoterme (almeno con buona approssimazione).

Per trattare questo tipo di deflusso si impiegano le equazioni dell'energia meccanica (1.3.1), di continuità (1.3.6) e l'equazione di stato del gas ideale (1.3.8) che nelle ipotesi poste assumono la forma:

- equazione dell'energia meccanica:

$$\frac{du^2}{2} + v \cdot dp + f \frac{dx}{d} \frac{u^2}{2} = 0 \quad (4.7.1)$$

- equazione di continuità:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = 0 \quad (4.7.2)$$

- equazione di stato:

$$\frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} = 0. \quad (4.7.3)$$

Ricordando poi che è $M = u / \sqrt{kRT}$, si ricava ($T = \text{cost}$):

$$\frac{dM}{M} = \frac{du}{u}. \quad (4.7.4)$$

Dividendo la (4.7.1) per $p v = RT$ si ricava:

$$\frac{u du}{RT} + \frac{dp}{p} + f \frac{dx}{d} \frac{u^2}{2RT} = 0$$

che si può anche scrivere nella forma:

$$kM^2 \frac{du}{u} + \frac{dp}{p} + f \frac{dx}{d} \frac{k}{2} M^2 = 0. \quad (4.7.5)$$

Le espressioni (4.7.2), (4.7.3) e (4.7.4) porgono:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{du}{u} = -\frac{dM}{M} = \frac{d\rho}{\rho}. \quad (4.7.6)$$

Dalla (4.7.5) e dalla (4.7.6) si ricava:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{du}{u} = -\frac{dM}{M} = \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{kM^2}{2(1-kM^2)} f \frac{dx}{d} \quad (4.7.7)$$

Dalla relazione di carattere generale (1.5.4):

$$T_0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)$$

differenziando in forma logaritmica e ricordando che $dT = 0$, si ricava:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{k-1}{1} \frac{dM}{M^2} + \frac{k-1}{2} \frac{dM}{M} \quad (4.7.8)$$

che, ricordando l'espressione di $\frac{dM}{M}$ ricavabile dalla (4.7.7), porge:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{k(k-1)M^2}{\left(\frac{2}{M^2} + k-1\right)(1-kM^2)} f \frac{dx}{d} \quad (4.7.9)$$

In maniera analoga a quanto fatto per il moto adiabatico le relazioni (4.7.7) e (4.7.9) permettono di stabilire il verso di variazione lungo il deflusso isoterma delle diverse grandezze dinamiche e termodinamiche; nel caso specifico delle grandezze qui esaminate, ricordando che $f \frac{dx}{d}$ è sempre positivo nel senso del moto, si può notare come queste variano in senso opposto a seconda che $M > 1/\sqrt{k}$ o $M < 1/\sqrt{k}$; il valore $1/\sqrt{k}$ (numero < 1) è il limite a cui tende il numero di Mach M nel moto isoterma, sia partendo da condizioni supersoniche che subsoniche. La tabella che segue riassume questi risultati:

	$M < 1/\sqrt{k}$ (subsonico)	$M > 1/\sqrt{k}$ (subsonico o supersonico)
Pressione	decresce	cresce
Densità	decresce	cresce
Velocità	cresce	decresce
Numero di Mach	cresce	decresce
Temperatura d'arresto	cresce	decresce

Ricordando che il calore scambiato è esprimibile con la relazione:

$$dQ = c_p dT + \frac{du^2}{2} = c_p dT_0 \quad (4.7.10)$$

si può concludere che per $M < 1/\sqrt{k}$ bisogna fornire calore al gas fluente per mantenerlo in condizioni isoterme, mentre nel moto supersonico o comunque per $M > 1/\sqrt{k}$ bisogna sottrarre calore al gas fluente per mantenerne costante la temperatura.

In analogia a quanto fatto per il moto di Fanno, è anche qui utile calcolare l'espressione della lunghezza massima di condotto $l_{\max}$ per cui il moto è possibile (senza discontinuità) per un assegnato valore del numero di Mach M nella sezione considerata. Dalla (4.7.7) si ottiene:

$$\int_0^{l_{\max}} f \frac{dx}{d} = \int_{M^2}^{1/k} \frac{1-kM^2}{kM^4} dM^2 \quad (4.7.11)$$

ove l'integrale è esteso tra i limiti $x = 0$, ove $M = M$, e lo stato limite del moto isoterma ove $x = l_{\max}$ e $M = 1/\sqrt{k}$ (stato di riferimento del moto isoterma). Integrando si ricava:

$$f \frac{l_{\max}}{d} = \frac{1-kM^2}{kM^2} + \ln(kM^2) \quad (4.7.12)$$

Denotando il valore delle varie grandezze allo stato di riferimento (ove $M = 1/\sqrt{k}$ e $l = l_{\max}$) coi simboli p^{*t} , u^{*t} ecc., ricordando che $u = M\sqrt{kRT}$ ($T = \text{cost}$) si ricava:

$$\frac{u}{u^{*t}} = \sqrt{k} \cdot M \quad (4.7.13)$$

Si ricava analogamente:

$$\frac{\rho}{\rho^{*t}} = \frac{1}{\sqrt{k} \cdot M} \quad (4.7.14)$$

$$\frac{p}{p^{*t}} = \frac{1}{\sqrt{k} \cdot M} \quad (4.7.15)$$

$$\frac{p_0}{p_0^{*t}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\frac{2k}{3k-1} \right)^{k/(k-1)} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{k/(k-1)} \frac{1}{M} \quad (4.7.16)$$

$$\frac{T_0}{T_0^{*t}} = \frac{2k}{3k-1} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \quad (4.7.17)$$

La relazione (4.7.12) è tabulata in Appendice (per alcuni valori di k (tab. D)). Per $k = 1,4$ le relazioni fondamentali del moto isoterma da (4.7.12) a (4.7.17) sono riportate in forma grafica nel

diagramma di fig. 4.7.1. L'impiego di queste relazioni è analogo a quanto già descritto per il moto adiabatico, e verrà esemplificato nell'applicazione numerica riportata qui sotto.

PROBLEMA 4.7.1

Un gasdotto della lunghezza $l = 200$ km ha diametro interno $d = 80$ cm; nella sezione di uscita deve scaricare una portata $W_{v2} = 2 \cdot 10^6$ m³/giorno di gas naturale (che si può trattare come un gas ideale, con $k = 1,3$ (costante) e $M_m = 16$) alla pressione $p_2 = 2$ ata e temperatura $t_2 = 20$ °C. Ipotizzando un deflusso isotermo calcolare la pressione a cui il gas deve alimentare il gasdotto nella sezione di ingresso, ed il flusso termico globalmente scambiato nel gasdotto. (Viscosità dinamica del gas naturale in oggetto $\mu = 0,01$ centipoises; scabrezza relativa del tubo $\varepsilon/d = 0,00005$).

Si calcola innanzitutto la portata di massa W di gas nel gasdotto:

$$W = \frac{W_{v2}}{v_2} = \frac{2 \cdot 10^6}{\frac{8317}{16} \frac{237,15 + 20}{2 \cdot 9,81 \cdot 10^4}} = 2574 \cdot 10^3 \text{ kg/giorno} = 107,25 \cdot 10^3 \text{ kg/h.}$$

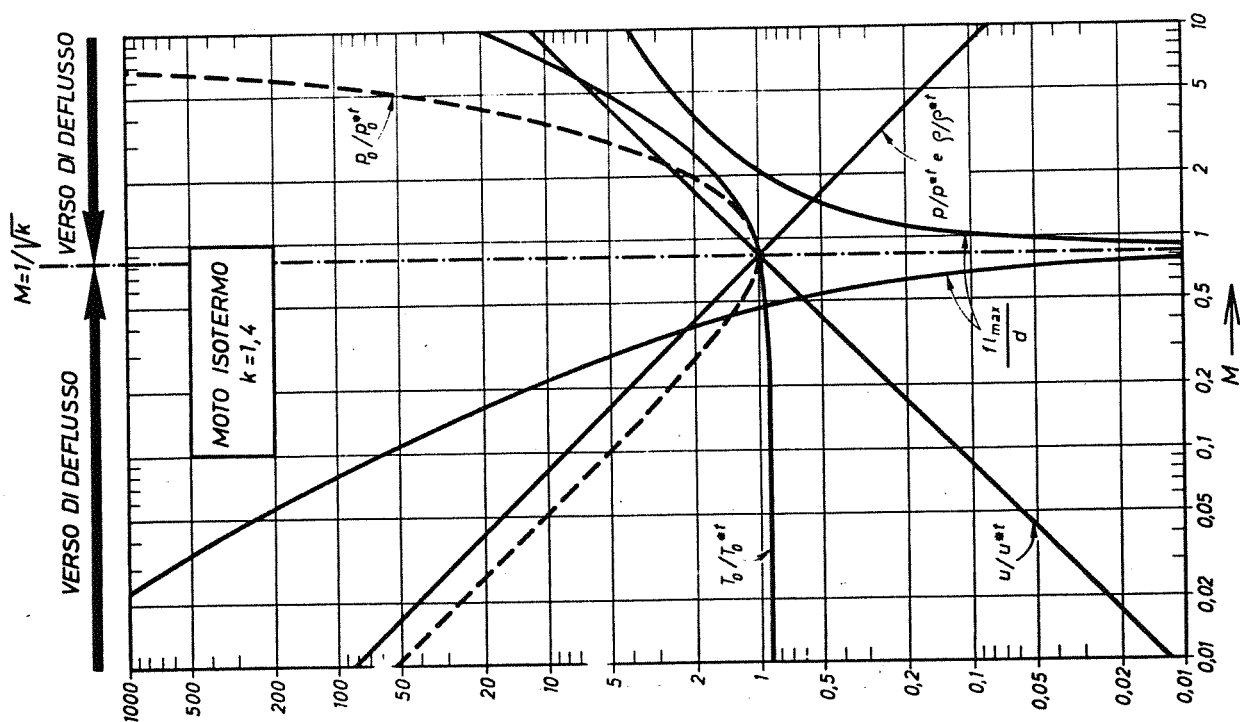


Fig. 4.7.1. - Funzioni del moto isotermo per un gas ideale con $k = 1,4$.

Numero di Reynolds:

$$Re = \frac{4W}{\pi d \mu} = \frac{4 \cdot 107,25 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,8 \cdot 0,01 \cdot 3,6} = 4,744 \cdot 10^6.$$

Dal diagramma di Moody (fig. 4.1.2) si ricava il valore del fattore d'attrito $f = 0,0112$.

Numero di Mach nella sezione di sbocco del gasdotto:

$$M_2 = \frac{u_2}{c} = \frac{4 W_{v_2} / (\pi d^2)}{\sqrt{kRT}} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^6 (24 \cdot 3600) (3,14 \cdot 0,8^2)}{\sqrt{1,3 \cdot \frac{8317}{16} (273,15 + 20)}} = \frac{46,08}{445,08} = 0,1035$$

Dalla (4.7.12) o per interpolazione dalla tabella in Appendice D si ricava:

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_2} = 66,53$$

Ricordando che risulta:

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_1} - \left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_2} = f \frac{l}{d}$$

si ricava:

$$\left(f \frac{l_{\max}}{d}\right)_{M_1} = 66,53 + 0,0112 \cdot \frac{200 \cdot 10^3}{0,8} = 66,53 + 2800 = 2866,53.$$

Si ricava quindi, risolvendo per tentativi l'equazione (4.7.12) o per interpolazione dalla tabella in Appendice:

$$M_1 = 0,01636.$$

Dalla relazione (4.7.15) si ricava:

$$\left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_1} = 53,61; \quad \left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_2} = 8,474$$

da cui:

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_1} / \left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_2} = \frac{53,61}{8,474} = 6,33$$

$$p_1 = 2 \cdot 6,33 = 12,66 \text{ ata}$$

Dalla relazione (1.5.4) si può ricavare:

$$T_{01} = 293,162 \text{ } ^\circ\text{K}; \quad T_{02} = 293,621 \text{ } ^\circ\text{K}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
 q &= c_p (T_{02} - T_{01}) W = \frac{k}{k-1} \frac{\bar{R}}{M_m} (T_{02} - T_{01}) \cdot W \\
 &= \frac{1,3}{0,3} \frac{8317}{4186 \cdot 16} (0,459) \cdot 107,25 \cdot 10^3 \frac{\text{kcal}}{\text{h}} \\
 &= 26490 \text{ kcal/h}
 \end{aligned}$$

CAPITOLO V

MOTO DI RAYLEIGH

MOV È + ADIABATICO PERÒ È REVERSIBILE

5.1 GENERALITÀ.

Col nome *moto di Rayleigh* si designa il moto internamente reversibile a regime permanente di un fluido comprimibile in un condotto a sezione costante, con scambio termico (e non di lavoro) con l'esterno; l'attributo della reversibilità interna impone l'assenza di fenomeni dissipativi interni, in particolare quindi dell'attrito; si suppone inoltre trascurabile la variazione di energia potenziale del fluido.

Le importanti conclusioni cui conduce la trattazione del moto di Rayleigh trovano applicazione pratica soprattutto nella analisi del processo di ossidazione del combustibile nelle camere di combustione a sezione costante (ad esempio dei motori a getto) quando si può considerare (almeno in prima approssimazione) che l'aggiunta di combustibile al flusso primario di gas comburente (solitamente aria in eccesso rispetto alla quantità ste-

chiometrica) ed il processo di combustione non modifichino apprezzabilmente la composizione del flusso gassoso; è noto che in tal caso il processo adiabatico di combustione si può considerare equivalente ad un processo con scambio termico esterno del cosiddetto calore di reazione. In queste condizioni, dato anche la limitata lunghezza del condotto interessato alla combustione, è senz'altro lecito trascurare l'effetto dell'attrito rispetto all'effetto della combustione stessa sulla variazione delle proprietà del flusso gassoso.

Una equazione nelle variabili termodinamiche della linea di Rayleigh si ricava considerando le equazioni dell'energia meccanica (1.3.1) e di continuità (1.3.6) che nelle ipotesi poste assumono la forma:

- equazione dell'energia meccanica:

$$v dp + u du = 0 \quad (5.1.1)$$

- equazione di continuità:

$$\frac{du}{u} - \frac{dv}{v} = 0. \quad (5.1.2)$$

Dalle equazioni (5.1.1) e (5.1.2) si ricava immediatamente:

$$dp + \left(\frac{u}{v}\right)^2 dv = 0 \quad (5.1.3)$$

che, integrata tenendo conto della (1.3.5) fornisce:

$$p + \left(\frac{W}{A}\right)^2 v = \text{cost} \quad (5.1.4)$$

La linea di Rayleigh resta quindi definita dalla conoscenza di un suo stato termodinamico (espresso dal valore di una coppia di variabili termodinamiche indipendenti, in particolare p e v) e dal valore della relativa portata specifica di massa $G = W/A$.

Una equazione della linea di Rayleigh nella variabile termodinamica p e nella variabile meccanica u si trova immediatamente dalla (5.1.4) e dalla (1.3.5). Si ricava:

$$p + \frac{W}{A} u = \text{cost} \quad (5.1.5)$$

La linea di Rayleigh è quindi rappresentata da un segmento di retta nel diagramma termodinamico $p-v$; lo stesso segmento di retta rappresenta la linea di Rayleigh anche nel diagramma $p-u$, ove la scala della velocità sia tale che risulti $u = v \frac{W}{A}$; si veda la figura 5.1.1. Il valore della pendenza

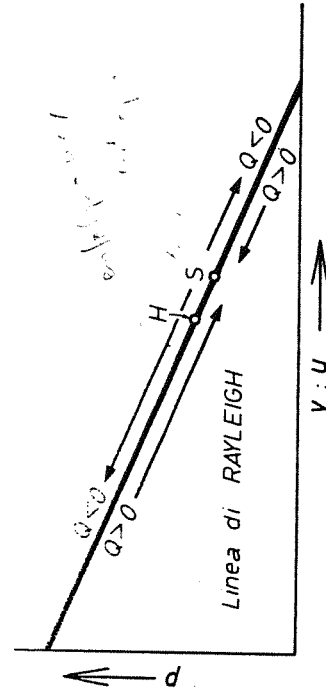


Fig. 5.1.1. - Linea di Rayleigh nel diagramma $p-v$ oppure $p-u$.

della linea di Rayleigh nel diagramma di fig. 5.1.1 risulta:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{\text{Ray}} = -\left(\frac{W}{A}\right)^2 = -\frac{u^2}{v^2} = -G^2 \quad (5.1.6)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_{\text{Ray}} = -\frac{W}{A} = -\frac{u}{v} = -G. \quad (5.1.7)$$

Quindi il valore della portata specifica $G = W/A$ definisce la pendenza della linea di Rayleigh nel diagramma $p-v$ (oppure $p-u$).

Nella figura 5.1.2 è tracciata (qualitativamente)

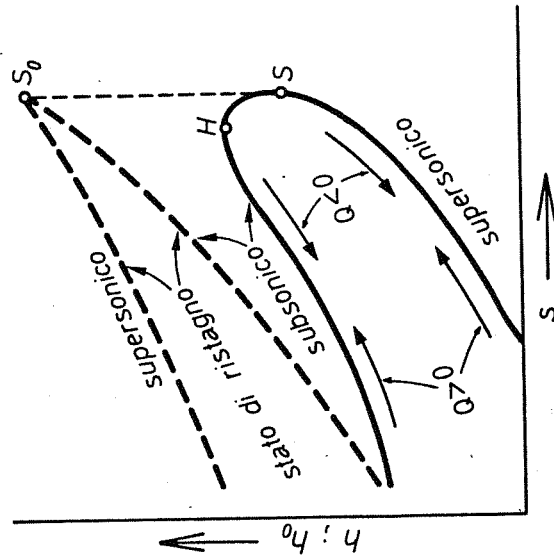


Fig. 5.1.2. - Linea di Rayleigh nel diagramma $h-s$ (di Mollier); le linee tratteggiate rappresentano gli stati di ristagno dei due rami della linea di Rayleigh, relativi a regime di moto subsonico e supersonico.

te) la linea di Rayleigh nel diagramma termodinamico entalpia-entropia ($h-s$; diagramma di Mollier). Si vede come la linea di Rayleigh presenta un punto di massima entropia (punto S) che la divide in due rami. Il ramo superiore della linea di Rayleigh è caratterizzato da moto subsonico del fluido, mentre il ramo inferiore è caratterizzato da moto supersonico del fluido: nel punto S il moto è esattamente sonico, ossia in S si ha $M = 1$. Quest'ultimo fatto si dimostra immediatamente osservando che dalla relazione (5.1.6) si ricava:

$$\left\{ \begin{aligned} u du + v dp &= 0 \\ \frac{dv}{v} + \frac{ds}{s} &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow 0 K! \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{Ray}} = u^2. \quad (5.1.6')$$

In particolare lungo la linea di Rayleigh nel punto S (di massima entropia) risulta, ricordando la (1.4.6):

$$u^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{Ray}} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = c^2 \quad (5.1.8)$$

ovvero:

$$M = u/c = 1. \quad (5.1.9)$$

Nel moto di Rayleigh il fluido evolve in maniera internamente reversibile. Vale quindi la relazione (Secondo Principio della Termodinamica, cfr. (1.3.7)):

$$\delta Q = T ds. \quad (5.1.10)$$

D'altronde il Primo Principio della Termodi-

namica porge, nelle ipotesi poste per il moto di Rayleigh (cfr. (1.3.3)):

$$\delta Q = dh + d \frac{u^2}{2} = dh_0. \quad \left(\begin{array}{l} \text{ho } dh_0 \text{ x da moto} \\ \text{non termodinamica} \end{array} \right) \quad (5.1.11)$$

Dalle relazioni (5.1.10) e (5.1.11) si ricava:

$$T ds = dh_0. \quad (5.1.12)$$

La relazione (5.1.12) permette immediatamente di stabilire che il punto S, di massima entropia lungo la linea di Rayleigh, è anche il punto di massima entalpia totale (o entalpia di ristagno). Gli stati di ristagno della linea di Rayleigh sono rappresentati, nel diagramma di fig. 5.1.2, dalla linea tratteggiata, divisa in due rami dal punto S₀ (di massima entalpia totale): il ramo superiore è relativo a stati supersonici del fluido; il ramo inferiore a stati subsonici.

Si noti che il punto di massima entalpia lungo la linea di Rayleigh si trova nel ramo di moto subsonico (punto H).

Considerando l'espressione del Secondo Principio della Termodinamica (5.1.10) si ricava che, nel moto di Rayleigh, fornire calore al fluido ($\delta Q > 0$) ha come conseguenza l'aumento di entropia del fluido stesso nel senso del moto; l'opposto accade sottraendo calore al fluido ($\delta Q < 0$). Nel moto subsonico perciò il numero di Mach aumenta (nel senso del moto) fornendo calore al fluido, mentre diminuisce sottraendo calore al fluido; nel moto supersonico invece il numero di Mach dimi-

nuisce fornendo calore al fluido, mentre aumenta sottraendo calore al fluido. Fornendo calore lo stato del fluido evolve sempre verso lo stato a $M = 1$ (punto S nei diagrammi delle figure 5.1.1 e 5.1.2); sottraendo calore lo stato del fluido evolve invece nel senso opposto.

5.2 MOTO DI RAYLEIGH PER GAS IDEALI.

Si suppone ora che il fluido che evolve secondo ipotesi di moto di Rayleigh sia un gas a comportamento ideale e calori specifici caratteristici costanti. In tali ipotesi si possono ricavare alcune relazioni di estrema utilità pratica. Applicando infatti la relazione (5.1.5) tra due stati (lungo una trasformazione di Rayleigh) nei quali i valori dei parametri vengono caratterizzati con i pedici 1 e 2, tenendo conto delle relazioni (1.3.5) e (1.4.8) si ricava immediatamente:

$$p_2(1 + kM_2^2) = p_1(1 + kM_1^2) \quad (5.2.1)$$

cioè: $\frac{p + \rho u^2}{\rho} = \text{cost}$ $\rightarrow$ $\int F_A = W(u_2 - u_1)$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \quad (5.2.2)$$

Il rapporto tra i valori delle temperature in funzione dei numeri di Mach può essere ricavato osservando che risulta, nelle ipotesi poste:

$$(5.2.1) \quad \frac{u_2}{c_1} = \frac{u_2}{c_2} \frac{c_2}{c_1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_2}{p_1} \frac{u_2}{u_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{M_2 \sqrt{kRT_2}}{M_1 \sqrt{kRT_1}} \quad (5.2.3)$$

da cui risulta:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \quad (5.2.4)$$

e quindi per la (5.2.2):

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \left(\frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \right)^2 \quad (5.2.5)$$

Tenendo conto della relazione (1.5.4):

$$T_0 = T \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)$$

e dalla relazione (5.2.5) si ricava per il rapporto delle temperature di ristagno:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{M_2^2 (1 + kM_1^2)^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right)}{M_1^2 (1 + kM_2^2)^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)} \quad (5.2.6)$$

Tenendo conto della relazione (1.5.6):

$$p_0 = p \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad \text{mm}$$

e della relazione (5.2.2) si ricava per il rapporto delle pressioni di ristagno:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{1 + kM_1^2}{1 + kM_2^2} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (5.2.7)$$

Nelle ipotesi poste l'equazione di continuità (1.3.5) e l'equazione di stato (1.3.8) porgono:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{T_2} \frac{T_1}{p_1} \quad (5.2.8)$$

da cui, applicando le relazioni (5.2.2) e (5.2.5) si ricava:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{1 + kM_2^2}{1 + kM_1^2} \quad (5.2.9)$$

Anche il valore della variazione di entropia tra gli stati 1 e 2 della linea di Rayleigh può essere facilmente espresso in funzione dei numeri di Mach M_1 ed M_2 (e delle proprietà del gas ideale in considerazione). Ricordando infatti l'espressione della variazione entropica per un gas ideale:

$$\frac{S_2 - S_1}{R} = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} - \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (5.2.10)$$

applicando le relazioni (5.2.2) e (5.2.5) si ricava, dopo semplici passaggi algebrici:

$$\frac{S_2 - S_1}{R} = \ln \left[\left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{\frac{2k}{k-1}} \left(\frac{1 + k M_1^2}{1 + k M_2^2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \right] \quad (5.2.11)$$

Le relazioni messe in evidenza più sopra nei riquadri sono di grande utilità nella soluzione di problemi pratici in ipotesi di moto di Rayleigh per gas ideale a calori specifici caratteristici costanti: gli esercizi riportati nel seguito chiariranno questo fatto.

Nella forma in cui sono scritte tali relazioni però mal si prestano ad essere diagrammate o tabulate, il primo membro dipendendo funzionalmente dal valore di due parametri, i numeri di Mach negli stati considerati, oltreché beninteso dal valore di k caratteristico del gas ideale trattato. In analogia con quanto già visto su altri tipi di deflusso, si preferisce perciò diagrammare o tabulare le espressioni che si ottengono da quelle scritte più sopra quando applicate tra uno stato generico lungo la trasformazione di Rayleigh ed un prefissato stato di riferimento lungo la medesima trasformazione. Come stato di riferimento si sceglie ovviamente quello in cui si ha $M = 1$, ed in esso i valori dei parametri si indicano con l'asterisco, es.: p^* , T^* etc. Operando quindi, nelle espressioni riportate più sopra, le sostituzioni: $M_1 = 1$, $p_1 = p^*$, $T_1 = T^*$ etc. e $M_2 = M$, $p_2 = p$, $T_2 = T$ etc. (il pedice 2 non è ora più essenziale), si ottengono le relazioni:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(p/p^*)_{M_2}}{(p/p^*)_{M_1}}; \text{ etc.,}$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{p^*} &= \frac{k+1}{1+kM^2} \\ \frac{T}{T^*} &= \frac{M^2(k+1)^2}{(1+kM^2)^2} \\ \frac{T_0}{T_0^*} &= \frac{2(k+1)M^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)}{(1+kM^2)^2} \\ \frac{p_0}{p_0^*} &= \frac{k+1}{1+kM^2} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{k/(k-1)} \\ \frac{\rho}{\rho^*} &= \frac{u^*}{u} = \frac{1+kM^2}{(k+1)M^2} \\ \frac{S-S^*}{R} &= \ln \left[M^{2k/(k-1)} \left(\frac{1+k}{1+kM^2} \right)^{(k+1)/(k-1)} \right] \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Le prime cinque relazioni (5.2.12) sono tabulate in funzione del parametro M per diversi valori di k (tabelle E1, E2, E3). Dai valori tabulati si può risalire ai valori delle funzioni primitive relative a due stati qualsiasi lungo la trasformazione di Rayleigh osservando che risulta (con ovvio significato dei simboli):

ed anche:

$$\frac{S_2 - S_1}{R} = \left(\frac{S - S^*}{R} \right)_{M_2} - \left(\frac{S - S^*}{R} \right)_{M_1}.$$

Nel caso particolare di $k = 1,4$ le relazioni (5.2.12) (esclusa l'ultima) sono diagrammate nella figura 5.2.1; qualitativamente simili a questo sono i diagrammi relativi a differenti valori di k .

Si osserverà che le relazioni fondamentali trattate non considerano i parametri entalpia h ed entalpia totale h_0 ; ciò è perché il valore di questi parametri è immediatamente calcolabile dalla conoscenza della temperatura T e della temperatura totale T_0 , valendo per gas ideali le relazioni:

$$dh = c_p dT; \quad dh_0 = c_p dT_0. \quad (5.2.13)$$

Per quanto già detto considerando le relazioni

(5.1.10) e (5.1.12) le grandezze $\left(\frac{S - S^*}{R} \right)$ ed anche $\left(\frac{T_0}{T^*} \right)$ (cfr. la (5.2.13)) devono avere andamento crescente nel senso del deflusso se il calore è fornito al fluido dall'esterno, andamento decrescente nel

senso del deflusso se il calore è ceduto dal fluido all'esterno. Queste osservazioni permettono di fissare nel diagramma di fig. 5.2.1 il verso di evoluzione dei parametri del fluido nel moto di Rayleigh in dipendenza del segno dello scambio termico; le frecce a margine del diagramma mettono in evidenza il verso di evoluzione del numero di Mach M .

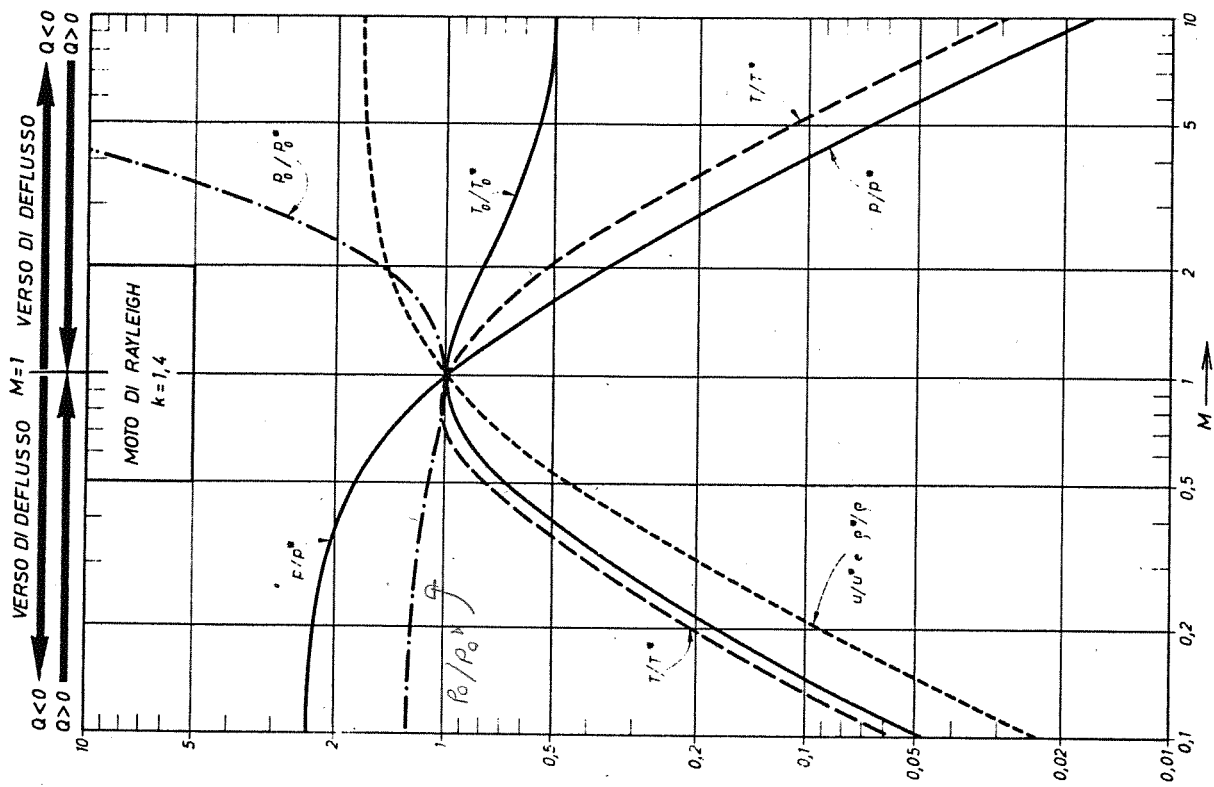


Fig. 5.2.1. - Funzioni del moto di Rayleigh per un gas ideale con $k = 1,4$.

Dalla seconda delle relazioni (5.2.12) si può inoltre facilmente ricavare che il massimo della temperatura e quindi dell'entalpia, - cfr. (5.2.13) - si ha nella linea di Rayleigh per gas ideale in corrispondenza al valore del numero di Mach $M = 1/\sqrt{k}$ (valore < 1).

Tutte queste osservazioni permettono di stabilire per il moto di Rayleigh per gas ideali la tabella riportata qui sotto.

parametro	CALORE			
	fornito al fluido		ceduto dal fluido	
	subsonico	moto supersonico	subsonico	moto supersonico
p	cala	cresce	cresce	cala
T, h	cresce $M < 1/\sqrt{k}$	cresce	cala $M = 1/\sqrt{k}$	cala
	cala $M > 1/\sqrt{k}$		cresce $M = 1/\sqrt{k}$	
p_0	cala	cala	cresce	cresce
T_0, h_0	cresce	cresce	cala	cala
ρ	cala	cresce	cresce	cala
u	cresce	cala	cala	cresce
s	cresce	cresce	cala	cala
M	cresce	cala	cala	cresce



La linea di Rayleigh per un gas ideale nel diagramma $T-s$ ha lo stesso andamento che nel diagramma $h-s$ (cfr. (5.2.13)).

PROBLEMA 5.2.1

In una camera di combustione cilindrica a sezione circolare di diametro $d = 9$ cm una portata $W = 3600$ kg/h di aria viene portata (in un processo che si assume equivalente ad un riscaldamento esterno reversibile) dalle condizioni (di ingresso) di temperatura $t_1 = 140$ °C e pressione $p_1 = 6$ ata, fino alla temperatura (di uscita) $t_2 = 850$ °C.

Considerando gas a comportamento ideale con $k = 1,4$ (costante) e massa molecolare $M_m = 28,97$ kg/kg mole, calcolare la pressione p_2 e la velocità u_2 del gas all'uscita della camera di combustione.

La velocità del gas nella sezione di ingresso si ricava immediatamente dalla relazione:

$$u_1 = \frac{W \cdot v_1}{A} = \frac{W \cdot \bar{R} \cdot T_1}{M_m \cdot p_1 \cdot \pi \cdot d^2 / 4} = \frac{3600 \cdot 8317 \cdot (273 + 140)}{28,97 (6 \cdot 98100) 3,14 \cdot 0,09^2 / 4} \frac{1}{3600} = 31,68 \text{ m/sec.}$$

La velocità del suono nel gas nelle condizioni in ingresso vale:

$$c_1 = \sqrt{kRT_1/M_m} = \sqrt{1,4 \cdot 8317 (273 + 140)/28,97} = 407,4 \text{ m/sec}$$

da cui si ricava:

$$M_1 = \frac{u_1}{c_1} = 0,077.$$

Applicando le opportune relazioni (5.2.12), oppure dal relativo diagramma (estensione di quello di figura 5.2.1), o dalla tabulazione (E2 in Appendice) si valutano:

$$\left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_1} = 2,380; \quad \left(\frac{T}{T^*}\right)_{M_1} = 0,03419;$$

$$\left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_1} = 0,02853; \quad \left(\frac{u}{u^*}\right)_{M_1} = 0,01437.$$

Si può quindi ricavare il rapporto $\left(\frac{T}{T^*}\right)_{M_2}$ osservando che risulta:

$$\left(\frac{T}{T^*}\right)_{M_2} = \left(\frac{T}{T^*}\right)_{M_1} \cdot \frac{T_2}{T_1} = 0,03419 \frac{850 + 273}{140 + 273} = 0,09290.$$

Risolvendo la seconda delle relazioni (5.2.12), o ricorrendo alle tabulazioni o ai diagrammi già citati, si ricava il corrispondente valore del numero di Mach nella sezione d'uscita M_2 .

Si trova:

$$M_2 = 0,13.$$

(Il valore $M_2 = 5,5$, anch'esso soluzione della seconda delle relazioni (5.2.12) in corrispondenza a $(T/T^*)_{M_2} = 0,09290$ - cfr. § 5.2.1 - non viene considerato in quanto per semplice cessione di calore non si può avere passaggio da moto subsonico a moto supersonico).

In corrispondenza a $M_2 = 0,13$ si ricava:

$$\left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_2} = 2,3445; \quad \left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_2} = 0,077; \quad \left(\frac{u}{u^*}\right)_{M_2} = 0,03965$$

Risulta anche:

$$T^* = T_1/(T/T^*)_{M_1} = \frac{(273 + 140)}{0,03419} = 12079,6 \text{ }^\circ\text{K}$$

$$T_0^* = T^* \left(1 + \frac{k-1}{2}\right) = T^* \cdot 1,2 = 14495,5 \text{ }^\circ\text{K}.$$

Si possono quindi calcolare le grandezze richieste come segue:

$$u_2 = u_1 \left(\frac{u}{u^*}\right)_{M_2} / \left(\frac{u}{u^*}\right)_{M_1} = 31,68 \frac{0,03965}{0,01437} = 87,35 \text{ m/sec} \quad ***$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_2} / \left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_1} = 6 \frac{2,3445}{2,38} = 5,91 \text{ ata} \quad ***$$

Queste relazioni coincidono con le (2.2.2), (2.2.3) e (2.2.1) nell'ordine, che, assieme all'equazione di stato del fluido, legano coppie di stati corrispondenti attraverso un'onda d'urto normale.

Il verificarsi di un'onda d'urto normale lungo un deflusso di Rayleigh dunque fa passare il fluido da uno stato sul ramo supersonico della curva di Rayleigh (stato a), allo stato di uguale entalpia totale sul ramo subsonico della medesima linea di Rayleigh (stato b).

Ciò premesso si vuole analizzare ora in dettaglio il problema di maggiore importanza pratica nel campo del moto di Rayleigh, che consiste nella determinazione dello stato finale (p_2 , T_2 , u_2 , M_2 , T_{02} etc.) di un fluido che, a partire da condizioni iniziali determinate (p_1 , T_1 , u_1 , M_1 , T_{01} etc.), è sottoposto (nelle ipotesi di moto di Rayleigh) allo scambio termico esterno Q_{12} (riferito all'unità di massa di fluido). Naturalmente tale scambio termico esterno potrà essere equivalentemente ottenuto mediante un processo di combustione interna, secondo quanto precisato in precedenza.

Questo problema viene trattato nell'ipotesi che il fluido evolvente sia un gas ideale a calori specifici caratteristici costanti, e ciò in aderenza con le ipotesi frequentemente assunte; molte delle conclusioni cui si perviene hanno però validità non limitata ai soli gas ideali.

Si osserva innanzitutto che la conoscenza dei parametri che caratterizzano lo stato iniziale determina una particolare curva di Rayleigh; resta tra gli altri quindi determinato il valore della tem-

$$q_{12} = W_c (T_{02} - T_{01}) = W \frac{k}{k-1} \frac{\bar{R}}{M_m} T_0^* \left[\left(\frac{T_0}{T_0^*} \right)_{M_2} - \left(\frac{T_0}{T_0^*} \right)_{M_1} \right]$$

$$= 3600 \frac{1,4}{0,4} \frac{8317}{28,97} 14495,5 (0,0777 - 0,02853) \frac{1}{1000 \cdot 3600} \text{ kw}$$

$$= 716 \text{ kw}$$

$$= 616000 \text{ kcal/h}$$

5.3 STATO FINALE IN UNA TRASFORMAZIONE DI RAYLEIGH. LIMITI ALLA QUANTITÀ DI CALORE SCAMBIATA.

Si considerino innanzitutto due stati a e b di un fluido su una stessa linea di Rayleigh, aventi uguale valore dell'entalpia totale $h_{0a} = h_{0b}$; lo stato a sia sul ramo supersonico e lo stato b sul ramo subsonico della linea di Rayleigh. Si riconosce immediatamente che a e b sono stati che si corrispondono in un'onda d'urto normale. Essendo essi stati di una stessa linea di Rayleigh risulterà infatti, per le (5.1.2) e (5.1.5):

$$u_a \rho_a = u_b \rho_b \quad (5.3.1)$$

$$p_a + \rho_a u_a^2 = p_b + \rho_b u_b^2 \quad (5.3.2)$$

Ed inoltre, per le ipotesi poste: $\int_{a \rightarrow b} \frac{h_0}{\rho} = h_0$

$$h_a + \frac{u_a^2}{2} = h_b + \frac{u_b^2}{2} \quad (5.3.3)$$

peratura di ristagno massima su questa curva di Rayleigh T_0^* che, come si è visto, è relativo allo stato a numero di Mach $M = 1$: questo valore è calcolabile, noti M_1 e T_{01} , dalla terza delle relazioni (5.2.12). Noto inoltre il valore della quantità di calore scambiata per unità di massa del fluido evolvente Q_{12} , si può calcolare il valore della temperatura di ristagno T_{02} nello stato finale della trasformazione:

$$Q_{12} = c_p (T_{02} - T_{01}) = \frac{k}{k-1} R (T_{02} - T_{01}). \quad (5.3.4)$$

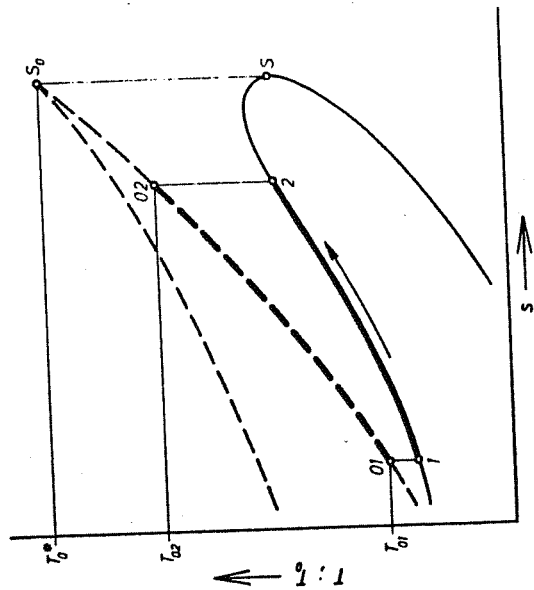


Fig. 5.3.1. - Trasformazione di Rayleigh $1 \rightarrow 2$ con condizioni iniziali subsoniche (stato 1). La quantità di calore scambiata dall'unità di massa di fluido è inferiore a quella massima compatibile con le condizioni iniziali.

Si supponga dapprima $Q_{12} > 0$, da cui segue $T_{02} > T_{01}$; potrà allora risultare $T_{02} \leq T_0^*$ oppure $T_{02} > T_0^*$.

Caso Ia ($Q_{12} > 0$; $T_{02} \leq T_0^*$): il problema ammette soluzione. In particolare se il moto è inizialmente subsonico (cfr. fig. 5.3.1) lo stato finale della trasformazione è univocamente determinato come lo stato a temperatura di ristagno T_{02} sul ramo subsonico della curva di Rayleigh.

Se il moto fosse inizialmente supersonico (cfr. fig. 5.3.2) il fluido potrebbe evolvere fino allo sta-

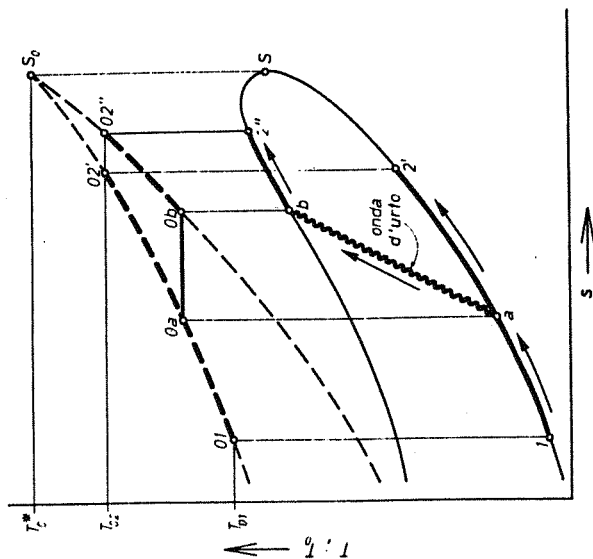


Fig. 5.3.2. - Trasformazione di Rayleigh ($1 \rightarrow 2'$ oppure $1 \rightarrow 2''$) con condizioni iniziali supersoniche (stato 1). La quantità di calore scambiata dall'unità di massa di fluido è inferiore a quella massimale compatibile con le condizioni iniziali.

to. 2' sul ramo supersonico della linea di Rayleigh, oppure fino allo stato 2" sul ramo subsonico della curva di Rayleigh, entrambi questi stati essendo caratterizzati dal valore T_{02} della temperatura di ristagno. Nel caso della trasformazione $1 \rightarrow 2''$ si avrebbe formazione di un'onda d'urto che fa passare il fluido da un generico stato a sul ramo supersonico della curva di Rayleigh allo stato b sul ramo subsonico della medesima curva di Rayleigh, con $T_{0a} = T_{0b}$; il fluido evolverà fino allo stato 2' ($M > 1$) oppure 2" ($M < 1$) in dipendenza di altri fattori che possono condizionare il moto, quali ad esempio la pressione imposta allo sbocco del condotto etc.

Se fosse esattamente $T_{02} = T_0^*$ il fluido evolverebbe fino allo stato a numero di Mach $M = 1$ (di massima temperatura totale) sulla linea di Rayleigh.

Caso Ib ($Q_{12} > 0$; $T_{02} > T_0^*$): in questo caso il problema non ammette soluzione, in quanto la quantità di calore che s'impone al fluido di scambiare Q_{12} è maggiore della quantità massima di calore che, fissato lo stato iniziale della trasformazione, il fluido può scambiare lungo una trasformazione di Rayleigh. Questa quantità massima di calore è data ovviamente dalla relazione:

$$Q_{\max} = c_p(T_0^* - T_{01}) \quad (5.3.5)$$

Se è imposta la quantità di calore Q_{12} che l'unità di massa del fluido deve scambiare vi dovrà essere necessariamente un mutamento delle condi-

zioni iniziali del deflusso tale da rendere possibile l'aumento imposto della temperatura di ristagno del fluido stesso.

Quanto detto più sopra trattando i casi Ia e Ib può essere espresso osservando che, fissate le condizioni iniziali di deflusso, resta determinato nel moto di Rayleigh con $Q > 0$ il valore del rapporto $\left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_1}$, (cfr. fig. 5.3.3) e quindi del gruppo adimensionale: $\frac{Q_{12}}{c_p T_0} \left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_1} \gg 0$

$$\left(\frac{Q_{\max}}{c_p T_0}\right)_{M_1} = \frac{T_0^* - T_{01}}{T_{01}} = \left[\left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_1}\right]^{-1} - 1.$$

La quantità di calore Q_{12} che si vuole far scambiare all'unità di massa di fluido in un moto di Rayleigh a partire dalle condizioni iniziali fissate determina il valore del gruppo adimensionale $Q_{12}/(c_p T_{01})$. Se risulta:

$$\left(\frac{Q_{12}}{c_p T_{01}}\right) \leq \left(\frac{Q_{\max}}{c_p T_0}\right)_{M_1}$$

il moto è possibile. Quando invece risulta:

$$\left(\frac{Q_{12}}{c_p T_{01}}\right) > \left(\frac{Q_{\max}}{c_p T_0}\right)_{M_1}$$

le condizioni fissate non sono compatibili con il moto di Rayleigh.

Il gruppo adimensionale $\left(\frac{Q_{\max}}{c_p T_0}\right)_M$ gioca quindi

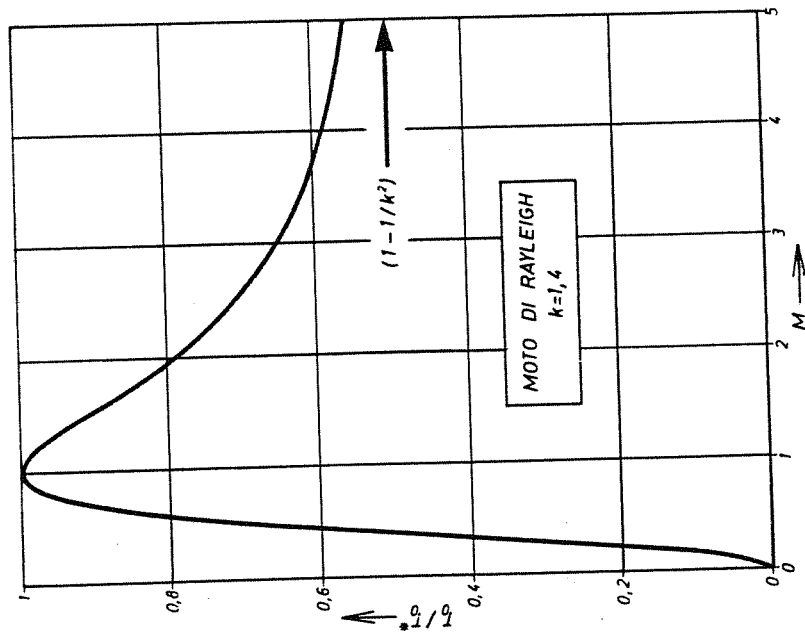


Fig. 5.3.3. - Funzione (T_0'/T_0'') per il moto di Rayleigh di un gas ideale con $k = 1,4$.

nel moto di Rayleigh con $Q > 0$, lo stesso ruolo del parametro $f \frac{l_{\max}}{d}$ nel moto di Fanno.

Caso II ($Q_{12} < 0$): questa situazione è assai meno interessante dal punto di vista pratico applicativo delle precedenti. Si osserva comunque che la

temperatura di ristagno T_0 tende al valore limite $(1 - 1/k^2)T_0^*$ al tendere del numero di Mach all'infinito (cfr. fig. 5.3.3) e quindi la quantità di calore massima che si può sottrarre al fluido inizialmente a temperatura di ristagno T_{01} in un moto di Rayleigh *sempre supersonico* è data da:

$$|Q_{\max}| = c_p \left[T_{01} - (1 - 1/k^2) T_0^* \right]. \quad (5.3.6)$$

Si potrà naturalmente avere formazione di una onda d'urto che fa passare il fluido dal ramo supersonico al ramo subsonico della curva di Rayleigh, fermo restando il valore della temperatura di ristagno.

Il ramo subsonico della curva di Rayleigh si estende fino a valore nullo della temperatura di ristagno, che si ha in corrispondenza a $M = 0$.

PROBLEMA 5.3.1

Nella camera di combustione cilindrica di un motore a getto l'aria entra alla velocità $u_1 = 115$ m/sec, alla temperatura $t_1 = 93^\circ \text{C}$ ed alla pressione $p_1 = 4,2$ ata.

Se il processo di combustione viene trattato come equivalente ad uno scambio termico esterno della quantità di calore (per unità di massa di fluido) $Q_{12} = 121,7$ kcal/kg, calcolare (assumendo ipotesi di moto di Rayleigh per gas ideale con $c_p = 0,24$ kcal/(kg $^\circ$ K), $k = 1,4$ (costante) e $M_m = 28,97$): la temperatura di ristagno T_{02} , il numero di Mach

M_2 , la temperatura T_2 , la pressione p_2 e la velocità u_2 del gas all'uscita della camera di combustione.

Si valuta innanzitutto la velocità del suono nelle condizioni di ingresso:

$$c_1 = \sqrt{k \frac{R}{M_m} T_1} = \sqrt{1,4 (8317/28,97) (93 + 273)} = 383,5 \text{ m/sec}$$

da cui deriva:

$$M_1 = \frac{u_1}{c_1} = \frac{115}{383,5} = 0,3.$$

Applicando le opportune relazioni (5.2.12), oppure dal diagramma di fig. 5.2.1 o ancora dalle tabelle (E2 in Appendice) si possono valutare:

$$\left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_1} = 0,34686; \quad \left(\frac{T}{T^*}\right)_{M_1} = 0,40887;$$

$$\left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_1} = 2,1314; \quad \left(\frac{u}{u^*}\right)_{M_1} = 0,19183.$$

Si calcola quindi $\left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_2}$ come segue:

$$\left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_2} = \left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_1} \frac{T_{02}}{T_{01}} = \left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_1} \left[1 + \frac{Q_{12}}{c_p T_{01}}\right];$$

$$T_{01} = T_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right) = (273 + 93)(1 + 0,2 \cdot 0,3^2) = 372,6^\circ \text{K}$$

$$\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right) = \left(\frac{T_{01}}{T_{01}^*}\right) \left(\frac{T_{01}^*}{T_{02}^*}\right) \left(\frac{T_{02}^*}{T_{02}}\right) = \left(\frac{0,4}{c_p T_{01}} + 1\right) \left(\frac{T_{01}}{T_{02}}\right)_{M_1}$$

$$\left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_2} = 0,34686 \left(1 + \frac{121,7}{0,24 \cdot 372,6}\right) = 0,81892.$$

Questo valore del rapporto $\left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)$ permette di ricavare, dalle tabelle già citate, il numero di Mach allo sbocco M_2 (necessariamente minore dell'unità). Si trova:

$$M_2 = 0,6$$

ed in corrispondenza:

$$\left(\frac{T}{T^*}\right)_{M_2} = 0,9167; \quad \left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_2} = 1,5957; \quad \left(\frac{u}{u^*}\right)_{M_2} = 0,57447.$$

Si può ora calcolare immediatamente il valore dei parametri richiesti come segue:

$$T_{02} = T_{01} \left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_2} / \left(\frac{T_0}{T_0^*}\right)_{M_1} = 372,6 \cdot 0,81892 / 0,34686$$

$$= 879,7^\circ \text{K}$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{T}{T^*}\right)_{M_2} / \left(\frac{T}{T^*}\right)_{M_1} = (273 + 93) 0,9167 / 0,40887$$

$$= 820,6^\circ \text{K}$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_2} / \left(\frac{p}{p^*}\right)_{M_1} = 4,2 \cdot 1,5957 / 2,1314$$

$$= 3,14 \text{ ata}$$

$$u_2 = u_1 \left(\frac{u}{u^*}\right)_{M_2} / \left(\frac{u}{u^*}\right)_{M_1} = 115 \cdot 0,57447 / 0,19183$$

$$= 344 \text{ m/sec.}$$

5.4 MOTO DI RAYLEIGH CON CONDIZIONI DI RISTAGNO INIZIALI FISSATE. LIMITAZIONE DI PORTATA.

Come applicazione di quanto esposto nel paragrafo precedente si vuole qui analizzare in dettaglio il moto di Rayleigh ($Q \geq 0$) in un condotto a sezione costante di area A alimentato tramite un convergente da un serbatoio in cui le condizioni del fluido (supposto gas ideale) sono fissate - cfr. fig. 5.4.1. Poiché nel convergente si ipotizza moto isentropico, nel condotto a sezione costante ha luogo un moto di Rayleigh con condizioni di ristagno p_{01} e T_{01} fissate nella sezione iniziale 1. Si vogliono esaminare le condizioni di moto al variare della pressione di scarico del condotto p_s per differenti valori della quantità di calore Q_{12} ceduta all'unità di massa di fluido.

Nel caso (limite) che risulti $Q_{12} = 0$ il moto è dovunque isentropico; le condizioni del fluido

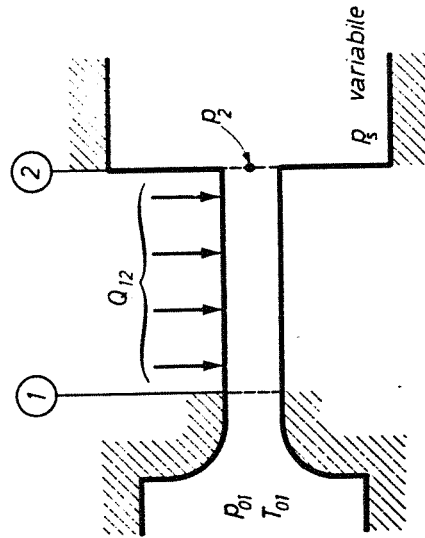


Fig. 5.4.1. - Moto di Rayleigh in un condotto alimentato da un ugello convergente.

non variano nel tratto di condotto a sezione costante ed il moto ha, in funzione della pressione allo scarico p_s , le caratteristiche dedotte nel § 3.4 per l'ugello convergente. In particolare al decrescere della pressione di scarico p_s a partire dal valore p_{01} la portata W ed il numero di Mach allo sbocco $M_2 (= M_1)$ crescono fino a che risulta $M_2 = M_1 = 1$, condizione che si ottiene quando (cfr. (3.2.4)) ⁽¹⁾:

$$\frac{p_s}{p_{01}} = \left(\frac{p^*}{p_{01/s}} \right) = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (5.4.1)$$

In corrispondenza a questo valore della pressione allo scarico p_s la portata raggiunge il valore massimo $(W_{\max})_s$, dato dalla (cfr. la relazione (3.4)):

$$(W_{\max})_s = A \sqrt{\frac{k}{RT_{01}}} p_{01} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \quad (5.4.2)$$

Per pressioni allo scarico ancora più basse, cioè per $\frac{p_s}{p_{01}} < \left(\frac{p^*}{p_{01/s}} \right)$, la pressione p_2 e tutti gli altri parametri che caratterizzano il deflusso nel condotto conservano il medesimo valore assunto quando risultava $(p_s/p_{01}) = (p^*/p_{01/s})$; si ha sempre $W = (W_{\max})_s$ e $M_2 = M_1 = 1$ e l'espansione del fluid-

⁽¹⁾ Il pedice s viene qui usato per sottolineare che il rapporto (p^*/p_{01}) è relativo a condizioni di deflusso isentropiche.

do dal valore di pressione p_2 allo sbocco al valore p_s di scarico ha luogo, con onde di espansione esterne, a valle della sezione di sbocco 2. L'andamento della portata W in funzione della pressione di scarico p_s si può ricavare (per gas ideale con $k = 1,4$) dalla curva con parametro $Q_{12}/(c_p T_{01}) = 0$ nel diagramma di fig. 5.4.2; la variabile parametrica e le coordinate sono state così scelte in quanto consentono di generalizzare i risultati.

Si consideri ora il caso che venga fornito calore (positivo) Q_{12} all'unità di massa di fluido nel condotto a sezione costante. Il valore di Q_{12} e le

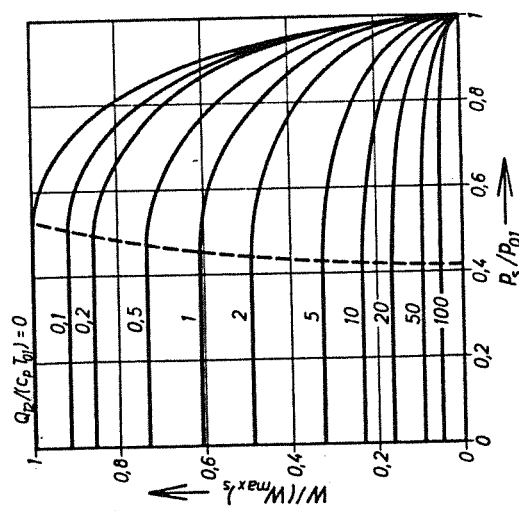


Fig. 5.4.2. - Variazione della portata W in funzione della pressione di scarico p_s relativamente al moto di Rayleigh di un gas ideale ($k = 1,4$) in un condotto alimentato da un ugello convergente (cfr. fig. 5.4.1), per diversi valori del parametro di scambio termico $Q_{12}/(c_p T_{01})$.

condizioni del fluido nel serbatoio permettono di calcolare il valore del parametro $Q_{12}/(c_p T_{01})$ ed anche il rapporto tra le temperature di ristagno $(T_{02}/T_{01})_R$ (¹) agli estremi del condotto a sezione costante ove ha luogo il deflusso di Rayleigh:

$$\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)_R = \frac{Q_{12}}{c_p T_{01}} + 1. \quad (5.4.3)$$

Il valore del rapporto $(T_{02}/T_{01})_R$ fissa, tramite la relazione (5.2.6), il legame tra il numero di Mach M_2 allo sbocco ed il numero di Mach M_1 all'imbocco del condotto a sezione costante. Trattandosi di moto subsonico con cessione di calore al fluido ($T_{02} > T_{01}$), risulterà sempre $M_2 > M_1$ (si veda anche il diagramma di fig. 5.2.1, tenendo conto che, nel caso considerato, risulta:

$$\left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)_R = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}^*}\right)_R / \left(\frac{T_{01}}{T_{01}^*}\right)_R > 1$$

e che il regime di moto è necessariamente subsonico, con al più condizioni soniche in 2); si può inoltre osservare che M_2 ed M_1 variano in verso concorde.

Fissate le condizioni di ristagno del gas a monte ed il valore del parametro $Q_{12}/(c_p T_{01})$, il valore del numero di Mach M_2 allo sbocco (e quindi anche il valore del numero di Mach M_1) dipen-

(¹) Il pedice R è qui usato per sottolineare che il rapporto (T_{02}/T_{01}) è relativo a deflusso di Rayleigh.

de dalla pressione p_s imposta allo scarico del condotto, ed anche quindi dal rapporto p_s/p_{01} . Il legame funzionale tra queste grandezze (per $M_2 < 1$, risultando allora $p_s = p_2$) si ricava osservando che

$$\frac{p_s}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_{01}} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)_R \cdot \left(\frac{p_1}{p_{01}} \right).$$

$p \left(\frac{p_1}{p_{01}} \right) p \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$
 $p_{01} M_1$ e quindi M_1
 (5.4.4)

Il rapporto $(p_2/p_1)_R$ nella (5.4.4) può essere espresso in funzione di M_1 ed M_2 a mezzo della relazione (5.2.2), mentre il rapporto (p_1/p_{01}) è esprimibile in funzione di M_1 tramite la relazione (1.5.6).

Ad ogni valore del numero di Mach nella sezione di sbocco M_2 , tramite il relativo valore di M_1 , corrisponde inoltre un valore di portata W calcolabile a mezzo della relazione (3.3.3):

$$W = A \sqrt{\frac{k}{RT_{01}}} p_{01} M_1 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{k+1}{2(1-k)}} \quad (5.4.5)$$

e quindi, per la (5.4.2), un valore del rapporto $W/(W_{\max})_s$ che risulta indipendente dalle condizioni di ristagno del gas nel serbatoio e dall'area della sezione del condotto A .

Facendo quindi variare il numero di Mach M_2 tra i limiti $0 \leq M_2 < 1$ si può tracciare la corrispondenza funzionale tra $p_s/p_{01} = (p_2/p_{01})$ e $W/(W_{\max})_s$ per differenti valori del rapporto $Q_{12}/(C_p T_{01})$: si ottengono, per gas ideale con $k = 1.40$, i tratti di

$$Q_{12}, T_{02}, T_{01}, M_1, M_2$$

$$\frac{Q_{12}}{M_1} \text{ dipende da } M_2 \text{ (e quindi } M_1)$$

curva a destra della linea tratteggiata del diagramma di fig. 5.4.2.

Da quanto detto sopra si ricava che, fissata la geometria del condotto, le condizioni di ristagno a monte ed il calore Q_{12} scambiato dall'unità di massa del fluido, al decrescere della pressione di scarico p_s a partire dal valore p_{01} , il numero di Mach nella sezione di sbocco cresce (a partire dal valore nullo) fino a raggiungere valore unitario; corrispondentemente il numero di Mach M_1 nella sezione ove inizia il moto di Rayleigh cresce (a partire da valore nullo) fino a raggiungere un valore massimo $M_{1\max}$ dipendente dalle condizioni inizialmente fissate; anche la portata di massa W cresce (a partire da valore nullo) fino a raggiungere un valore massimo $W_{\max}$ dipendente dalle condizioni inizialmente fissate.

Il valore di $M_{1\max}$, corrispondendo alla situazione $M_2 = 1$, è legato al valore del rapporto (T_{02}/T_{01}) (e quindi, tramite la (5.4.3), al valore del parametro $Q_{12}/(C_p T_{01})$) dalla terza delle relazioni (5.2.12) ove si ponga:

$$\left(\frac{T_0}{T_0^*} \right) = \frac{T_{01}}{T_{02}} \quad \text{e} \quad M = M_{1\max}.$$

Si vede quindi che tanto maggiore è il valore del parametro $Q_{12}/(C_p T_{01})$, tanto minore è il valore di $M_{1\max}$ (cfr. diagramma di fig. 5.2.1) e conseguentemente tanto minore è il valore di $W_{\max}$ (per la (5.4.5) la portata W è funzione crescente di M , per $0 < M < 1$ e $k > 1$).

ristagno a monte e pressione di scarico p_s) e la geometria del condotto rimanendo invariate, un aumento (una diminuzione) della quantità di calore Q_{12} che viene imposta all'unità di massa di fluido di scambiare ha come conseguenza una riduzione (un aumento) della portata di fluido attraverso il condotto. Il punto operativo si sposta infatti, variando la quantità di calore Q_{12} , verso valori maggiori (aumento di Q_{12}) o minori (diminuzione di Q_{12}) del parametro $Q_{12}/(c_p T_{01})$, rimanendo invariato il valore dell'ascissa p_s/p_{01} : pure invariato rimane il valore della portata massima isentropica ($W_{\max}$)_s. Si osservi che variazioni di Q_{12} possono essere equivalentemente ottenute in una combustione variando il rapporto combustibile/comburente, quando tale rapporto si mantenga sempre minore del valore stechiometrico.

PROBLEMA 5.4.1

Attraverso un condotto formato da un ugello convergente adiabatico seguito da un tratto cilindrico a sezione circolare ove viene scambiato calore, una portata $W = 20\,000$ kg/h di aria (che, nelle ipotesi poste in questo problema, può essere trattata come gas ideale con $k = 1,4$ (costante) e $M_m = 28,97$) defluisce da un serbatoio mantenuto nelle condizioni di pressione $p_{01} = 7$ ata e di temperatura $T_{01} = 300$ °K, fino ad un ambiente a pressione p_s . Allo sbocco del condotto si vogliono avere le condizioni di numero di Mach $M_2 = 0,8$ e

La linea tratteggiata nel diagramma di figura 5.4.2 è il luogo dei punti per i quali risulta $p_2 = p_s$ e $M_2 = 1$, e quindi $W = W_{\max}$ e $M_1 = M_{1,\max}$. Le altre condizioni operative rimanendo invariate, un ulteriore abbassamento della pressione di scarico p_s al di sotto di questo valore non modifica le condizioni di moto nel condotto, e la pressione passa dal valore p_2 allo sbocco del condotto al valore p_s imposto allo scarico con un'espansione esterna al condotto stesso. Le curve di fig. 5.4.2 si completano pertanto con segmenti di retta paralleli all'asse delle ascisse a sinistra della linea tratteggiata.

Il diagramma in fig. 5.4.2 permette di sottolineare alcuni aspetti di grande interesse applicativo riguardanti le condizioni operative di un condotto come rappresentato in fig. 5.4.1:

- 1) Fissate le condizioni di ristagno a monte e la geometria del condotto, la quantità di calore Q_{12} che l'unità di massa di fluido deve scambiare ($Q_{12} > 0$) determina un valore massimo di portata che non può essere superato, per quanto bassa venga mantenuta la pressione di scarico p_s . Si ritrova così il medesimo fenomeno della limitazione della portata (choking) già incontrato nel moto isentropico e nel moto adiabatico con attrito (di Fanno) alimentato in condizioni di ristagno fissate. Questo parallelismo tra moto di Rayleigh e moto di Fanno (cui si è già accennato nel paragrafo precedente) è evidenziato dal confronto del diagramma di fig. 5.4.2 con quello di fig. 4.6.4.
- 2) Tutte le altre condizioni operative (stato di

di temperatura $T_2 = 1200^\circ \text{K}$. Ipotizzando moto isentropico nell'ugello, e moto di Rayleigh nel tratto cilindrico di condotto, calcolare:

- il flusso termico q_{12} scambiato lungo il condotto;
- il diametro d del tratto cilindrico del condotto;
- la pressione nell'ambiente di scarico p_s .

a) Si valuta innanzitutto la temperatura di ristagno nella sezione di sbocco, che per la (1.5.4) risulta:

$$T_{02} = T_2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2 \right) = 1200 (1 + 0,2 \cdot 0,8^2) = 1353,6^\circ \text{K}$$

da cui si ha immediatamente:

$$Q_{12} = c_p (T_{02} - T_{01}) = \frac{k}{k-1} \frac{\bar{R}}{M_m} (T_{02} - T_{01}) = 1\,059\,000 \text{ joule/kg}$$

ed infine:

$$q_{12} = W \cdot Q_{12} = 20\,000 \cdot 1\,059\,000 / 4186 = 5,06 \cdot 10^6 \text{ kcal/h.}$$

b) Vengono utilizzate le funzioni del moto di Rayleigh (5.2.12) o la relativa tabulazione in Appendice (E2):

$$M_2 = 0,8 \rightarrow \left(\frac{T_{02}}{T_{02}^*} \right)_R = 0,96395$$

$$\left(\frac{T_{01}}{T_{02}^*} \right)_R = \left(\frac{T_{02}}{T_{02}^*} \right)_R / \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right) = \frac{0,96395}{4,512} = 0,21364$$

da cui segue: $M_1 = 0,2248$.

Dalla relazione (5.4.5) risulta:

$$\frac{W}{A} = \sqrt{\frac{k}{R \cdot T_{01}}} p_{01} \frac{M_1}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} = 603,9 \text{ kg/(m}^2 \text{sec)}$$

da cui segue:

$$A = W / (W/A) = \frac{20\,000}{603,9 \cdot 3600} = 9,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 0,108 \text{ m.}$$

c) Essendo $M_2 < 1$ risulta $p_s = p_2$. Per valutare p_2 , bisogna prima valutare la pressione p_1 nella sezione iniziale del tratto cilindrico del condotto; per la (1.5.6) risulta:

$$p_1 = \frac{p_{01}}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)^{k/(k-1)}} = 6,758 \text{ ata.}$$

Si può infine applicare la relazione (5.2.2):

$$p_s = p_2 = p_1 \frac{1 + k M_1^2}{1 + k M_2^2} = 6,758 \frac{1 + 1,4 \cdot 0,2248^2}{1 + 1,4 \cdot 0,8^2} = 3,816 \text{ ata}$$

Si può anche calcolare $(W_{\max})_s/A$:

$$(W_{\max})_s/A = \sqrt{\frac{k}{RT_{01}}} p_{01} \left(1 + \frac{k-1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2(1-k)}} = 1602 \text{ kg/(m}^2\text{sec)}$$

e quindi risultando:

$$W/(W_{\max})_s = 0,3769$$

$$\frac{Q_{12}}{c_p T_{01}} = 3,512$$

$$\frac{p_s}{p_{01}} = 0,5452$$

verificare che i risultati sono coerenti con le indicazioni del diagramma di fig. 5.4.2.

CAPITOLO 15

IL DIFFUSORE.

I) GENERALITA'.

La funzione del diffusore è quella di addurre l'aria esterna al motore facendovela giungere in condizioni opportune.

La conformazione del diffusore deve quindi tenere conto oltre che del campo di impiego del velivolo, con particolare riguardo alla velocità di volo anche del fatto che ad esempio in un turboreattore l'aria passa dal diffusore al compressore, mentre in uno statoreattore essa viene inviata direttamente in camera di combustione e quindi abbisogna di caratteristiche diverse all'uscita del diffusore.

Mentre nei motori a pistoni la quantità di aria che deve essere inviata al motore è relativamente modesta e la velocità di volo non molto elevata, nei motori a turbina la quantità di aria da elaborare, anche a parità di consumo di combustibile, è molto più grande, e le velocità di volo che si raggiungono possono essere per alcuni impieghi nettamente supersoniche, per cui in questo caso, il problema della realizzazione di diffusori aventi un buon funzionamento è senz'altro determinante per ottenere propulsori che danno buone prestazioni.

Fondamentalmente il diffusore deve essere in grado di diminuire la velocità dell'aria fino a valori confacenti alle condizioni di impiego (ad esempio invio al compressore ed alla camera di combustione), facendone quindi aumentare la pressione statica, e deve essere in grado di effettuare queste trasformazioni contenendo al massimo le perdite anche nelle condizioni più sfavorevoli e senza che in esso si verificchino fenomeni di instabilità di flusso che possono avere conseguenze deleterie sia sul buon funzionamento del compressore che sulla efficienza della combustione.

Oltre alla progettazione intrinseca del diffusore è molto im-

portante anche un suo opportuno funzionamento nel contesto globale del velivolo.

Esso deve essere disposto preferibilmente in regioni in cui il flusso esterno è uniforme e non disturbato in modo sia da permettere un certo grado di compressione esterna (come si vedrà in seguito), sia da rendere minima la resistenza.

A questo proposito conviene notare che il vantaggio di avere buone prestazioni può essere annullato se il diffusore è progettato in modo tale da offrire grande resistenza durante il volo.

In sostanza sarebbe necessario evitare sia il distacco di vena che il raggiungimento di velocità soniche in alcuni punti del diffusore (anche ad elevate velocità di volo) per evitare effetti di comprimibilità.

Ora le difficoltà nascono dal fatto che, dal punto di vista del progetto, questi fattori sono tra di loro in contrasto. Infatti ad esempio dal punto di vista della diminuzione o riduzione della separazione del flusso è necessario progettare bordi di attacco del diffusore arrotondati, mentre se si vuole elevare il numero di Mach critico (quello cioè cui corrispondono le formazioni di regioni a flusso circa sonico o supersónico) è necessario che i bordi di attacco siano affilati e le sezioni sottili.

Esistono varie soluzioni che permettono un buon compromesso tra i requisiti sopra richiesti; in figura I sono ad esempio rappresentati alcuni tipi di prese dinamiche installate su velivoli.

Dal punto di vista del loro impiego i diffusori possono essere classificati in diffusori subsonici e supersonici.

I primi agiscono su un flusso subsonico trasformando convenientemente energia cinetica in energia di pressione, mentre i secondi decelerano un flusso supersonico a condizioni che

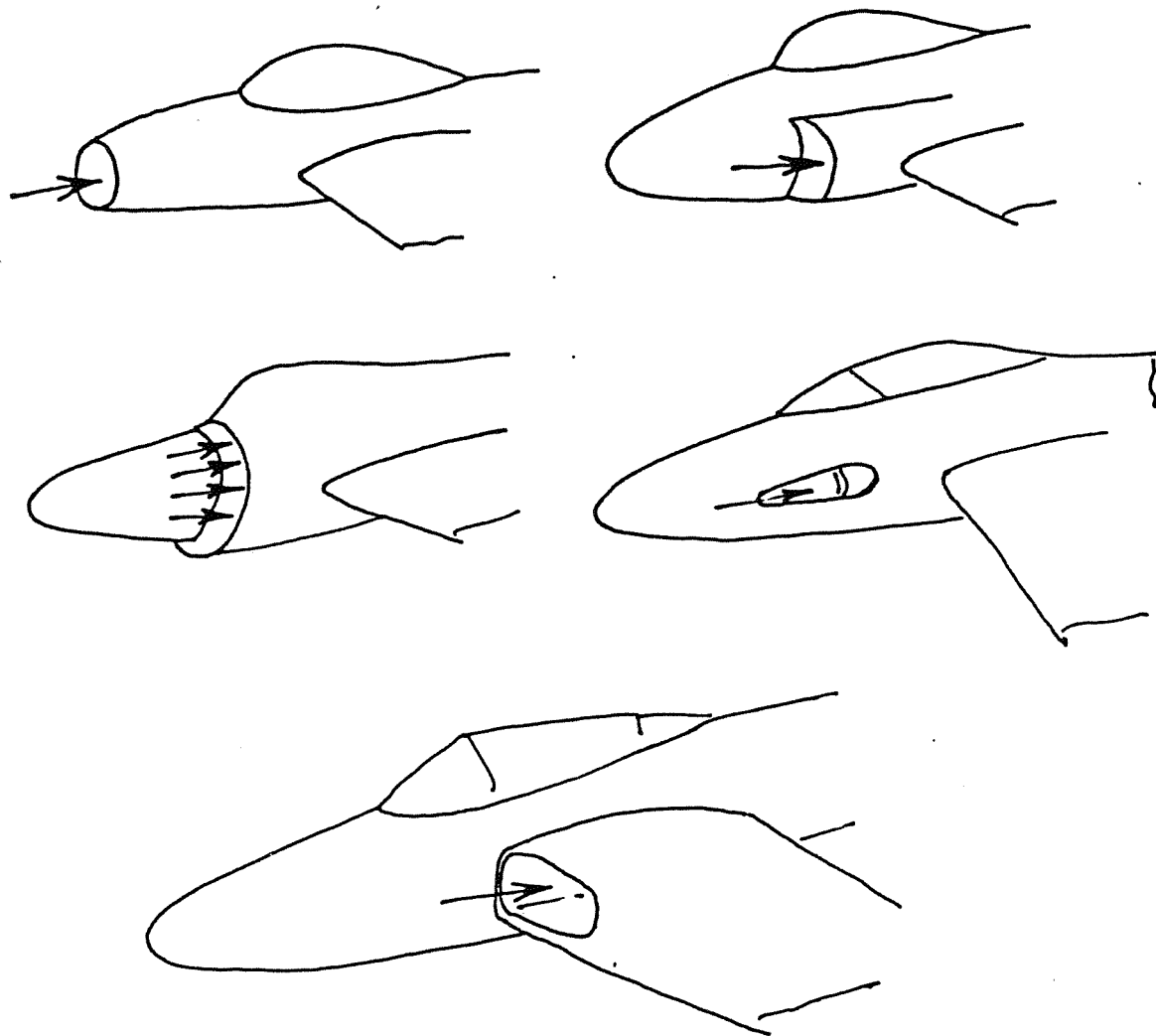


FIG.1

in genere sono approssimativamente soniche.

In questo ultimo caso naturalmente il diffusore supersonico dovrà essere seguito da un diffusore subsonico che imponga una ulteriore trasformazione di fluido.

2) LE PRESTAZIONI DEI DIFFUSORI .

Non esistono parametri universalmente utilizzati per indicare le prestazioni dei diffusori.

Qui di seguito ne vengono elencati alcuni dei maggiormente accettati con riferimento allo schema di figura 2, in cui l'indice (0) stà ad indicare la sezione in cui si può immaginare

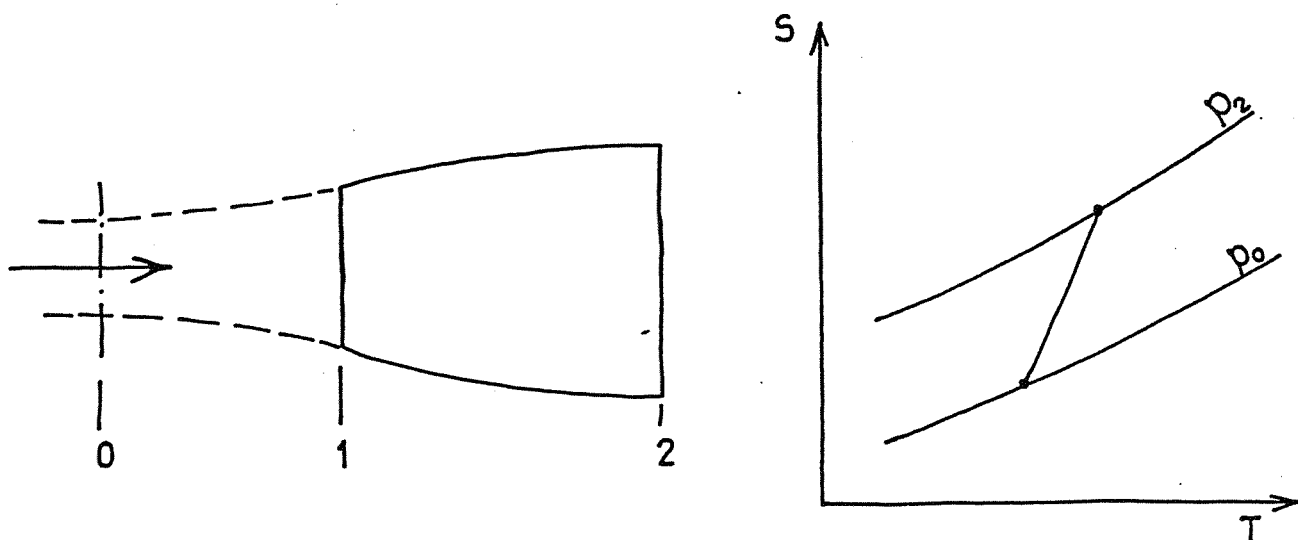


FIG. 2

inizi il fenomeno di cottura, e l'indice (2) indica la fine del diffusore.

- Rapporto tra le pressioni totali ϵ_p .

Questo rapporto sta ad indicare la variazione di pressione totale tra la sezione iniziale (0) e la sezione sottoposta a misura, in genere la sezione 2.

In questo caso si ha:

$$\epsilon_p = \frac{P_{2t}}{P_{0t}} \quad [2.1]$$

Nel caso puramente ideale di un flusso isentropico la pressione totale rimane costante, e quindi $\epsilon_p = 1$.

Questo caso non si realizza in pratica, ma è chiaro che le prestazioni di un buon diffusore non debbono discostarsi troppo da quelle del diffusore ideale.

- Rendimento isentropico η_d .

Con riferimento alla figura 3 il rendimento isentropico η_d è definito come:

$$\eta_d = \frac{h_{2't} - h_0}{h_{2t} - h_0} \approx \frac{T_{2't} - T_0}{T_{2t} - T_0} \quad [2.2]$$

Si noti che poichè:

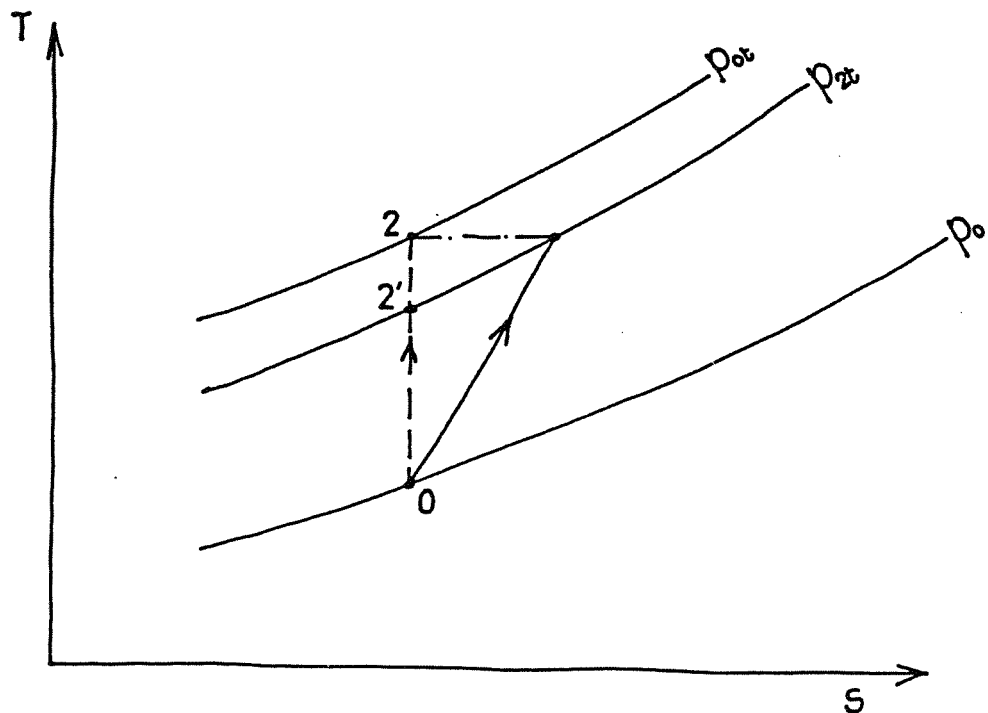


FIG. 3

$$\frac{T_{2't}}{T_0} = \left(\frac{p_{2t}}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \quad \frac{T_{2t}}{T_0} = 1 + \frac{k-1}{2} M_0^2 \quad [2.3]$$

(essendo $T_{2t} = T_{0t}$) si ha anche:

$$\eta_d = \frac{\left(\frac{p_{2t}}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\frac{k-1}{2} M_0^2} \quad [2.4]$$

Se si tiene ora conto del fatto che:

$$\frac{p_{2t}}{p_0} = \frac{p_{2t}}{p_{0t}} \frac{p_{0t}}{p_0} = \varepsilon_p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad [2.5]$$

si ha che:

$$\eta_d = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right) (\varepsilon_p)^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\frac{k-1}{2} M_0^2} \quad [2.6]$$

che mette in relazione il rendimento isentropico con il rapporto tra le pressioni totali.

Convienne notare che questi due rendimenti tengono conto delle prestazioni globali del diffusore e non delle modalità con cui la diffusione avviene; in particolare non viene fatta distinzione tra diffusione esterna ed interna.

3) I DIFFUSORI SUBSONICI.

I diffusori subsonici possono essere classificati, ai fini di una discussione, in diffusori a compressione esterna e diffusori a compressione interna; si noti però che in molti casi la distinzione non è così netta, in quanto la diffusione può avvenire tanto internamente che esternamente.

Per comprendere ad ogni modo le ragioni di questa classificazione conviene osservare, con riferimento alla figura 4, che il flusso esterno subisce, in generale, un'alterazione, rispetto alle condizioni imperturbate, già a monte del diffusore.

Come si può vedere la sezione A_0 di cattura del fluido può essere maggiore o minore della sezione A_1 di ingresso nel diffusore.

Nel primo caso ($A_0 > A_1$) il fluido subisce una accelerazione e la pressione statica diminuisce tra (0) ed (I); nel secondo caso il fluido viene decelerato e subisce un aumento di pressione statica.

Nei due casi ad ogni modo il processo si può considerare isentropico in quanto avviene senza l'interferenza di pareti e contorni solidi in genere.

La situazione $A_0 > A_1$ (che si verifica in genere ad esempio in caso di decollo quando è richiesta una grande portata d'aria) provoca un aumento di carico sul diffusore vero e proprio, in quanto diminuisce la pressione statica all'ingresso, mentre la seconda (tipica del volo di crociera), sca-

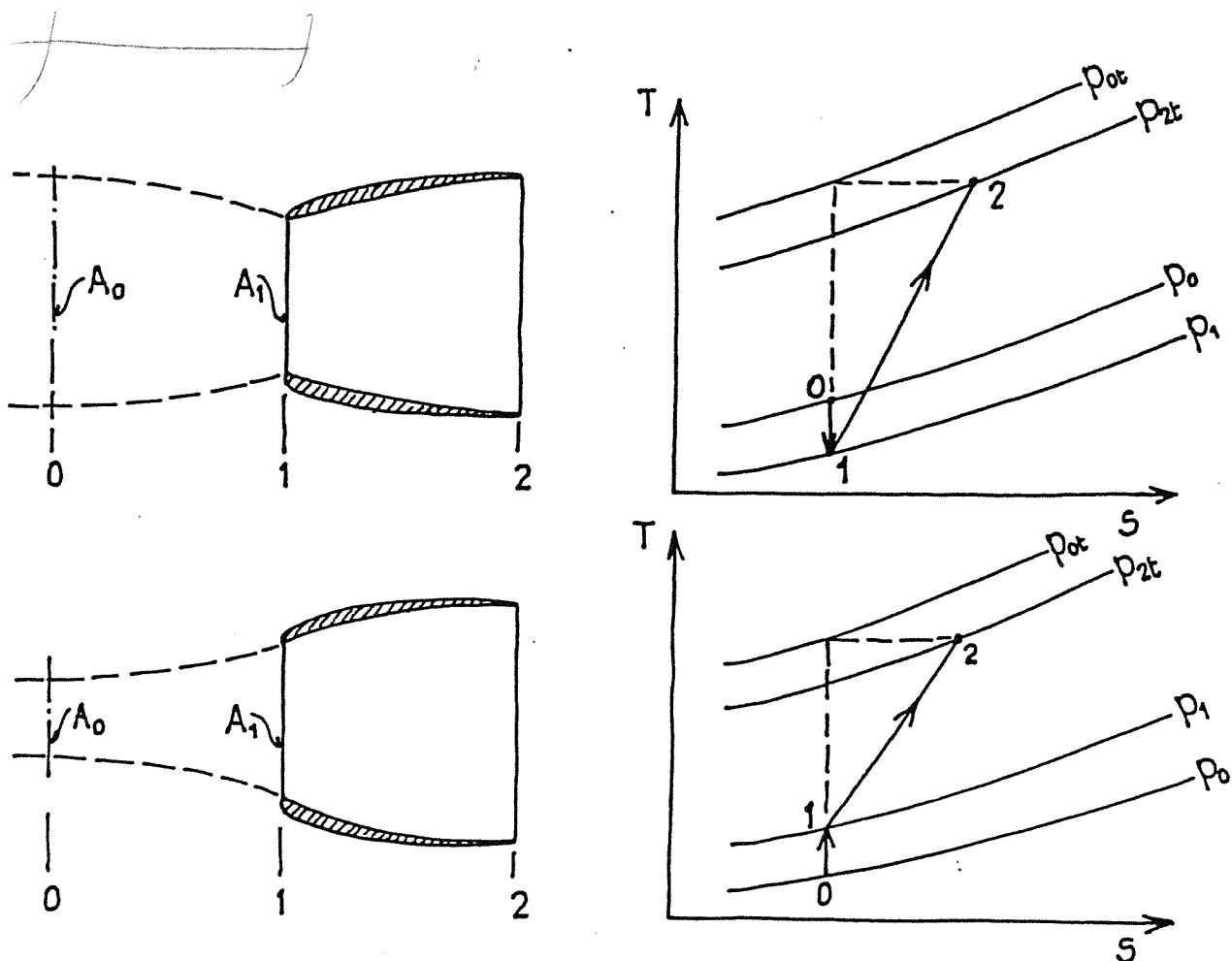


FIG. 4

rica, per così dire, il diffusore di una parte del suo lavoro rendendo più difficili i fenomeni di distacco di vena che sono tanto più frequenti, in fase di compressione, quanto più elevato è il gradiente di pressione.

Questo secondo caso ($A_0 < A_1$) appare il più interessante dal punto di vista delle prestazioni del diffusore; conviene ad ogni modo esaminare separatamente i due casi di diffusione esterna.

A) DIFFUSIONE ESTERNA ($A_0 < A_1$) (SUBSONICA).

La diffusione esterna offre, ad un primo esame, notevoli vantaggi e perchè serve a diminuire il gradiente di pressione nel diffusore e perchè può essere considerata praticamente isentropica.

Innanzitutto c'è da tenere presente che per ottenere eleva-

ti rapporti tra le pressioni statiche nelle sezioni (O) ed (I) è necessario che i rapporti tra le sezioni corrispondenti siano notevoli.

Ora si noti che il rapporto A_o/A_1 è praticamente una misura dell'angolo di incidenza del flusso sui bordi del diffusore e che se tale angolo diventa troppo grande, cioè la divergenza del flusso è troppo notevole, si possono avere dei distacchi di vena (figura 5).

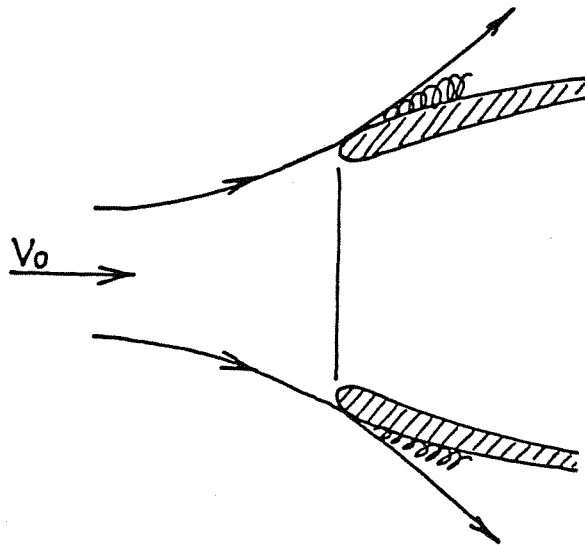


FIG. 5

Per ottenere una compressione esterna il bordo di attacco del diffusore deve essere in pratica conformato come l'attacco di un'ala che con angolo di incidenza negativo (rispetto naturalmente a V_o).

La curvatura che in tal modo viene ad assumere la parte anteriore del diffusore, oltre a favorire distacchi di vena, può anche generare notevoli aumenti di velocità nel flusso esterno che deve seguirne il contorno con conseguente possibilità di ottenere delle regioni localmente supersoniche quando si operi con numeri di Mach elevati (anche se naturalmente < 1). E' chiaro che l'aumento di velocità provocato dalla forma del contorno porta ad una diminuzione della pressione; per evitare però gli effetti cui prima si è accennato (ed in parti=

colare il distacco dello strato limite) è necessario che la pressione minima che si raggiunge sia superiore ad un certo livello.

A causa della diminuzione di pressione statica sulla parte frontale si ha un contributo positivo alla spinta; questo contributo esiste effettivamente nel caso teorico di corpo di lunghezza infinita (ad esempio schematizzando il diffusore con un cilindro semi infinito con un opportuno bordo di attacco) ma nel caso pratico può praticamente essere annullato dagli effetti di resistenza di attrito e distacchi di vena, per cui il diffusore può creare esso stesso una resistenza al moto. Gli effetti di resistenza possono essere notevolmente incrementati se si hanno delle regioni supersoniche con formazione d'onde d'urto.

B) DIFFUSIONE INTERNA.

Conviene ricordare che nel caso di flusso isentropico monodimensionale in un condotto a sezione variabile, le variazioni di sezione e di pressione sono legate al numero di Mach M dalla relazione:

$$\frac{dA}{A} = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right) \frac{dP}{P}$$

La relazione precedente mostra che per avere un incremento di pressione statica è necessario, nel caso subsonico e nelle condizioni precistae, fare aumentare la sezione nella direzione del flusso.

Ora mentre nel caso di compressione esterna si fa in modo, con un'opportuna conformazione dell'ingresso del diffusore, che le linee di flusso esterno divergono, nel caso di diffusione interna si fa in modo di forzare il flusso entro un condotto divergente.

In effetti il flusso all'interno del diffusore non è isentro-

pico a causa di fenomeni di irreversibilità dovuti agli attriti ed ai distacchi di vena (separazione dello strato limite). È conveniente ricordare ancora una volta che la separazione dello strato limite avviene tanto più facilmente quanto più rapido è l'aumento di pressione in direzione del flusso.

Ora poichè il gradiente di pressione dipende dalla legge di variazione delle aree, è chiaro che se si vogliono evitare distacchi di vena è necessario contenere gli angoli di divergenza del diffusore; in pratica si vede che il semi angolo di divergenza deve essere inferiore ai 10° .

Se si considera ad esempio un diffusore a pareti riene i risultati sperimentali hanno permesso di tracciare un grafico

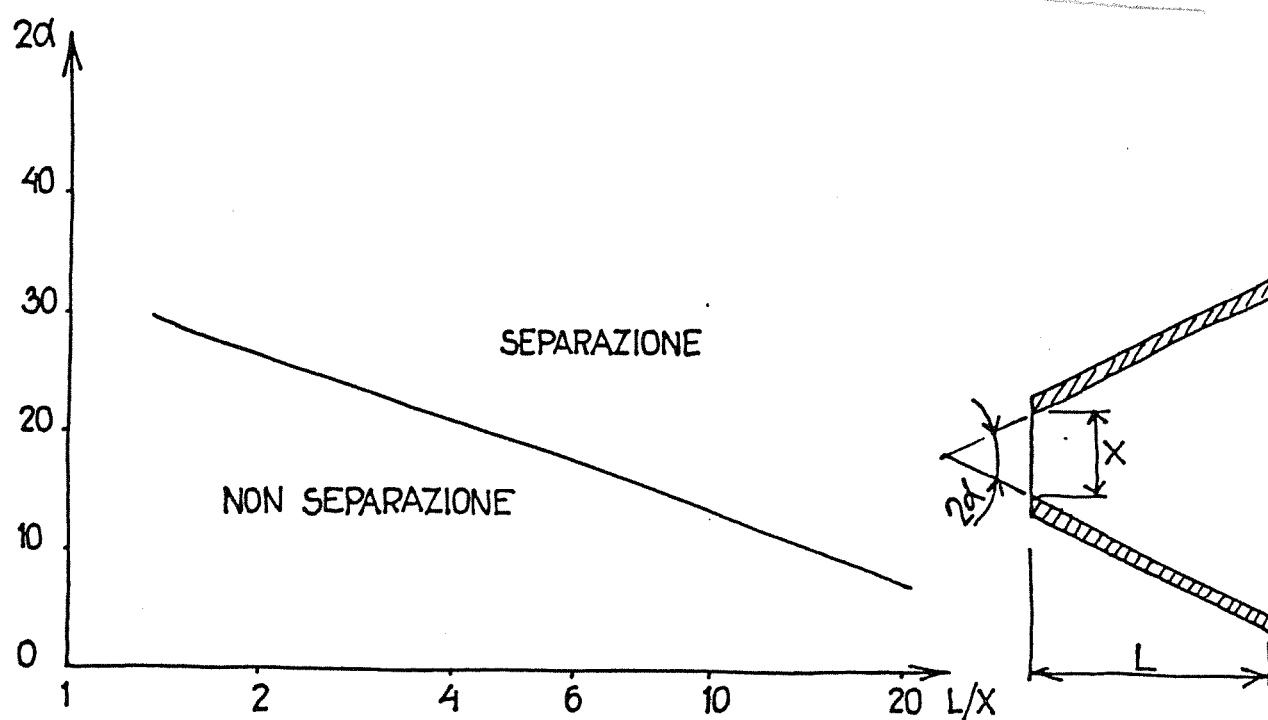


FIG. 6

che separa la zona di distacco dello strato limite da quella di flusso regolare, del tipo di quello riportato in figura 6.

C'è da osservare che l'aumento di pressione e la decelerazione del flusso possono provocare pur senza giungere ad un'apprezzabile distacco di vena, un inspessimento dello strato limite tale da far sì che il diffusore si comporti circa come un condotto a pressione costante (figura 7).

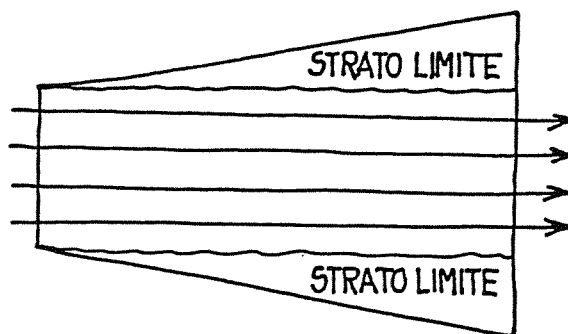


FIG. 7

Questi fenomeni di separazione portano naturalmente ad un dispendio di energia, in quanto sono sostenuti a spese dell'energia cinetica del flusso, e quindi ad una diminuzione della pressione totale.

La diminuzione dell'angolo di divergenza del diffusore allontana questi fenomeni, ma, a parità di rapporto di sezioni, provoca un aumento della lunghezza del condotto e quindi della resistenza di attrito (oltre che degli ingombri e dei pesi) per cui è sempre necessario ricorrere ad un compromesso.

A proposito dell'influenza dell'attrito sul comportamento del diffusore, conviene fare qualche ulteriore osservazione.

Se si considera un flusso adiabatico di un gas perfetto in un condotto con attrito, che sia in condizioni di flusso subsonico, è noto che al procedere lungo il condotto la pressione statica diminuisce mentre la velocità aumenta.

Ora se a partire da un condotto a sezione costante, per cui valgono le considerazioni precedenti, si ammette di attribuire al condotto stesso una divergenza che aumenta gradualmente, verranno ottenuti sia la diminuzione di temperatura che l'incremento di velocità, finchè si giungerà a una divergenza tale da permettere un'effettiva compressione del gas. (auto r.p.)

Appare chiaro da questo che in sostanza l'effetto dell'attrito è quello di ridurre il potere diffusivo del divergente (a

parità di angolo di divergenza) per cui una certa frazione dell'incremento di area deve essere speso per controbilanciare gli effetti dell'attrito.

Per precisare meglio le idee conviene ricordare che attraverso le equazioni della quantità di moto e di continuità è possibile esprimere la variazione di velocità di un fluido che si muove in un condotto a sezione qualsivoglia ed in presenza di attrito in funzione della variazione di sezione e del numero di Mach.

Tale relazione, nel caso di un gas perfetto, è data, se si indica con f il coefficiente di attrito, dà: (Z = coordinata lungo l'asse del condotto):

$$\frac{dV}{dz} = \frac{V}{1-M^2} f \left(\frac{KM^2}{2m} - \frac{1}{A} \frac{dA}{dz} \right) \quad [3.2]$$

essendo m il raggio idraulico del condotto.

(Si noti che dalla relazione precedente è possibile ricavare nel caso subsonico ($M < 1$) e per $dA = 0$ la velocità aumenta e quindi la pressione deve diminuire).

Ora per avere compressione è almeno necessario che sia $(dV/dz) < 0$ (in quanto la pressione totale o si mantiene costante o diminuisce), per cui dalla (3.2) si deduce che deve essere anche (essendo $M < 1$):

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dz} > f \frac{KM^2}{2m}$$

Non è possibile invece avere compressione se non è verificata la disuguaglianza (3.3).

È evidente da quanto detto che per passare da un numero di Mach M_1 ad un numero di Mach M_2 nel caso di flusso con attrito è necessario un rapporto tra l'area maggiore di quello corrispondente al caso senza attrito.

Per concludere il discorso sulle prese d'aria subsoniche ripor=

tiamo in figura 8 due tipici esempi di andamento del rendimento η_d e del rapporto ϵ_p tra le pressioni totali.

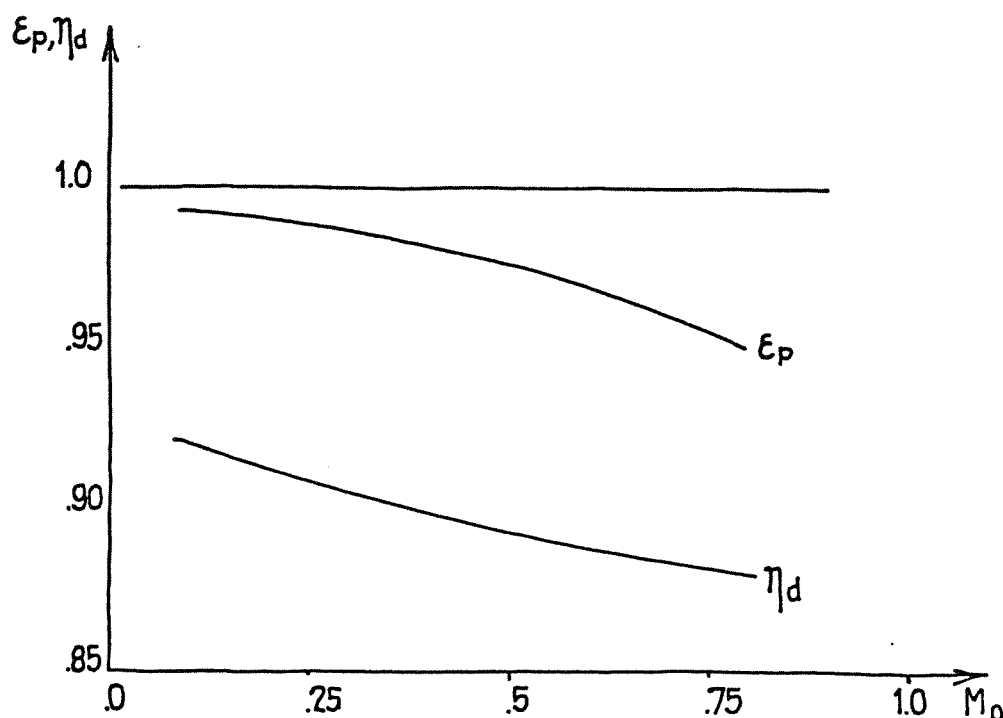


FIG. 8

4) I DIFFUSORI SUPERSONICI.

Anche nel caso supersonico, come già in quello subsonico, è necessario portare la velocità del fluido all'ingresso del compressore (nel caso di un turboreattore) o della camera di combustione (nel caso di uno statoreattore) a valori nettamente subsonici, dell'ordine di $M = 0,5$ e questo a causa delle attuali difficoltà di impiego sia dei compressori supersonici che della combustione supersonica.

Il problema della presa d'aria supersonica diventa sempre più notevole all'aumentare del numero di Mach di volo non solo in relazione alle maggiori difficoltà di decelerare senza eccessive perdite il flusso, ma anche perchè pure dal punto di vista strutturale, la presa dinamica diventa una parte sempre più importante del velivolo (figura 9).

Ciò è dovuto al fatto che la quantità volumetrica di aria ^{che} deve essere inviata al propulsore aumenta più velocemente della

velocità di volo e quindi bisogna fare fronte alla nuova richiesta mediante un aumento della sezione di cattura.

Nel caso di flusso supersonico è praticamente impossibile ottenere una decelerazione fino a numeri di Mach inferiori all'unità senza passare attraverso onde d'urto che generano senz'altro un incremento di entalpia ed una diminuzione di pressione totale.

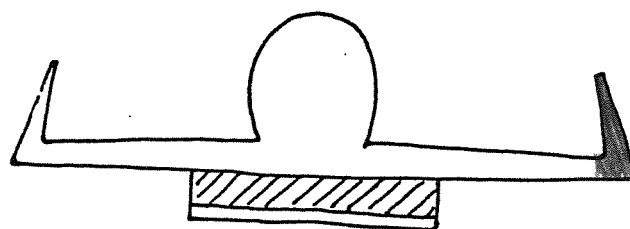
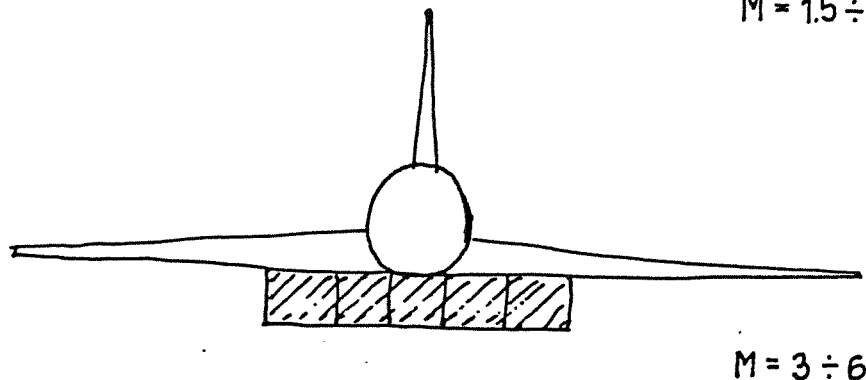
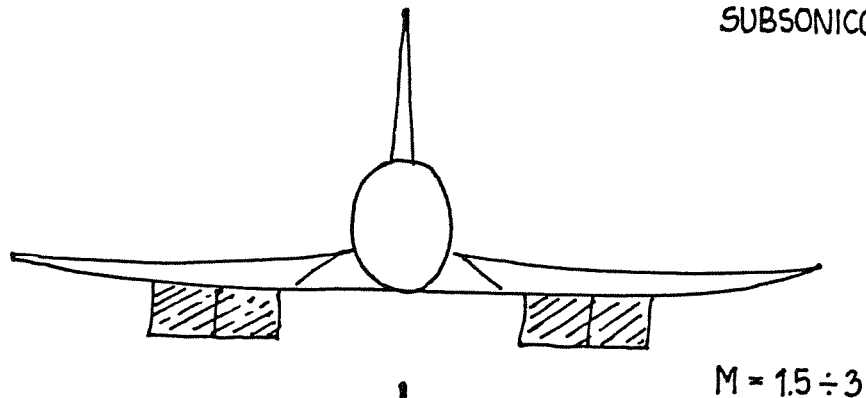
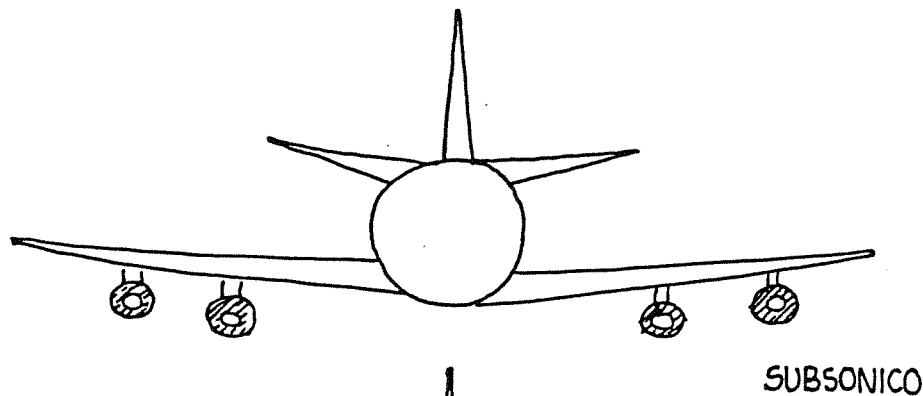


FIG. 9

Se ora si tiene conto che l'uno per cento di perdita di pressione totale nel diffusore si traduce in pratica in una perdita di circa l'uno per cento della spinta del motore, si può comprendere che bisogna porre particolare cura nella progettazione per evitare che le perdite d'urto compromettano notevolmente le prestazioni del propulsore.

Dal punto di vista delle caratteristiche costruttive e delle modalità di funzionamento i diffusori supersonici possono essere classificati in:

- diffusori ad onda d'urto normale;
- diffusori convergenti;
- diffusori a cono che possono agire per compressione esterna o mista (esterna interna).

5) DIFFUSORI AD ONDA D'URTO NORMALE.

Il modo più semplice per ottenere la decelerazione del flusso da subsonico a supersonico è quello di fare passare il flusso attraverso un'onda d'urto normale come è indicato dalla figura 10, in cui è rappresentato un diffusore che sfrutta questo principio, quando esso opera in condizioni di progetto, cioè con il maggior valore delle prestazioni di ristagno che è in grado di fornire.

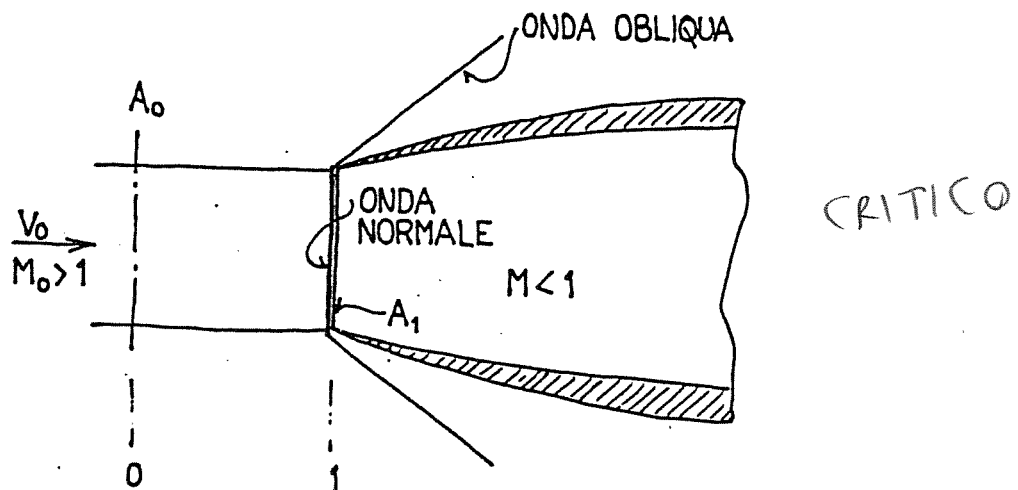


FIG. 10

Come si vede, e la ragione di ciò apparirà più chiara in seguito, in questo caso l'onda d'urto normale è situata sul bordo di attacco del diffusore.

In questo caso il flusso diventa subsonico attraverso l'onda d'urto e viene poi decelerato attraverso un diffusore subsonico.

I diffusori di questo tipo possono venire utilizzati per numeri di Mach abbastanza bassi, fino a valori di M_0 dell'ordine di circa $1,7 \div 1,8$, perchè per valori più elevati le perdite diventano molto notevoli con conseguente diminuzione della spinta che il motore è in grado di fornire.

In figura II è mostrata la perdita percentuale di spinta, dovuta alla perdita di ingresso, in funzione del numero di Mach per un diffusore di questo tipo; si può osservare che quando si oltrepassa un certo numero di Mach, la spinta del propulsore diventa praticamente nulla.

Nel caso rappresentato in figura IO il diffusore funziona in condizioni di progetto, come detto, e la quantità di area che può essere catturata dal diffusore è quella massima possibile

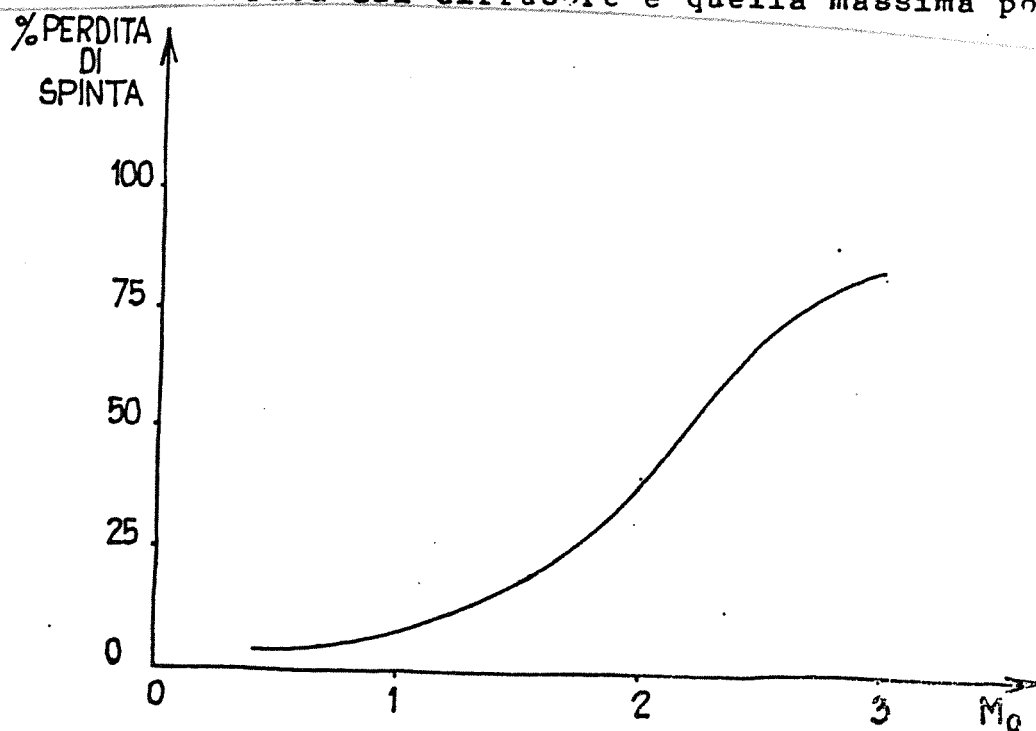


FIG.11

essendo $A_0 = A_1$

Ora può darsi che le condizioni del motore richiedano una quantità di area inferiore a quella corrispondente a queste condizioni come può avvenire ad esempio in condizioni di ugello già saturato.

In questo caso l'invio di una quantità di aria superiore alla richiesta ha come conseguenza un aumento di pressione che espelle l'onda d'urto facendola disporre come mostrato in figura I2; come si vede tale onda è formata da una porzione centrale normale cui corrisponde una sezione $A_0 < A_1$ e da due porzioni oblique.

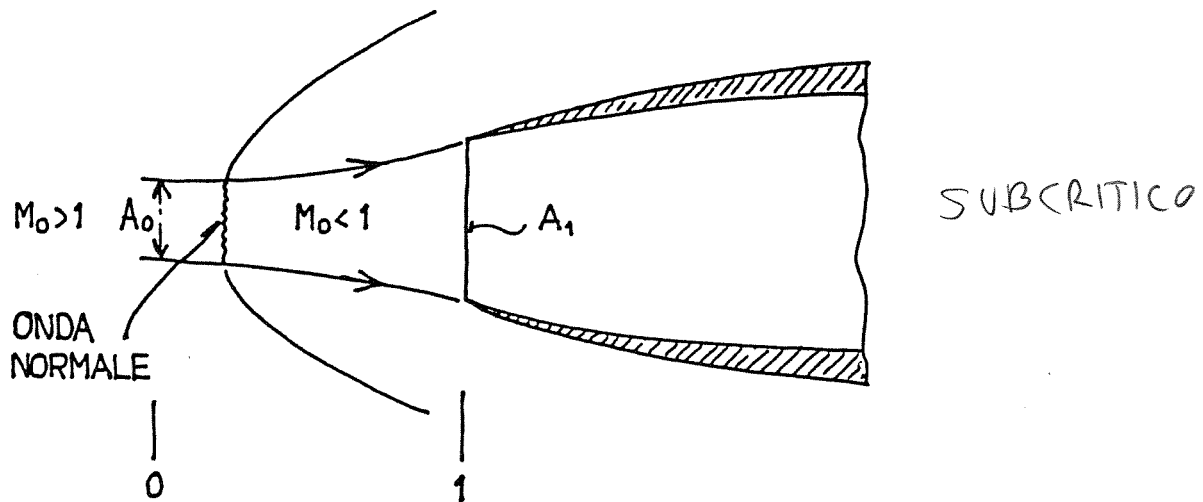


FIG.12

L'effetto di questa nuova disposizione è di diminuire la portata ($A_0 < A_1$) soddisfacendo così la richiesta del motore; si può dire che una certa quantità di aria viene "spillata" dalla corrente che investe il motore.

Nel caso opposto in cui la contropressione sul diffusore venga diminuita rispetto alle condizioni di progetto, l'onda di urto viene per così dire "aspirata" all'interno del diffusore dando origine ad un urto più forte che permette di ristabilire le condizioni al contorno (fig. I3).

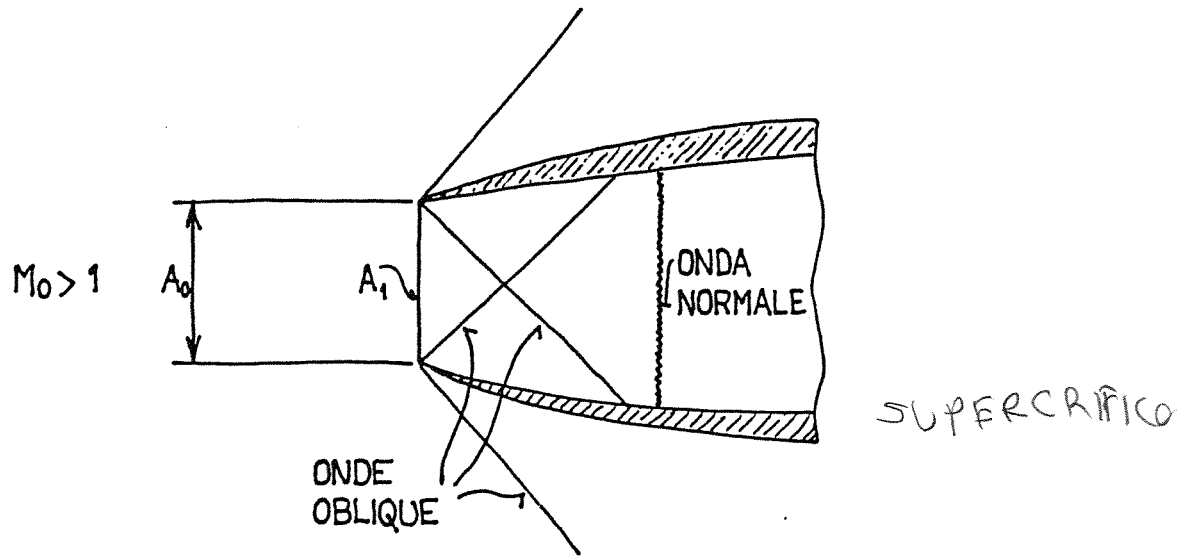


FIG. 13

Si noti che oltre all'onda d'urto normale si formano anche onde d'urto oblique a partire dal bordo di attacco; tali onde d'urto, interagendo con lo strato limite, possono favorire dei fenomeni di distacco di vena.

Se si considera che η_d sia il rendimento del diffusore subsonico si ha, ammettendo di essere in condizioni di progetto, che:

$$\frac{P_{2t}}{P_1} = \left[1 + \eta_d \left(\frac{\kappa-1}{2} \right) M_1^2 \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad [5.1]$$

e, tenendo conto anche della variazione di pressione attraverso l'onda normale:

$$\frac{P_{2t}}{P_0} = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\left(\frac{2\kappa}{\kappa-1} M_0^2 - 1 \right) + \eta_d \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_0^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{\left(\frac{2\kappa}{\kappa-1} M_0^2 - 1 \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}} \quad [5.2]$$

In figura I4 è riportato a titolo di confronto il valore di

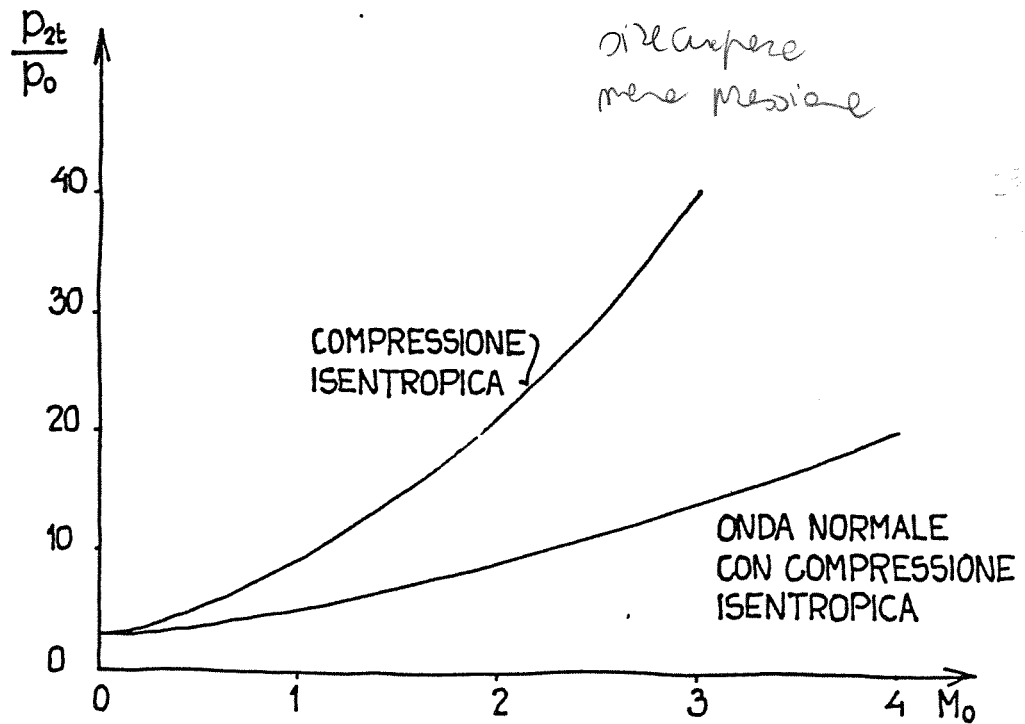


FIG. 14

$\frac{P_{1t}}{P_0}$ nel caso di una compressione isentropica e nel caso di compressione mediante onda d'urto normale seguita da compressione isentropica.

6) DIFFUSORE SUPERSONICO CONVERGENTE DIVERGENTE.

Se si fa riferimento alla relazione (3.1) che lega le variazioni di pressione e di sezione con il numero di Mach nel caso isentropico, si può vedere che il modo più naturale per decelerare in modo isentropico un flusso da condizioni supersoniche a condizioni subsoniche è quello di utilizzare un condotto convergente divergente opportunamente proporzionato.

Mediante la porzione convergente è infatti possibile ottenere una decelerazione fino ad $M = 1$ in gola, mentre mediante la porzione divergente è possibile ottenere una ulteriore diffusione subsonica.

Se il condotto è però a geometria fissa, questo risultato può essere ottenuto solo per un determinato numero di Mach (quello per cui è stato progettato il condotto), mentre in condizioni

diverse darebbe luogo, anche da un punto di vista puramente teorico, a degli inconvenienti.

Da un punto di vista di realizzazione pratica questi diffusori appaiono poi molto difficili da realizzare anche in condizioni di progetto; infatti il profilo dell'ugello dovrebbe essere progettato con molta accuratezza per tenere conto, in special modo, dello strato limite il quale nelle condizioni di flusso dell'ugello diventa piuttosto spesso e facilmente soggetto a distacco.

Inoltre c'è da tenere presente che l'ispessimento dello strato limite porta con facilità alla formazione di onde d'urto le quali alterano grandemente il campo di flusso rispetto alle condizioni di progetto, per cui in sostanza è da reputare improbabile l'ottenimento di un flusso isentropico (privo di onde d'urto).

Oltre a questa difficoltà c'è anche un altro problema consistente nel non facile adescamento della compressione supersonica nel convergente in corrispondenza delle condizioni di progetto (cioè con numero di Mach unitario in gola); questa difficoltà sussiste indipendentemente dal comportamento dello strato limite.

Il comportamento dell'ugello convergente divergente come diffusore può essere spiegato tenendo conto che fissando una certa condizione di ingresso (o) quando nella sezione di gola dell'ugello si ha $M = 1$ (ugello saturato) il rapporto tra la sezione A_0 (di cattura) e la sezione di gola A_g^* è fissato ed è funzione del numero di Mach, essendo dato, in condizioni isentropiche, da:

$$\frac{A_0}{A_g^*} = \frac{1}{M_0} \left[\frac{2}{K+1} \left(1 + \frac{K-1}{2} M_0^2 \right) \right]^{\frac{K+1}{2(K-1)}} \quad [6.1]$$

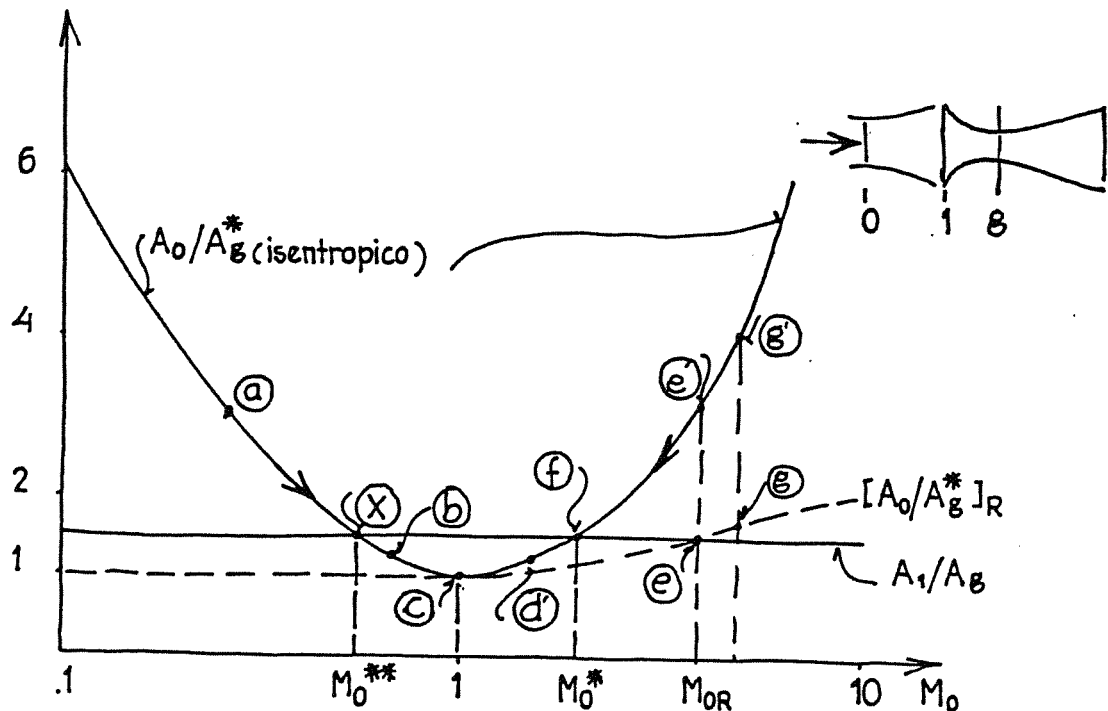


FIG. 15

L'andamento di questa funzione è rappresentato in figura 15; in tale figura è riportato anche il rapporto costruttivo A_1/A_g corrispondente all'ugello che si sta considerando.

Come si può vedere dalla figura, si hanno due numeri di Mach

M_o (uno > 1 e l'altro < 1) in cui il rapporto costruttivo A_1/A_g coincide con A_o/A_g^* ; in queste condizioni, se la sezione di cattura A_o coincide con A_1 si ha nello ugello numero di Mach unitario in gola e funzionamento in condizioni di progetto ideali.

In particolare alla condizione di progetto ideale come diffusore corrisponde un numero di Mach $M_o (> 1)$ (numero di Mach di progetto).

Esaminiamo ora come vanno le cose se il flusso viene accelerato a partire da un M_o molto basso (e naturalmente < 1) e tale che il numero di Mach di gola M_g sia < 1 .

In queste condizioni si potrà supporre che il flusso non sia disturbato tra (0) ed (I) e che quindi $A_o = A_1$; inoltre se in gola $M < 1$ il flusso non è sufficientemente accelerato

→ per un'area di linea di gola che ne esce $\bar{e}$ dell'area di gola che
indicherebbe avere effetto nel solo caso $M=1$

quindi $A_g > A_g^*$.

Con riferimento alla figura I5 si trova quindi che si è in una posizione come quella indicata dal punto (a).

Accelerando si trova un numero di Mach M_o^{**} tale per cui $M_g = 1$, per cui $A_o/A_g^* = A_1/A_g$ e quindi essendo $A_o = A_1$, $A_g^* = A_g$ (punto x).

In queste condizioni l'ugello è saturato, cioè non è in grado di smaltire una portata maggiore (se non si cambiano naturalmente le condizioni a monte).

Acceleriamo ulteriormente mantenendo però sempre $M_o < 1$; la portata non può più aumentare in quanto l'ugello è saturato e si ha inoltre $A_g = A_g^*$ ($M_g = 1$).

Deve allora essere $A_o < A_1$ in quanto con riferimento alla figura I5 si ha $A_o/A_g^* < A_1/A_g$.

Si è quindi nelle condizioni rappresentate dal punto b; è chiaro che essendo $A_o < A_1$ si ha esternamente all'ugello una divergenza della linea di flusso con conseguente compressione esterna.

Procedendo oltre si ha che per $M_o = 1$, $A_o = A_g = A_g^*$ e l'ugello convergente non ha praticamente nessuna funzione (punto c).

Accelerando ulteriormente il numero di Mach M_o diventa supersonico; consideriamo il caso in cui $1 < M_o < M_o^{**}$.

In queste condizioni $A_g = A_g^*$, però essendo $A_1/A_g > A_o/A_g^*$ deve essere $A_1 > A_o$.

In queste condizioni supersoniche questa situazione non si verifica attraverso una situazione di divergenza della linea di flusso, ma mediante lo stabilirsi di un'onda d'urto all'esterno dell'ugello; tale onda d'urto è del tipo di quella rappresentata in figura I2, e può essere considerata, almeno per la porzione che interessa l'area di cattura A_o , come normale.

Siamo quindi nelle condizioni del punto d' di figura I5; si noti che in queste condizioni il flusso nel diffusore è subsonico.

Quando M_0 aumenta ci si avvicina ad M_0^* e l'onda d'urto si avvicina alla bocca dell'ugello, cosicchè per valori di M_0 molto prossimi ad M_0^* l'onda d'urto è vicinissima alla bocca dell'ugello ed il flusso nel convergente è subsonico.

Quindi quando $M_0 = M_0^*$ e siamo in condizioni di progetto, il flusso nel convergente deve passare repentinamente da subsonico a supersonico (punto f).

Questo non è però naturalmente quello che avviene in realtà. Per spiegare il comportamento vero dell'ugello bisogna tenere conto che quando $M_0 > 1$ e si generano onde d'urto, non valgono più le relazioni del flusso isentropico (ed in particolare la 6.I) per cui per $M_0 > 1$ ed in presenza di onde d'urto la relazione tra A_0 ed A_g cui corrisponde $M_g = 1$ non è più (per $M_0 > 1$) quella riportata a tratto continuo in figura I5, ma quella a tratto discontinuo (indicata con $(A_0/A_g^*)_R$). Si può vedere quindi che in queste condizioni quando $M_0 = M_0^*$ si ha che $(A_1/A_g) > (A_0/A_g^*)_R$, per cui $A_1 > A_0$ e la portata non è quella massima che può entrare per la sezione d'ingresso dell'ugello (si ha cioè uno spillamento).

Per raggiungere la condizione in cui $A_1/A_g = [A_0/A_g^*]_R$ è necessario oltrepassare il numero di Mach M_0 e giungere ad $M_0 = M_{0R}$.

In queste condizioni l'onda d'urto è proprio sulla bocca dell'ugello, ma le condizioni sono tali per cui basta un piccolo incremento di velocità per farla entrare nel convergente.

Si può dimostrare però che l'onda d'urto non è stabile nel convergente, per cui essa si porta nella parte divergente del condotto come indicato in figura I6.

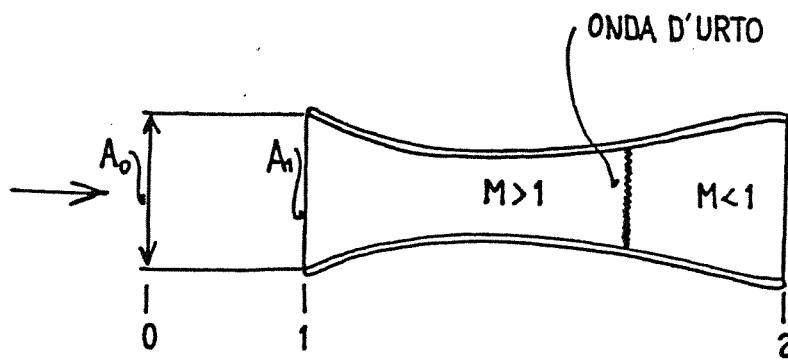


FIG.16

In queste condizioni però il flusso nel convergente è isentropico per cui per $M_0 > M_{0R}$ si ripassa sulla curva che dà i rapporti A_0/A_g^* isentropici, cioè in condizioni come quelle che caratterizzano il punto g' di figura 15.

Il flusso è decelerato supersonicamente nel convergente ed accelerato nel divergente.

Partendo ora dal punto g' (ed e') si può ridurre la velocità (muovendosi sulla linea ideale): l'onda d'urto si sposta verso la gola e quando la raggiunge siamo esattamente nelle condizioni di progetto, cioè con $M = 1$ in gola e si è ottenuta in tal modo una decelerazione isentropica. CASO PERFETTO

Si noti però che questa condizione è estremamente instabile in quanto basta ad esempio una lieve diminuzione di velocità per ritornare sulla curva reale $(A_0/A_g^*)_R$ e ripristinare l'onda d'urto alla bocca dell'ugello; un'altra causa di instabilità può essere dovuta ad un aumento della pressione p_2 che consegue ad esempio ad una diminuzione della portata richiesta.

In queste condizioni infatti, essendo il flusso del convergente supersonico, la perturbazione di pressione non può risalire oltre la gola ed il flusso a monte non può fare altro per diminuire la portata che generare un'onda d'urto all'ingresso

la quale provoca uno spillamento.

In tabella I sono riportate le caratteristiche relative alle varie zone di funzionamento.

M_o	M_g	$A_o \geq A_1$	$A_g \geq A_g^*$	$\frac{A_o}{A_g} \geq \frac{A_1}{A_g^*}$
$< M_o^{**}$	< 1	$=$	$>$	$>$
$= M_o^{**}$	$= 1$	$=$	$=$	$=$
$M_o^{**} < M_o < 1$	$= 1$	$<$	$=$	$<$
$= 1$	$= 1$	$<$	$=$	$<$
$1 < M_o < M_o^*$	$= 1$	$<$	$=$	$<$
$(M_o = M_o^*)_{IDRLE}$	$= 1$	$=$	$=$	$=$
$(M_o = M_o^*)_{REALE}$	$= 1$	$<$	$=$	$<$
$M_o = M_{OR}$	PUNTO DI TRANSIZIONE ; PUNTI e e e'			
$M_o > M_{OR}$	> 1	$=$	$>$	$>$

Fondamentalmente quindi con un ugello convergente divergente a geometria fissa per raggiungere le condizioni di progetto è necessario passare per una velocità che è superiore a quella di progetto.

Questo può comportare delle difficoltà, in quanto l'incremento di velocità richiesto rispetto a quella di progetto, può essere notevole.

Si è quindi cercato di risolvere il problema dell'ottenimento delle condizioni di progetto procedendo per altra via.

Un primo sistema può essere quello di utilizzare degli ugelli a geometria variabile; infatti se quando si è raggiunto il numero di M_{nch} si aumenta la sezione di gola dell'ugello, si abbassa il rapporto $\frac{A_1}{A_g}$, per cui tutto avviene come se si fosse ad una velocità superiore a quella di progetto.

to con conseguente disposizione delle onde d'urto come in figura 16.

Riducendo quindi a partire da questa situazione la sezione di gola e ritornando a quella iniziale si ottengono le condizioni di progetto.

Un altro sistema è quello di utilizzare degli ugelli perforati; in queste condizioni, con onde d'urto esterne, si ha una sovrappressione all'interno che permette la fuoriuscita del fluido attraverso eventuali porosità della parete.

Questo equivale, in pratica, ad un allargamento della sezione di gola per cui si ricade nella condizione precedente.

Quando si opera in condizioni di progetto la differenza tra le pressioni statiche interna ed esterna si riduce e si riduce quindi anche lo spillamento d'aria.

C'è da tenere presente però che esso rimane notevole anche in condizioni di progetto.

In figura 17 è riportato l'andamento qualitativo del rapporto tra le pressioni di ristagno in funzione della portata corretta

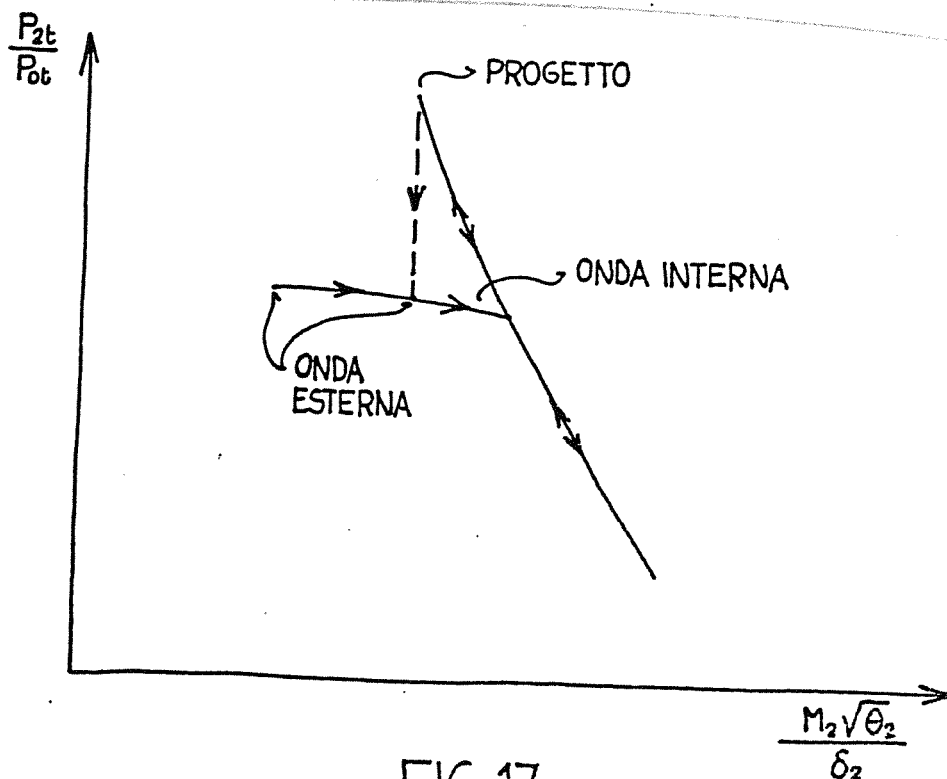


FIG. 17

ta, per i tre casi di condizioni di progetto, di onda esterna e di onda interna.

7) DIFFUSORI SUPERSONICI A CONO.

A causa dei fenomeni che si sono prima accennati l'impiego del diffusore supersonico di tipo convergente - divergente è praticamente limitato a numeri di Mach non superiori ad 1,6 - 1,7 ; d'altra parte anche il diffusore ad onda d'urto normale ha una limitazione dello stesso tipo a causa della forte perdita di pressione totale che si accompagna alla decelerazione di un flusso supersonico a subsonico attraverso una sola onda d'urto normale.

Se però la decelerazione si fa avvenire, anziché attraverso un'onda normale, mediante un sistema di una o più onde oblique seguito da una normale allora la perdita di pressione totale è molto inferiore; ad esempio se si rende subsonico un flusso a partire da $M_0 = 3$ con un'onda normale il rapporto tra le pressioni totali finale ed iniziale è di 0,33, mentre se la stessa operazione viene eseguita mediante due onde oblique ottenute con brusche deviazioni rispetto al flusso imperturbato di 15° e 30° e mediante un'onda normale, il rapporto tra le pressioni totali finale ed iniziale aumenta fino a raggiungere circa il valore di 0,73.

Il modo più semplice per ottenere la decelerazione sfruttando questo principio è quello rappresentato in figura 18.

Si può notare la formazione di un'onda d'urto obliqua a partire dalla punta del cono e di un'onda normale in corrispondenza dell'ingresso nel condotto. (Si noti che l'onda normale è così posizionata quando si è in condizioni di progetto o in condizioni cosiddette critiche).

In questo caso la compressione supersonica è tutta esterna in quanto all'imbocco del condotto il numero di Mach è < 1 a

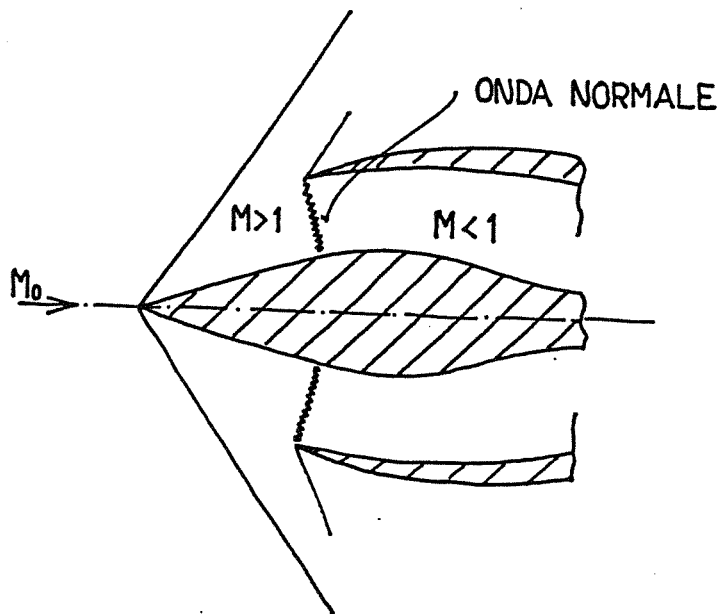


FIG. 18

causa dell'onda normale.

Vi sono anche situazioni in cui la compressione è parte interna e parte esterna (o di tipo misto) in quanto il condotto ha una porzione convergente seguita da un'onda d'urto normale.

Con il sistema riportato in figura I8 si rende minima anche la interazione tra lo strato limite e le onde d'urto, poichè dove si forma l'onda d'urto obliqua lo strato limite deve ancora formarsi.

A parte il problema dell'interazione con lo strato limite appare chiaro da quanto detto che una minore perdita di pressione totale si può avere se invece di generare una sola onda obliqua se ne producono due o tre ad un numero maggiore come mostrato in figura I9.

Ad ogni modo nel caso bisimensionale in cui le condizioni a valle di ogni onda sono uniformi si può dimostrare che la minima perdita di pressione totale si ha nel caso in cui la compressione sia ottenuta mediante n onde oblique, quando la forza di tali onde sia uguale (il che avviene quando i numeri di Mach delle componenti normali delle velocità incidenti su

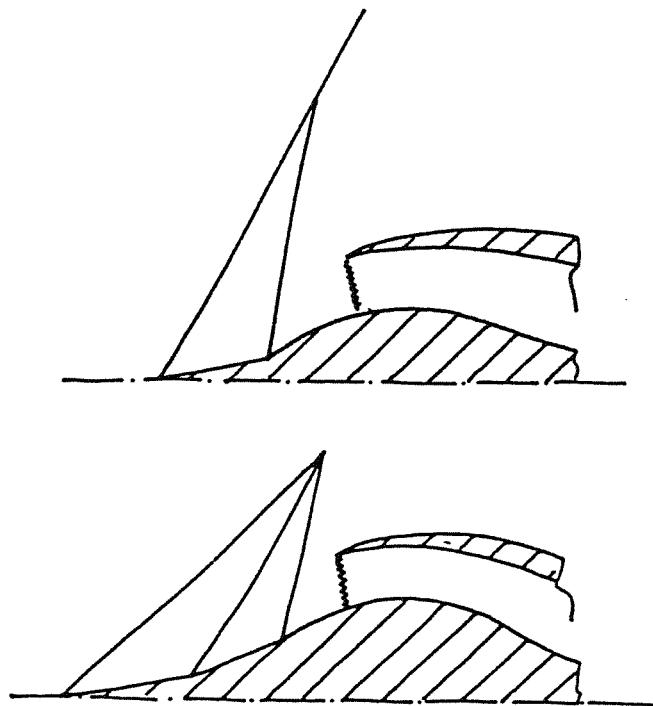


FIG. 19

ogni onda sono uguali).

E' chiaro che, in linea di principio, si può anche ottenere una compressione isentropica, attraverso la compressione mediante un numero infinito di onde d'urto infinitesime (figura 20), anche se poi in pratica si può dimostrare che pure in questo il rapporto tra le pressioni totali raggiungibili ha delle limitazioni.

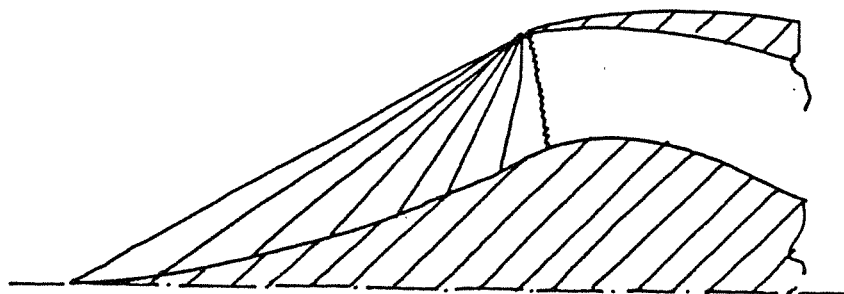


FIG. 20

In figura 21 sono ad ogni modo rappresentati i rapporti delle pressioni totali ottenibili, nelle condizioni di miglior funzionamento, nel caso isentropico, nel senso precedentemente illustrato nel caso di onda normale di ugello convergente divergente e di una o due onde oblique accompagnate da un'onda normale.

Come è già stato notato parlando dello statoreattore, questi tipi di diffusori possono funzionare in condizioni subcritiche, critiche e supercritiche.

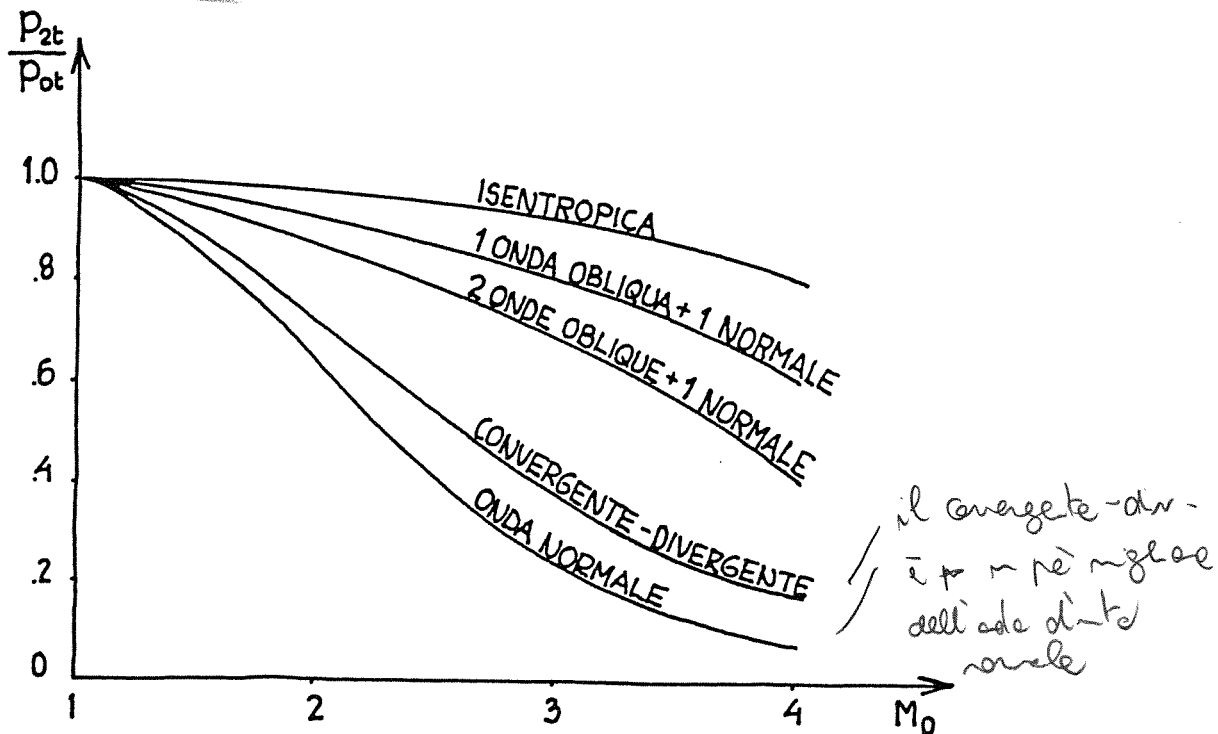


FIG. 21

In condizioni subcritiche (fig. 22a) l'onda d'urto normale è esterna al diffusore e si ha uno spillamento della portata in quanto la sezione di cattura diminuisce rispetto alla massima ammissibile; il rapporto tra le pressioni può aumentare, diminuire o rimanere costante rispetto alla condizione critica.

In condizioni critiche l'onda d'urto normale è attaccata praticamente al bordo del diffusore, la portata M_2 è massima ed il rapporto tra le pressioni totali assume il valore massimo tra tutti quelli cui compete la portata massima.

In condizioni supercritiche (figura 22c) l'onda d'urto normale penetra nell'ugello causando una riduzione del rapporto tra

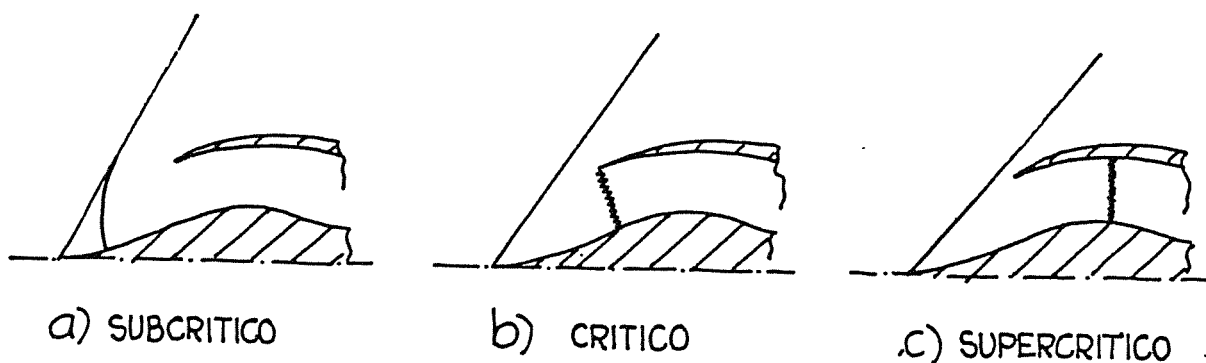


FIG. 22

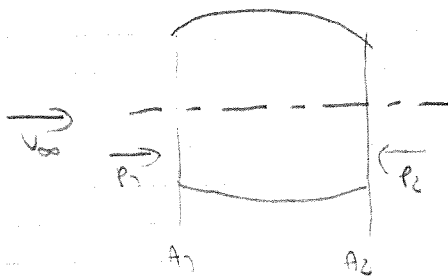
le pressioni totali ma non un incremento della portata.

L'andamento del rapporto delle pressioni in funzione della portata corretta è riportato in figura 23.

E' importante osservare che mentre in condizioni supercritiche il flusso può considerarsi stazionario anche se possono osservarsi a volte delle oscillazioni dovute probabilmente a fenomeni non stazionari di separazione dello strato limite nel diffusore subsonico, nelle condizioni di funzionamento subcritiche si osservano invece delle forti instazionarietà del flusso caratterizzate da rapide oscillazioni della posizione dell'onda d'urto d'ingresso che, come è stato già ricordato, parlando dello statoreattore, hanno un effetto estremamente negativo sulle prestazioni del motore (in inglese tale fenomeno è detto "buzz").

L'origine di questo tipo di instabilità non è ben chiara, anche se sono state proposte numerose teorie per spiegare il fenomeno del "buzz".

E' conveniente quindi cercare di limitare la regione di funzionamento subcritico, anche mediante la adozione di diffusori a geometria variabile con i quali sia possibile controllare, in un più ampio intervallo, le condizioni di ingresso.



$$F_x = P_1 A_1 - P_2 A_2 + F_i = \rho' (V_2 - V_1)$$

$$\Rightarrow P_1 A_1 - P_2 A_2 + F_i = \rho' (V_2 - V_1)$$

$$F_i = \rho' (V_2 - V_0) + P_2 A_2 - P_1 A_1$$

↑ $\rightarrow$ velocidade de difusão $\rightarrow$ onde $P = P_0$
SPINTA INTERNA

$\rho' = \text{massa unit + velocidade}$

$$\Rightarrow \rho' = \rho'_A (V_2 - V_0) + \rho'_C V_2$$

$\rightarrow V_0 \geq 0$ xcel c' e de portee acelar

$$\Rightarrow F_i = \rho'_A (V_2 - V_0) + \rho'_C V_2 + P_2 A_2 - P_1 A_1$$

Se e ci see cele de forze externe $\Rightarrow F_m = F_i + F_e$

$$F_e = P_A (A_P - A_1) - P_2 (A_P - A_2)$$



$$\Rightarrow F_m = \rho'_A (V_2 - V_0) \quad \text{together } \rho'_C \text{ e acordo de } P_2 = P_1$$

$\rightarrow$ nota: propensiva unit

$$P = F_m \cdot V_0$$

$$= \rho'_A (V_2 - V_0) V_0$$

$$\eta_p = \frac{P_{UT}}{P_{TOT}} = \frac{P_{UT}}{P_{UT} + \frac{1}{2} \rho' (V_2 - V_0)^2}$$

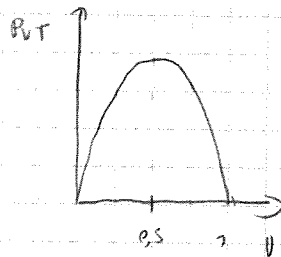
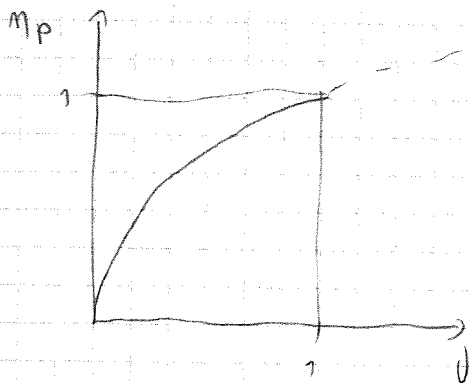
$\rightarrow$ termo negativo

$$= \frac{\rho'_A (V_2 - V_0) \cdot V_0}{\rho'_A (V_2 - V_0) V_0 + \frac{1}{2} \rho'_A (V_2 - V_0)^2}$$

$$= \frac{2V_0}{V_0 + V_2} \quad \frac{V_0}{V_2} = V \rightarrow \text{rapidez de fluidez}$$

$$\Rightarrow \eta_p = \frac{2V}{V+1}$$

Ma se $U > 1$



Se $U \geq 1$ (alta velocità propulsiva) $\Rightarrow$ max cavitazione (v. getto = v. velo)

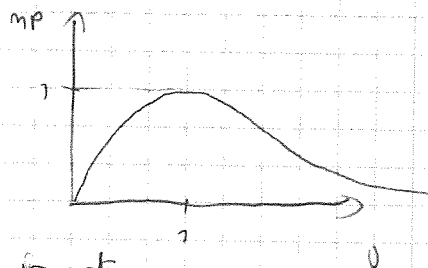
Se $U \geq 0,5 \Rightarrow$ cavitazione $\uparrow$ max P

$$\Rightarrow \begin{cases} X \text{ trasporta } U \geq 1 \\ X \text{ mette } U \geq 0,5 \end{cases}$$

$$\eta_p = \frac{G_A' v_g v_o}{G_A' v_g v_o + \frac{1}{2} G_A' (v_g - v_o)^2}$$

(vale X addeventi) il calcolatore ce lo mette di notte

$$\Rightarrow \eta_p = \frac{2U}{1+U^2}$$



$\Rightarrow U=1 \Rightarrow$ tutta l'energia è usata

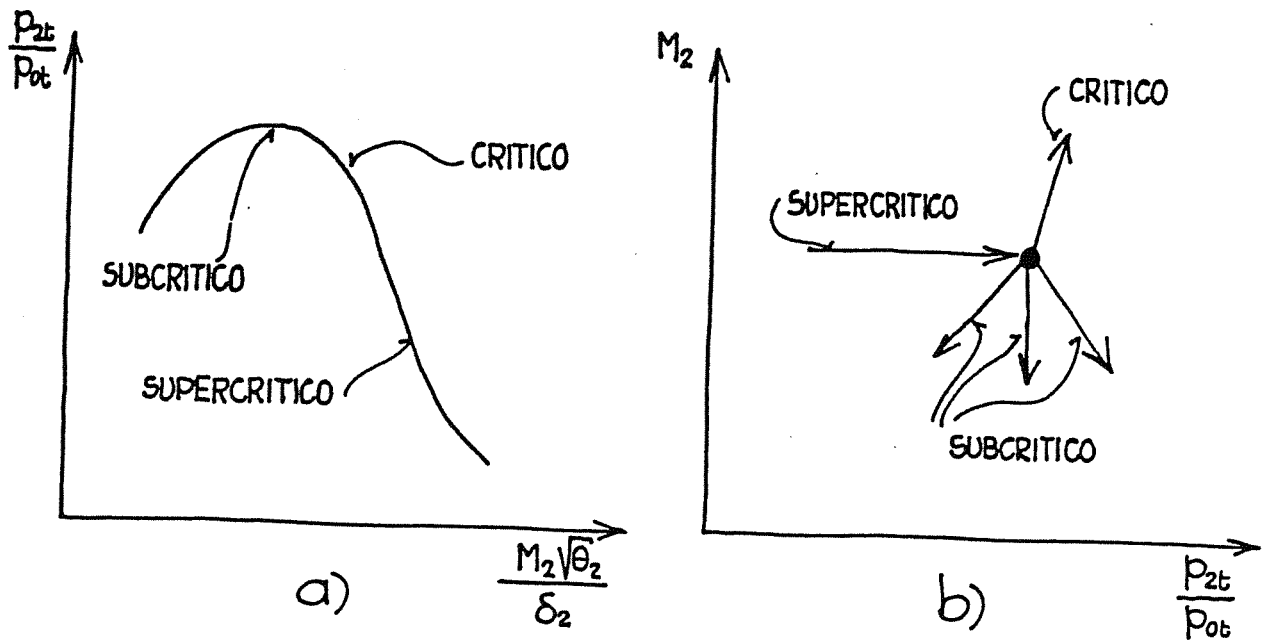


FIG. 23

8) LA RESISTENZA.

Per completare il discorso sui diffusori conviene accennare brevemente al problema della resistenza.

E' opportuno a questo fine fare riferimento alla figura 24,

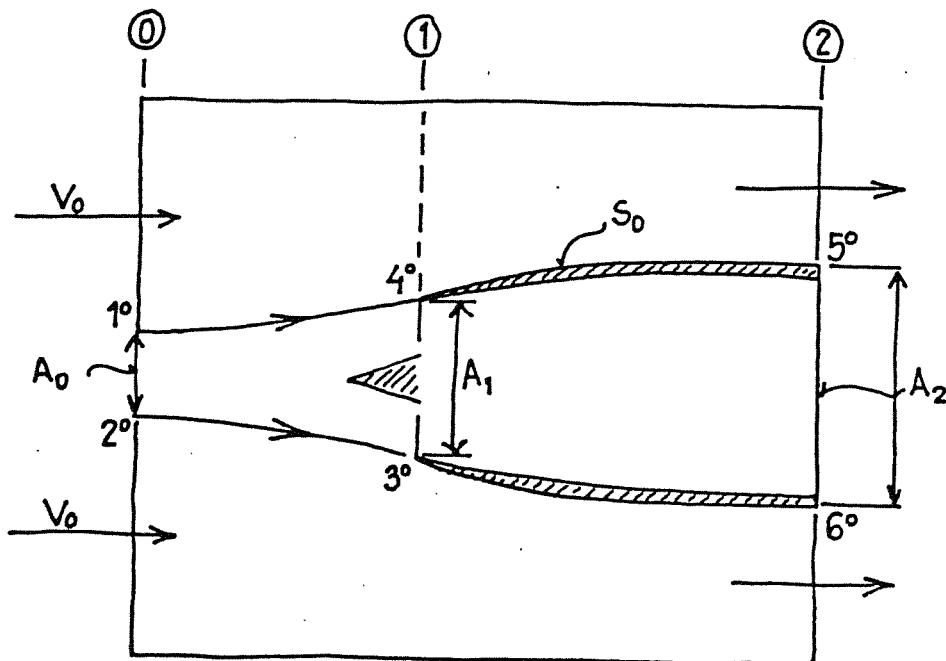


FIG. 24

in cui viene considerato oltre al flusso interno al diffusore anche il flusso ad esso esterno che indicheremo con l'indice (e).

Considerando una superficie di controllo come in figura si ha che la variazione di quantità di moto del flusso esterno è collegata alla risultante delle forze agenti sulla superficie di controllo S' e dal flusso esterno; tali forze sono essenzialmente la forza di pressione e la forza di attrito.

Poichè interessano essenzialmente le forze assiali ci si riferirà alle componenti assiali della quantità di moto e delle forze.

In queste condizioni si ha:

$$\frac{d \underline{M}_e}{dt} = \int_{S_e} (p_0 - p) dA - \int_{S_e} \tau dA \quad [8.1]$$

essendo τ lo sforzo tangenziale.

Poichè qui interessa l'azione che il flusso esterno ha sulla componente del propulsore considerata cioè la cosiddetta reazione (si tenga conto che praticamente solo il propulsore interagisce col flusso esterno), si considera l'espressione (8.1) col segno cambiato; tale forza viene chiamata resistenza esterna R_e .

Si ha allora:

$$R_e = \int_{S_e} (p - p_0) dA + \int_{S_e} \tau dA \quad [8.2]$$

da cui, indicando con S_e la superficie esterna del diffusore (e trascurando le eventuali resistenze viscosse generate non dal diretto contatto con il propulsore), si ha:

$$R_e = \int_{A_0}^{A_2} (p - p_0) dA + \int_{S_D} \tau dA \quad [8.3]$$

Tenendo conto che l'integrazione tra A_0 ed A_2 va intesa naturalmente come riferita alla superficie (1° 2° 3° 6° 5° 4°) che delimita internamente il flusso esterno.

E' il caso di notare che in caso di flusso esterno isentropico R_e è nullo.
Il termine:

$$\int_{S_D} \tau dA \quad [8.4]$$

viene chiamato resistenza di attrito.

Per quanto riguarda il primo termine del secondo membro della (8.3) conviene scomporlo come segue:

$$\int_{A_0}^{A_2} (p - p_0) dA = \int_{A_0}^{A_1} (p - p_0) dA + \int_{A_1}^{A_2} (p - p_0) dA \quad [8.5]$$

Il primo termine del secondo membro della (8.5) viene chiamato resistenza addizionale, mentre il secondo termine viene chiamato resistenza di pressione del propulsore.

Per quanto riguarda la resistenza addizionale conviene notare che essa si annulla nel caso in cui $A_0 = A_1$ cioè quando il propulsore riesce a smaltire la maggior portata possibile perchè in questo caso il flusso riesce ad arrivare indisturbato fino alla sezione di ingresso del propulsore.

Ora se in condizioni di volo subsonico la resistenza addizionale non porta in genere ad un apprezzabile incremento della resistenza anche perchè controbilanciata dal termine di resistenza di pressione, che, come si è fatto notare all'inizio del capitolo, può essere caratterizzata da valori di $p < p_0$,

in condizioni supersoniche le cose cambiano radicalmente, in quanto la condizione $A_0 < A_1$ è generalmente caratterizzata dalla presenza di un'onda d'urto di ingresso che genera lo spillamento della portata.

In queste condizioni, specie con bassi valori del rapporto A_0 / A_1 , la resistenza addizionale può essere la componente prevalente della resistenza totale del diffusore come è mostrato in figura 25.

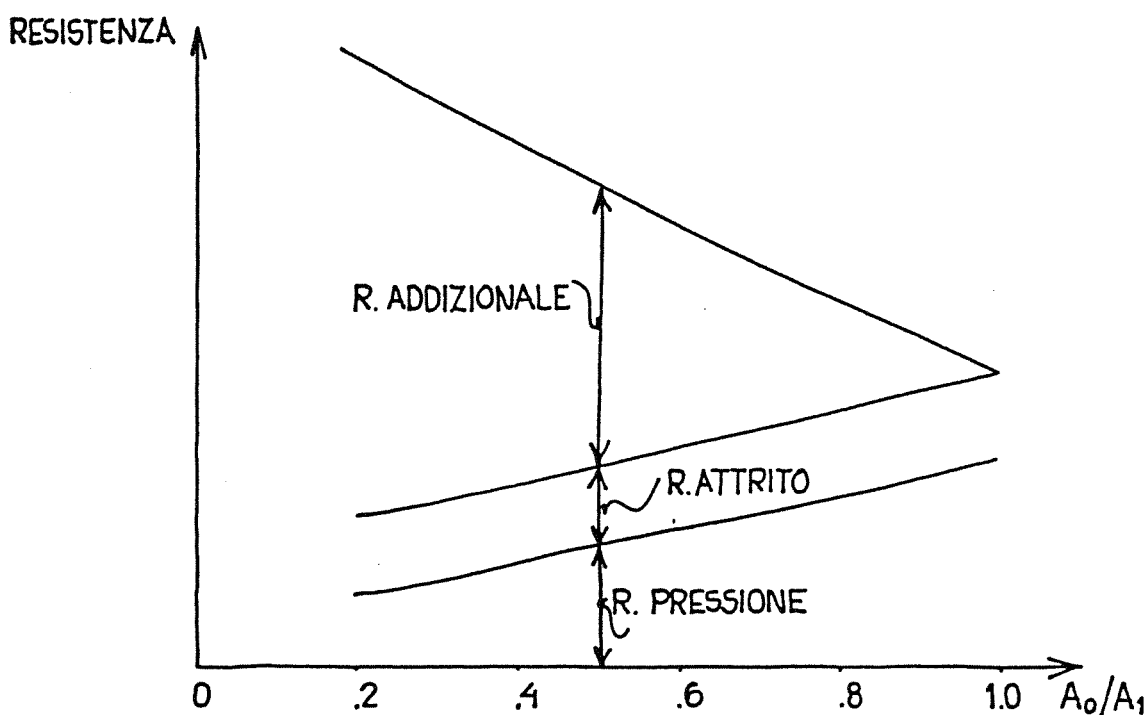


FIG. 25

Per finire conviene notare che la resistenza addizionale è molto grande se lo spillamento della portata avviene attraverso un meccanismo come quello illustrato in figura 22a, corrispondente ad un funzionamento subcritico, meno importante se avviene attraverso una semplice onda normale e meno importante ancora se avviene attraverso un'onda obliqua.

E' chiaro che estendendo a tutto il propulsore il discorso fatto per il diffusore si arriva immediatamente a definire la resistenza totale del propulsore e quindi la spinta netta

T_m precedentemente considerata.

~~*~~ LO STRATO LIMITE VISCOSO.

Come è noto gli effetti della viscosità si manifestano attraverso la presenza di uno sforzo tangenziale τ che può essere definito nel caso dei fluidi che qui interessano ed adottando la schematizzazione di fig. 20 mediante la formula:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad [11.1]$$

essendo μ il cosiddetto coefficiente di viscosità.

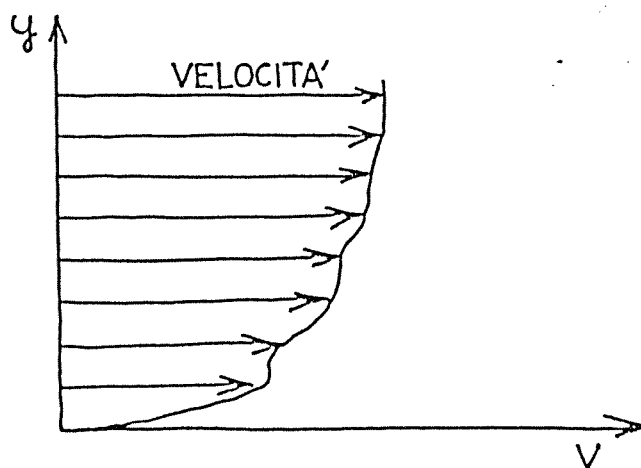


FIG. 20

Per molto tempo gli effetti della viscosità sono stati trascurati nei calcoli di carattere fluidodinamico e questo ha portato ad ottenere in molti casi risultati in contrasto con l'esperienza.

Quando la viscosità è stata introdotta nelle equazioni del movimento, si sono ottenute delle equazioni estremamente complesse (le equazioni di Navier - Stokes) che solo in casi molto particolari possono essere risolte.

Un progresso notevolissimo nella soluzione dei problemi connessi con i fluidi viscosi si ottenne mediante l'introduzione del concetto di strato limite viscoso.

Come si può vedere dalla (II.I) lo sforzo viscoso dipende, oltre che dalla viscosità del fluido, anche dai gradienti di velocità, per cui anche fluidi aventi una viscosità molto bassa (come ad esempio l'aria) possono essere soggetti a sforzi tangenziali notevoli nel caso in cui siano presenti forti gradienti della velocità.

Ora, poiché alle pareti la velocità è nulla, possono presentarsi circostanze in cui in vicinanza delle superfici solide di contorno si abbiano dei forti gradienti di velocità, in quanto tale grandezza passa, in uno spazio molto breve, dal valore nullo al valore che compete al flusso indisturbato.

Può quindi esistere un sottile strato in cui gli sforzi viscosi sono, per la (II.1), molto forti; tale strato viene dato dallo strato limite viscoso (fig. 21).

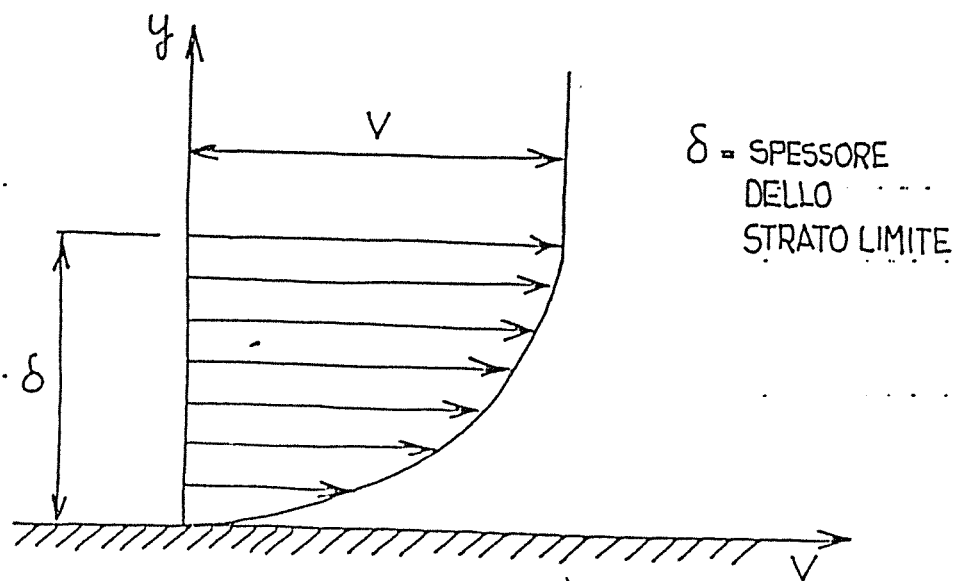


FIG. 21

Si può allora dividere il campo di flusso in due zone; lo strato limite, in cui gli sforzi viscosi sono notevoli a causa dei gradienti di velocità, ed una zona esterna ad esso in cui, essendo molto piccoli i gradienti della velocità, può venire utilizzata la teoria dei fluidi non viscosi.

Come si può dedurre da quanto precedentemente detto nello strato limite il fluido viene rallentato per azione viscosa; quindi in certe circostanze esso può non essere più in grado di seguire i contorni solidi, provocando il cosiddetto fenomeno della separazione (fig. 22).

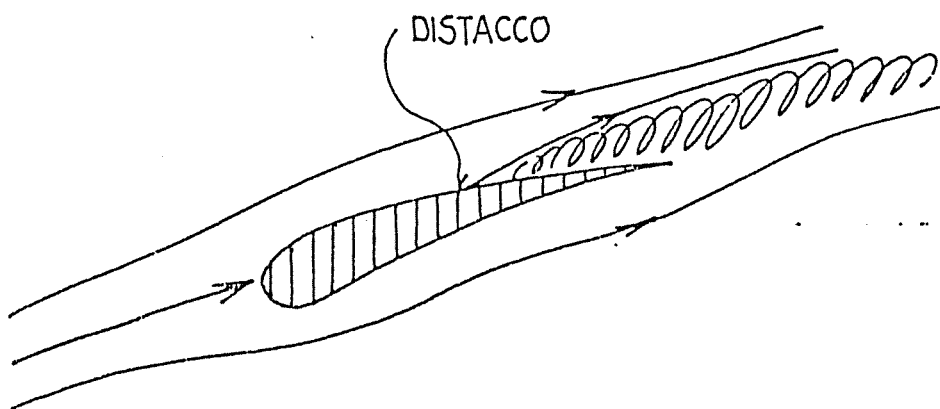


FIG. 22

La situazione è particolarmente critica quando la pressione va aumentando in direzione del flusso (come nel caso dei compressori o dei diffusori ad esempio), mentre desta meno preoccupazioni quando si ha una diminuzione di pressione nella direzione del moto (ugelli ad es.).

Anche in questo caso però può esservi separazione, quando ad esempio si formano sistemi di onde d'urto attraverso cui si hanno forti aumenti di pressione.

Il distacco di vena provoca forti perturbazioni nel campo di flusso e rende quindi particolarmente importante la possibilità di controllare lo strato limite.

In figura 23 è riportato il comportamento dello strato limite di un fluido che si muove con un gradiente di pressione positivo ($dp/dx > 0$).

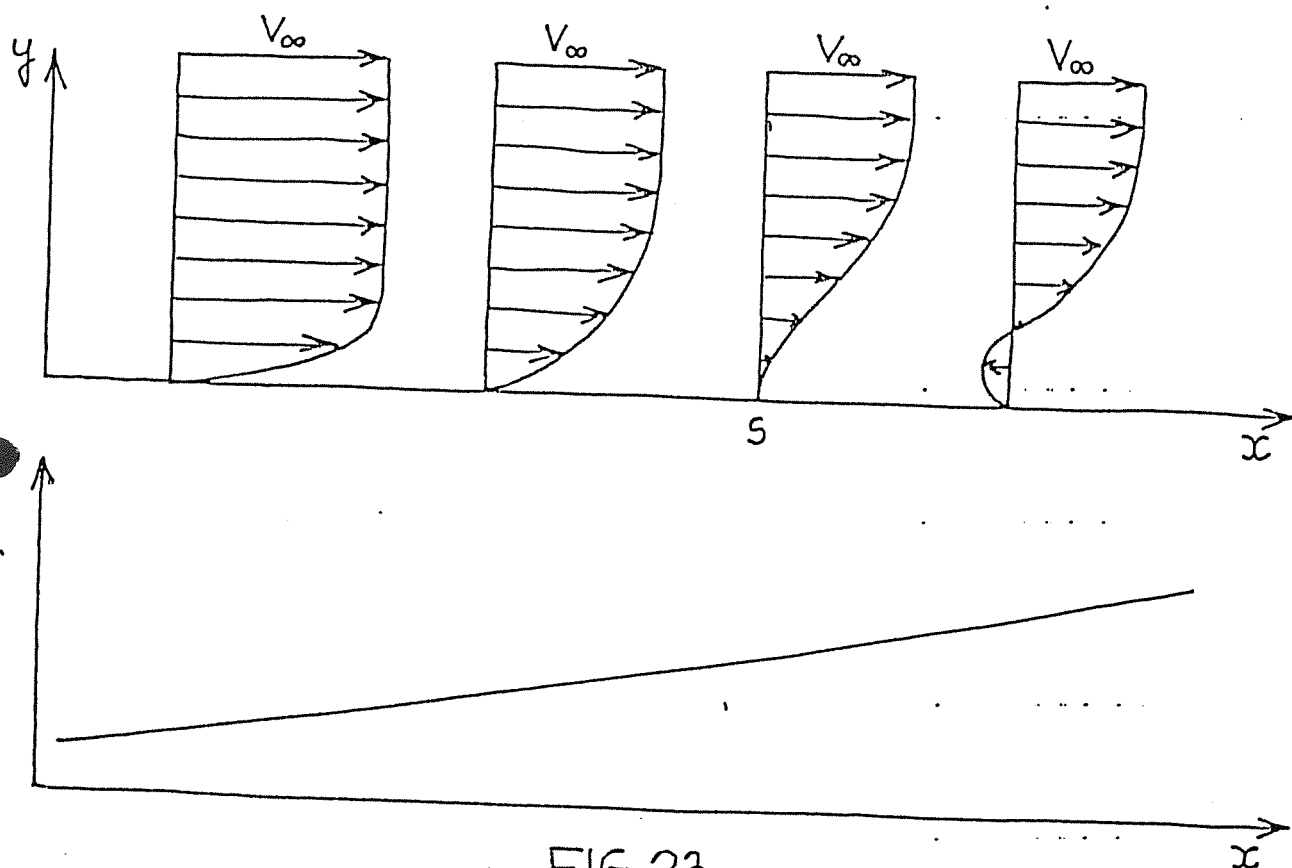


FIG. 23

L'aumento di pressione fa diminuire la velocità asintotica V_∞ ma l'effetto maggiore si fa sentire sul flusso a bassa velocità vicino alle pareti (strato limite): la velocità può diminuire fino ad annullarsi e si possono addirittura generare effetti

inversione della velocità.

In pratica si può ritenere che, almeno nel flusso bidimensionale la separazione avvenga nel punto in cui alla parete $(dv/dy) = 0$ (punto S di fig. 23).

Si osservi anche che al diminuire della velocità V_∞ va anche aumentando lo spessore dello strato limite (come si può facilmente vedere applicando l'equazione di continuità).

E' importante anche notare che il fluido a velocità più elevate lontano dalla parete tende a trascinare quello a bassa velocità dello strato limite, ritardando in tal modo la separazione.

Quindi nel caso turbolento in cui gli sforzi tangenziali sono più forti, si ha un maggior trascinamento con conseguente ritardo della separazione.

IN effetti quando lo strato limite diventa turbolento, esso ha minore tendenza a separare, questo è dovuto al maggior trasporto di particelle ad elevata quantità di moto nello strato limite.

E' evidente però che nel caso turbolento si ha un aumento di sforzo tangenziale alla parete.

Per misurare la tendenza di uno strato limite alla separazione viene introdotto il cosiddetto coefficiente di pressione C_p , dato da:

$$C_p = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} \quad [11.2]$$

in cui Δp è il salto di pressione che provoca la separazione e V_∞ è la velocità asintotica nel punto in cui la pressione inizia ad aumentare.

Nel caso di strato limite laminare si ha che $0,15 < C_p < 0,2$, mentre nel caso di strato limite turbolento $0,4 < C_p < 0,8$.

Il passaggio del flusso da laminare a turbolento è, come noto, regolato dal numero di Reynolds (R_e) dato da:

$$R_e = \frac{\rho V L}{\mu} \quad [11.3]$$

essendo V ed L una velocità ed una lunghezza caratteristiche (ad esempio, nel caso di un condotto, V può essere la velocità media ed L il diametro del condotto).

Quando il numero di Reynolds è inferiore ad un certo valore critico ($R_e < R_{e_{cr}}$) il flusso è laminare, mentre quando $R_e > R_{e_{cr}}$ il flusso diventa turbolento.

Lo strato limite può essere trattato in modo quantitativo scrivendo le equazioni che ad esso competono e cercandone una soluzione.

Tali equazioni possono essere ottenute da quelle di Navier-Stokes trascurando i termini che non sono importanti per il flusso nello strato limite (si noti ad esempio che viene trascurato il gradiente di pressione attraverso lo strato limite, cioè il dp/dy con riferimento alla fig. 13). Nel caso di strato limite laminare è abbastanza agevole ottenere, in molti casi, delle soluzioni esatte delle equazioni.

Nel caso turbolento si incontrano invece problemi molto maggiori, specie a causa della difficoltà di esprimere gli sforzi tangenziali.

C'è infatti da notare che in questo caso è necessario tenere conto nell'espressione di $\int$ del contributo delle fluttuazioni di velocità che si riscontrano nel moto turbolento.

Nel caso turbolento conviene esprimere le componenti V_1, V_2, V_3 della velocità come somma di una parte stazionaria $\bar{V}$ e di una parte fluttuante V' che è anche funzione del tempo, in modo tale che si abbia:

$$\left. \begin{aligned} V_1(x, y, t) &= \bar{V}_1(x, y) + V'_1(x, y, t) \\ V_2(x, y, t) &= \bar{V}_2(x, y) + V'_2(x, y, t) \\ V_3(x, y, t) &= \bar{V}_3(x, y) + V'_3(x, y, t) \end{aligned} \right\} [11.4]$$

In queste condizioni si può vedere che l' sforzo tangenziale

J può essere espresso come:

$$J = \mu \frac{\partial V_1}{\partial x} - \rho \overline{V_1' V_2'} \quad [11.5]$$

La grossa difficoltà che si incontra è nella previsione (e nell'espressione esplicita) del termine $\rho \overline{V_1' V_2'}$.

In genere si vede che le fluttuazioni di velocità sono molto più grandi nello strato limite che nella corrente libera.

Tuttavia c'è da notare che molto vicino alla parete (anche nel caso turbolento) lo strato limite è laminare (si dice che vi è un substrato laminare), in quanto la presenza dei contorni solidi smorza le fluttuazioni turbolente/

12) LO STRATO LIMITE TERMICO.

Se un fluido che si considera non viscoso ha variazioni termiche (o se esse possono essere trascurate), in modo che la viscosità e la densità si possano ritenere costanti, lo studio dei profili di velocità nello strato limite può essere eseguito solo mediante l'impiego delle equazioni dell'energia e di continuità che qui di seguito vengono riportate nel caso bidimensionale e per fluido incomprimibile:

continuità:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0$$

quantità di moto:

$$V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} \quad [12.2]$$

essendo ν la viscosità cinematica ($\nu = \mu/\rho$).

Come si può vedere le equazioni precedenti non dipendono dalla temperatura.

In molte circostanze vi è però una differenza di temperatura tra la parete ed il fluido tenuto in movimento (siamo cioè nel caso di convezione forzata) e questo fa sì che vi sia una tra-

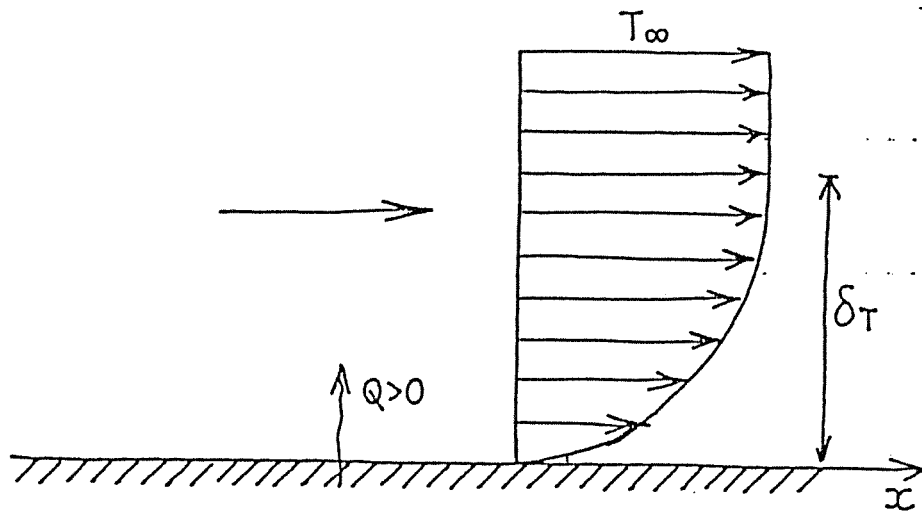


FIG. 24

Esiste un'interessante analogia tra l'equazione della quantità di moto e quella dell'energia; tale analogia permette tra l'altro di giustificare l'affermazione per cui $\delta \simeq \delta_T$.

Se si considera il caso di gradiente di pressione trascurabile ($d p / d x = 0$) e di viscosità trascurabile [$\mu (\partial^2 V_1 / \partial y^2) = 0$] le due equazioni si possono scrivere come segue:

$$\text{quantità di moto: } V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} \quad [12.4]$$

$$\text{energia: } V_1 \frac{\partial T}{\partial x} + V_2 \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad [12.5]$$

(dove le proprietà del fluido sono tenute costanti).

Si osserva dalle (12.4) e (12.5) che se:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad [12.6]$$

($C = C_p$) le due equazioni sono del tutto simili, per cui se le condizioni al contorno sono le stesse, da una soluzione dell'equazione della quantità di moto si può dedurre una soluzione dell'equazione dell'energia.

Le condizioni al contorno sono le stesse nel caso in cui si adottino come variabili nelle equazioni precedenti $V_1 / V_{1\infty}$

e $(T_p - T) / (T_p - T_\infty)$, che sono entrambi nulle alla parete ed assumono valore unitario asintoticamente ($T_p = \text{cost}$).

Si noti che in queste condizioni si ha:

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = V_\infty \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V_1}{V_\infty} \right) \quad [12.7]$$

e:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = - (T_p - T_\infty) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T_p - T}{T_p - T_\infty} \right) \quad [12.8]$$

Il rapporto tra lo sforzo tangenziale alla parete τ_0 e la quantità di calore scambiata per unità di superficie e di tempo (a) è allora:

$$\frac{\tau_0}{Q} = \frac{\mu \left[\frac{\partial V_1}{\partial y} \right]_{y=0}}{-\lambda \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0}} = \frac{\mu V_\infty \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V_1}{V_\infty} \right) \right]_{y=0}}{\lambda (T_p - T_\infty) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T_p - T}{T_p - T_\infty} \right) \right]_{y=0}} = \frac{\mu}{\lambda} \frac{V_\infty}{(T_p - T_\infty)} \quad [12.9]$$

essendo uguali le due derivate a numeratore e denominatore per quanto detto precedentemente.

Nell'ipotesi che valga la (12.6) si ha anche, come conseguenza; l'uguaglianza degli spessori dello strato limite termico e viscoso ($\delta_T = \delta$).

La (12.9) può anche essere scritta come:

$$\frac{\tau_0}{\rho V_\infty^2} = \frac{\mu}{\rho V_\infty X} \left[\frac{Q X}{(T_p - T_\infty) \lambda} \right] \quad [12.10]$$

essendo X la distanza misurata a partire dal punto in cui incomincia a svilupparsi lo strato limite.

Se si introduce ora il coefficiente di scambio termico h è noto che si può scrivere:

$$Q = h (T_p - T_\infty) \quad [12.11]$$

per cui la (12.10) diventa:

$$\frac{\tau_0}{\rho V_\infty^2} = \left(\frac{\mu}{\rho V_\infty X} \right) \left(\frac{h X}{\lambda} \right) \quad [12.12]$$

Definendo un coefficiente di attrito C_a come:

$$C_a = \frac{J_o}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} \quad [12.13]$$

ed un numero di Reynolds Re_x , riferito alla lunghezza x , come:

$$Re_x = \frac{\rho V_\infty x}{\mu} \quad [12.14]$$

la (12.12) diventa:

$$Nu_x = \frac{1}{2} Re_x C_a \quad [12.15]$$

avendo introdotto anche il numero di Nusselt:

$$Nu_x = \frac{h x}{\lambda} \quad [12.16]$$

Nel caso laminare ($J = \mu \partial V / \partial y$) si può determinare lo scambio termico dal numero di Re e dal coefficiente di attrito, se è valida la (12.6), cioè se il numero di Prandtl Pr , definito come:

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} \quad [12.17]$$

è unitario (valore che è avvicinato da molti gas).

Quando si considera il caso turbolento le cose si complicano in quanto la turbolenza incrementa grandemente gli scambi energetici.

Anche in questo caso si può tuttavia dimostrare che nel caso di condotti a flusso turbolento completamente sviluppato (cioè quando si è in condizioni per cui i profili di velocità e di temperatura non variano procedendo nella direzione del flusso) si ha una analogia tra sforzo tangenziale e scambio termico analoga a quella che vale nel caso laminare.

Si ha allora, anche in questo caso, che:

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{V_1}{\bar{V}} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{T_p - T}{T_p - \bar{T}} \right) \quad [12.18]$$

essendo $\bar{V}$ e $\bar{T}$ la velocità e la temperatura media del

fluido nel condotto (cioè ad es. $\bar{T} = \dot{m} / (\pi R^2 \rho)$) con $\dot{m}$ portata nel condotto ed R il raggio del condotto).

Dalle relazioni precedenti si ottiene:

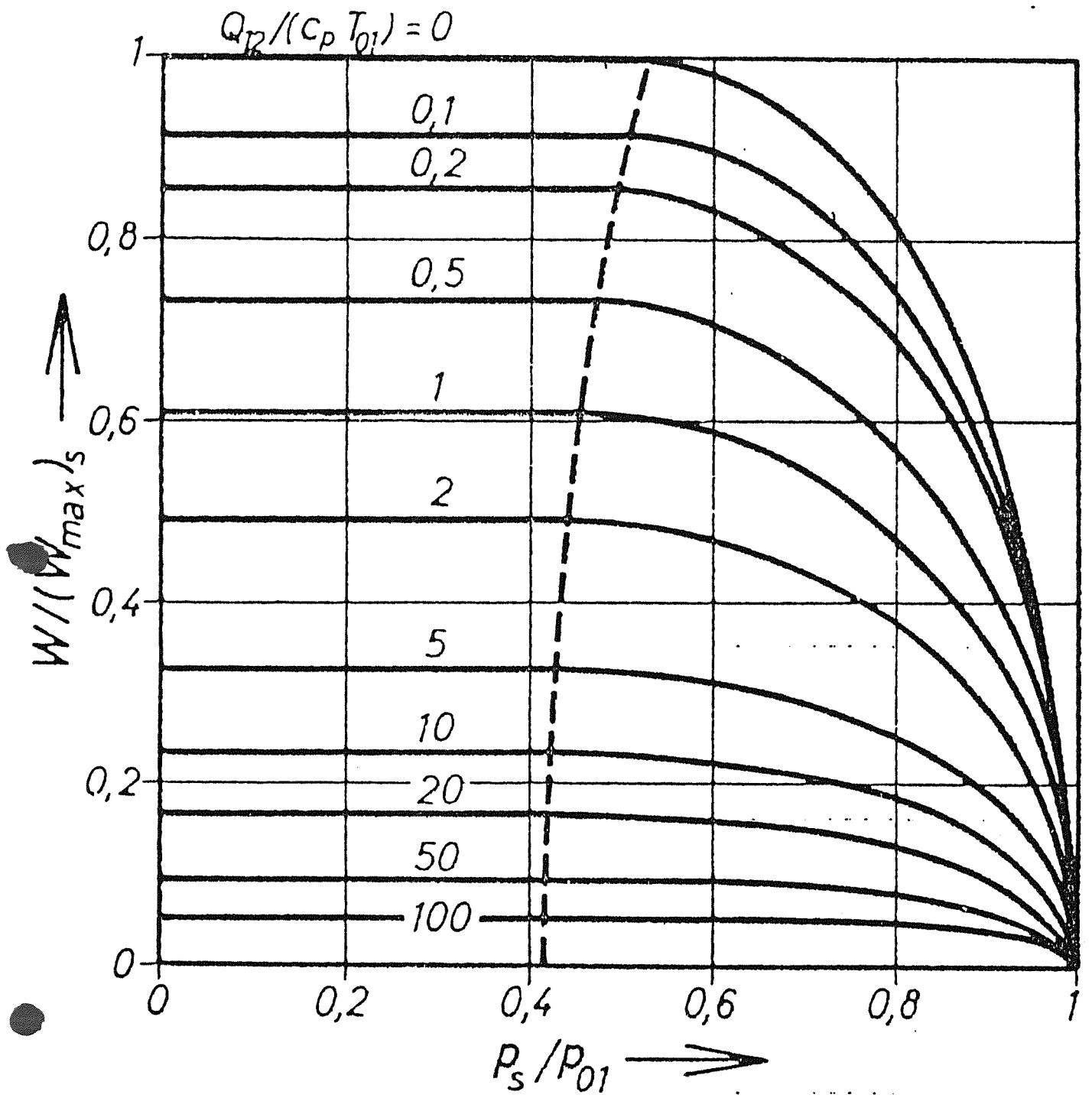
$$\frac{J_o}{Q} \approx \frac{\bar{V}}{C_p(\bar{T}_p - \bar{T})} \quad [12.19]$$

Nel caso di flusso turbolento è però necessario, data la complessità del fenomeno, fare ricorso a relazioni sperimentali per definire lo scambio termico.

Così ad esempio nel caso di condotti lunghi il coefficiente di scambio h può essere collegato al numero di Reynolds ed al numero di Prandtl (calcolati assumendo come velocità e temperatura del fluido rispettivamente $\bar{V}$ e $\bar{T}$) dalla relazione:

$$\begin{aligned} h &= \frac{\bar{\lambda}}{D} 0.023 \left(\frac{\bar{p} \bar{V} D}{\bar{\mu}} \right)^{0.8} \left(\frac{\mu C_p}{\bar{\lambda}} \right)^{0.33} \\ &= \frac{\bar{\lambda}}{D} 0.023 (Re)^{0.8} (Pr)^{0.33} \end{aligned} \quad [12.20]$$

essendo D il diametro del condotto (e $\bar{p}$, $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ calcolati in corrispondenza della temperatura $\bar{T}$).



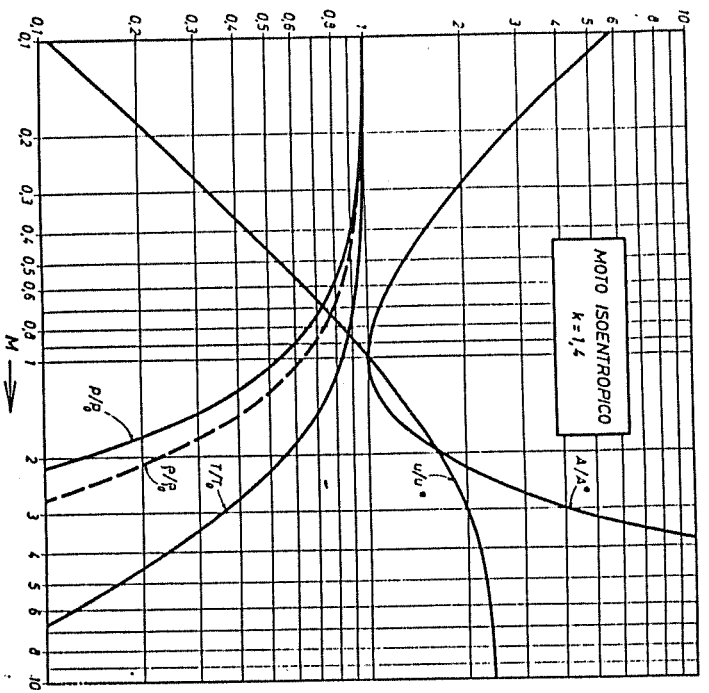
Appendice A2

FUNZIONI DEL MOTO ISOENTROPICO E DELLE PROPRIETÀ
DI RISTAGNO PER GAS IDEALE

$k = 1,4$

M	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{A}{A^*} \frac{P}{P_0}$
0	∞	1,00000	1,00000	1,00000	∞
0,05	11,592	0,99825	0,99875	0,99950	11,571
0,10	5,8218	0,99303	0,99502	0,99800	5,7812
0,15	3,9103	0,98441	0,98884	0,99552	3,8493
0,20	2,9635	0,97250	0,98027	0,99206	2,8820
0,25	2,4027	0,95745	0,96942	0,98765	2,3005
0,30	2,0351	0,93947	0,95638	0,98232	1,9119
0,35	1,7780	0,91877	0,94128	0,97608	1,6336
0,40	1,5901	0,89562	0,92428	0,96899	1,4241
0,45	1,4487	0,87027	0,90552	0,96108	1,2607
0,50	1,3398	0,84302	0,88517	0,95238	1,12951
0,55	1,2550	0,81416	0,86342	0,94295	1,02174
0,60	1,1882	0,78400	0,84045	0,93284	0,93155
0,65	1,1356	0,75283	0,81644	0,92208	0,85493
0,70	1,09437	0,72092	0,79158	0,91075	0,78896
0,75	1,06242	0,68857	0,76603	0,89888	0,73155
0,80	1,03823	0,65602	0,74000	0,88652	0,68110
0,85	1,02067	0,62351	0,71361	0,87374	0,63640
0,90	1,00886	0,59126	0,68704	0,86058	0,59650
0,95	1,00214	0,55946	0,66044	0,84710	0,56066
1,00	1,00000	0,52828	0,63394	0,83333	0,52828
1,05	1,00202	0,49787	0,60765	0,81933	0,49888
1,10	1,00793	0,46835	0,58169	0,80515	0,47206
1,15	1,01746	0,43983	0,55616	0,79083	0,44751
1,20	1,03044	0,41238	0,53114	0,77640	0,42493
1,25	1,04676	0,38606	0,50670	0,76190	0,40411
1,30	1,06631	0,36092	0,48291	0,74738	0,38484

M	$\frac{A}{A^*}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{A}{A^*} \frac{P}{P_0}$
1,35	1,08904	0,33697	0,45980	0,73287	0,36697
1,40	1,1149	0,31424	0,43742	0,71839	0,35036
1,45	1,1440	0,29272	0,41581	0,70397	0,33486
1,50	1,1762	0,27240	0,39498	0,68965	0,32039
1,55	1,2115	0,25326	0,37496	0,67545	0,30685
1,60	1,2502	0,23527	0,35573	0,66138	0,29414
1,65	1,2922	0,21839	0,33731	0,64746	0,28221
1,70	1,3376	0,20259	0,31969	0,63372	0,27099
1,75	1,3865	0,18782	0,30287	0,62016	0,26042
1,80	1,4390	0,17404	0,28682	0,60680	0,25044
1,85	1,4952	0,16120	0,27153	0,59365	0,24102
1,90	1,5552	0,14924	0,25699	0,58072	0,23211
1,95	1,6193	0,13813	0,24317	0,56802	0,22367
2,00	1,6875	0,12780	0,23005	0,55556	0,21567
2,05	1,7600	0,11823	0,21760	0,54333	0,20808
2,10	1,8369	0,10935	0,20580	0,53135	0,20087
2,15	1,9185	0,10113	0,19463	0,51962	0,19403
2,20	2,0050	0,09352	0,18405	0,50813	0,18751
2,25	2,0964	0,08648	0,17404	0,49689	0,18130
2,30	2,1931	0,07997	0,16458	0,48591	0,17539
2,35	2,2953	0,07396	0,15564	0,47517	0,16975
2,40	2,4031	0,06840	0,14720	0,46468	0,16437
2,45	2,5168	0,06327	0,13922	0,45444	0,15923
2,50	2,6367	0,05853	0,13169	0,44444	0,15432
2,55	2,7630	0,05415	0,12458	0,43469	0,14963
2,60	2,8960	0,05012	0,11787	0,42517	0,14513
2,65	3,0359	0,04639	0,11154	0,41589	0,14083
2,70	3,1830	0,04295	0,10557	0,40684	0,13671
2,75	3,3376	0,03977	0,09994	0,39801	0,13276
2,80	3,5001	0,03685	0,09462	0,38941	0,12897
2,85	3,6707	0,03415	0,08962	0,38102	0,12534
2,90	3,8498	0,03165	0,08489	0,37286	0,12185



- Funzioni del moto isentropico e delle proprietà di ristagno per un gas ideale con $k = 1,4$.

PROBLEMA

Un gas a comportamento ideale ($k = 1,4$) fluisce isentropicamente in un condotto. In un dato punto l'area della sezione trasversale è di 100 cm^2 ed il corrispondente numero di Mach è $M_1 = 0,5$.

Determinare:

- l'area della sezione trasversale del condotto nella quale il numero di Mach è uguale a 2;
- il numero di Mach in due sezioni trasversali la cui area è di $149,64 \text{ cm}^2$ e di 70 cm^2 rispettivamente.

Dalla tabella A2 dell'Appendice si ottiene in corrispondenza a $M_1 = 0,5$:

$$\frac{A_1}{A^*} = 1,34$$

da cui:

$$A_1^* = \frac{A_1}{1,34} = 74,638 \text{ cm}^2.$$

- In corrispondenza a $M_2 = 2$ si ha:

$$\frac{A_2}{A^*} = 1,687$$

e poiché il moto è isentropico $A_2^* = A_1^* = A^*$:

$$A_2 = A^* \cdot 1,687 = 125,95 \text{ cm}^2.$$

- Ancora dalla tabella A2, essendo:

$$A_2 = 149,64$$

e quindi:

$$\frac{A_2}{A^*} = 2,005$$

si ottengono in corrispondenza due valori di M :

$$M_2 = 2,2$$

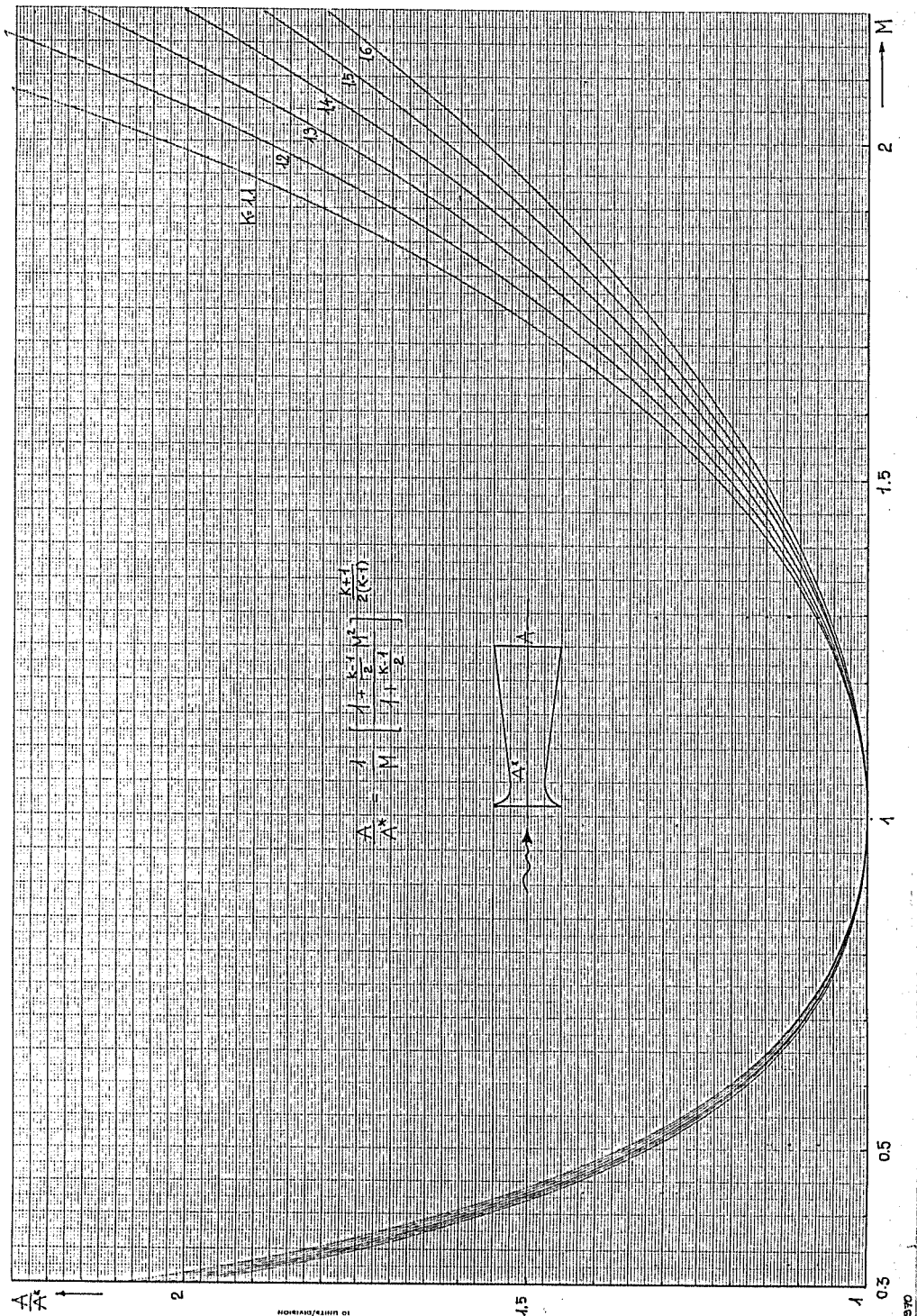
$$M_2 = 0,305.$$

Se non si hanno altre informazioni entrambe le soluzioni sono possibili. È chiaro che se $M_2 = 2,2$ è necessario che nel condotto esista un'area di gola eguale ad A^* .

Invece per $A_2 = 70 \text{ cm}^2$ risulta:

$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{70}{74,638} < 1,$$

ma nel moto isentropico il rapporto $\frac{A}{A^*}$ deve essere maggiore dell'unità e quindi in questo caso nessuna soluzione è possibile.



$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{1 + \frac{K-1}{2} M^2}{1 + \frac{K-1}{2}} \right]^{\frac{K+1}{2(K-1)}}$$



HEWLETT-PACKARD/HOBLEY DIVISION
8270-1024
FOR USE ON AUTOMATIC RECORDERS
10 HITS/REVISION

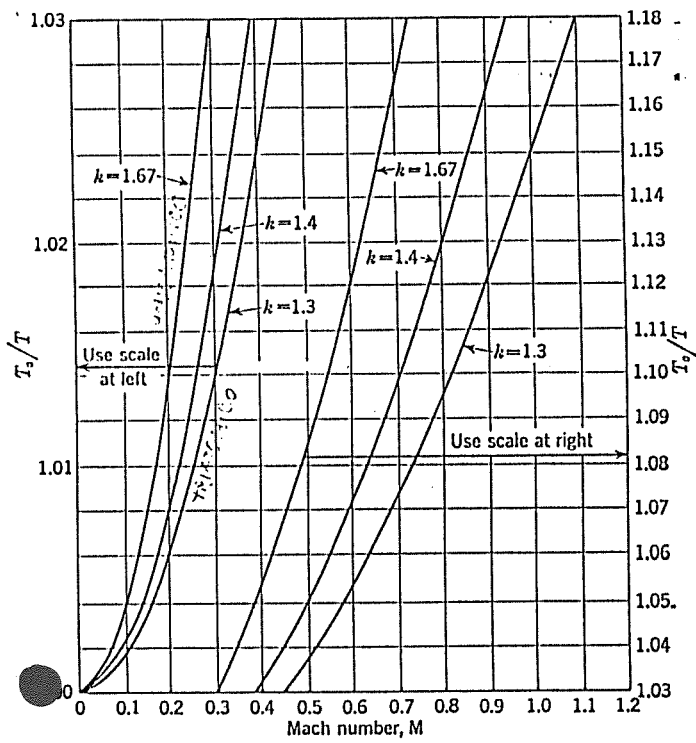


FIG. 3-8. Stagnation-temperature rise ratio at low Mach numbers.

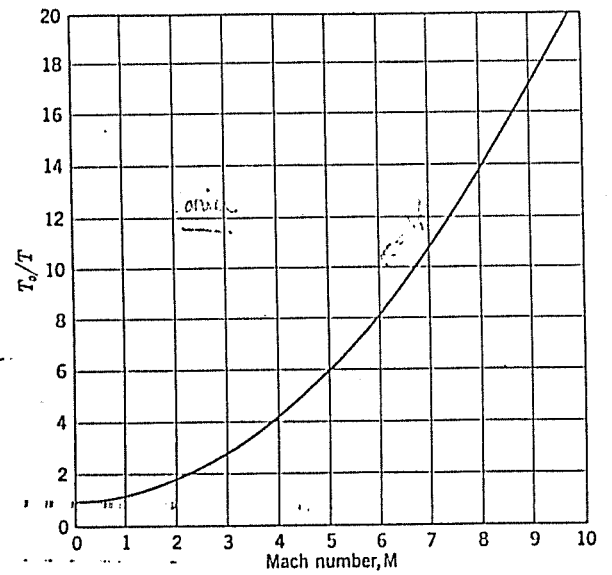


FIG. 3-9. Stagnation-temperature rise ratio at high Mach numbers.

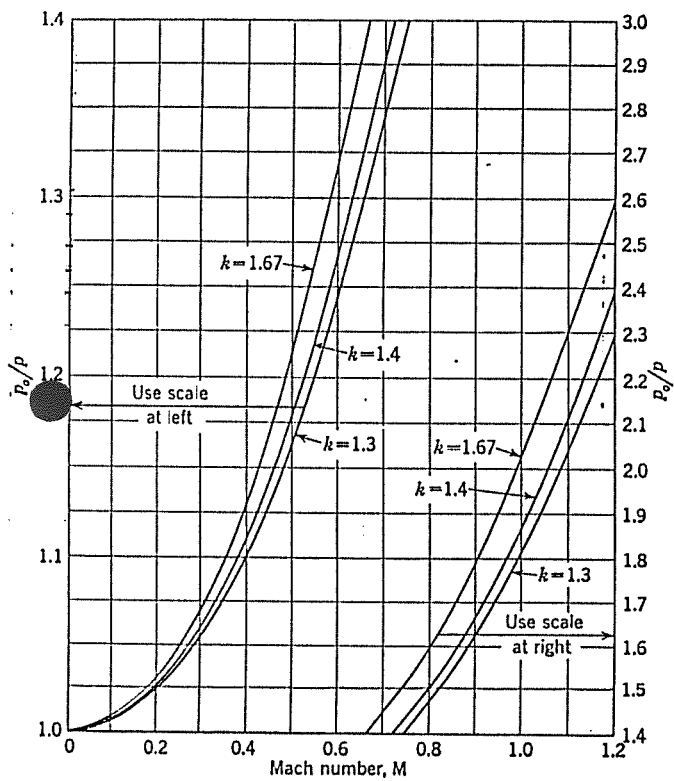


FIG. 3-10. Stagnation-pressure rise ratio at low Mach numbers.

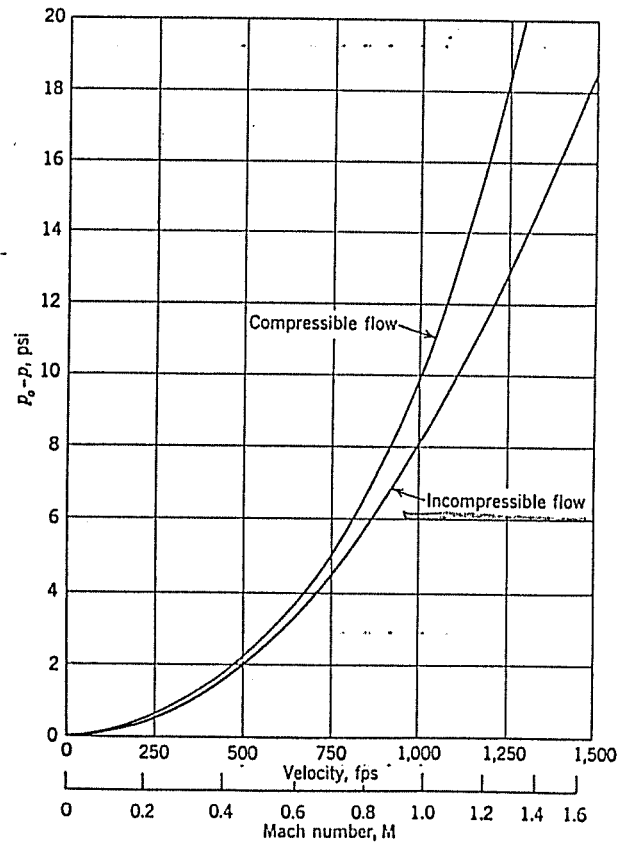
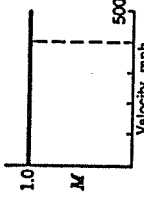
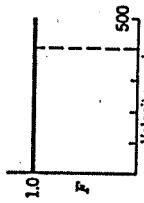
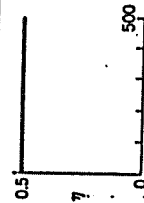
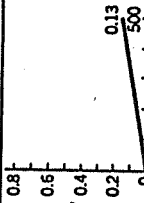
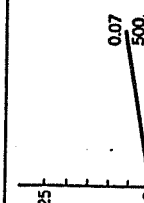
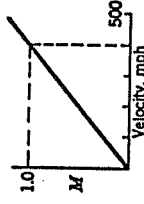
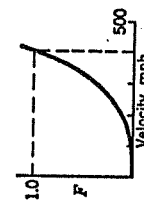
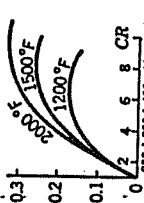
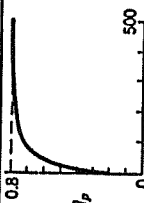
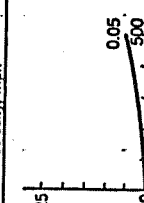
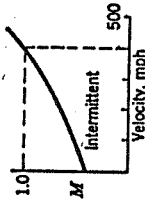
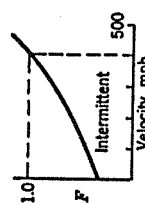
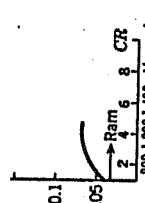
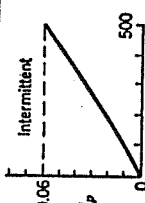
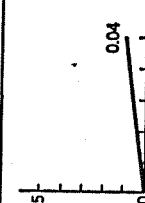
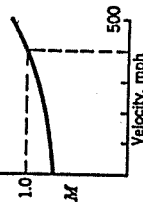
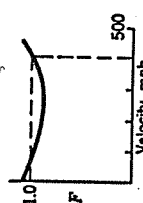
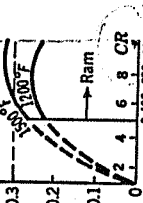
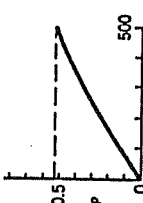
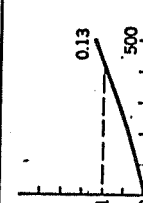
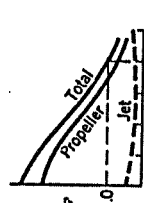
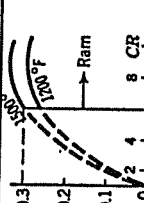
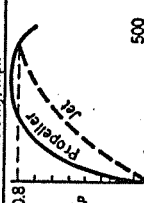
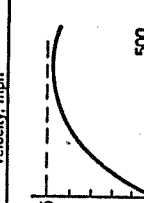
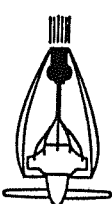
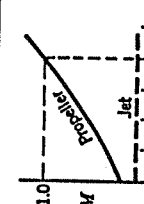
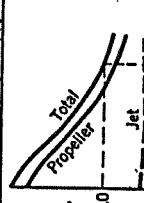
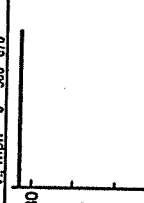
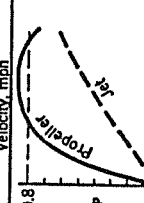
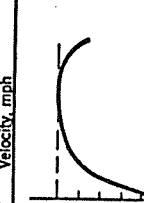


FIG. 3-11. Stagnation-pressure rise.

Propulsion method	Picture	Mass of air or gas handled, M	Thrust F	Efficiency of converting fuel energy to mechanical energy, η	Propulsive efficiency, η_p	Over all efficiency, η
Rocket						
Athodyd						
Pulse jet						
Gas turbine jet						
Gas turbine with geared propeller and exhaust jet						
Supercharged reciprocating engine with geared propeller and exhaust jet						

Characteristics of types of aircraft. (Westinghouse.)

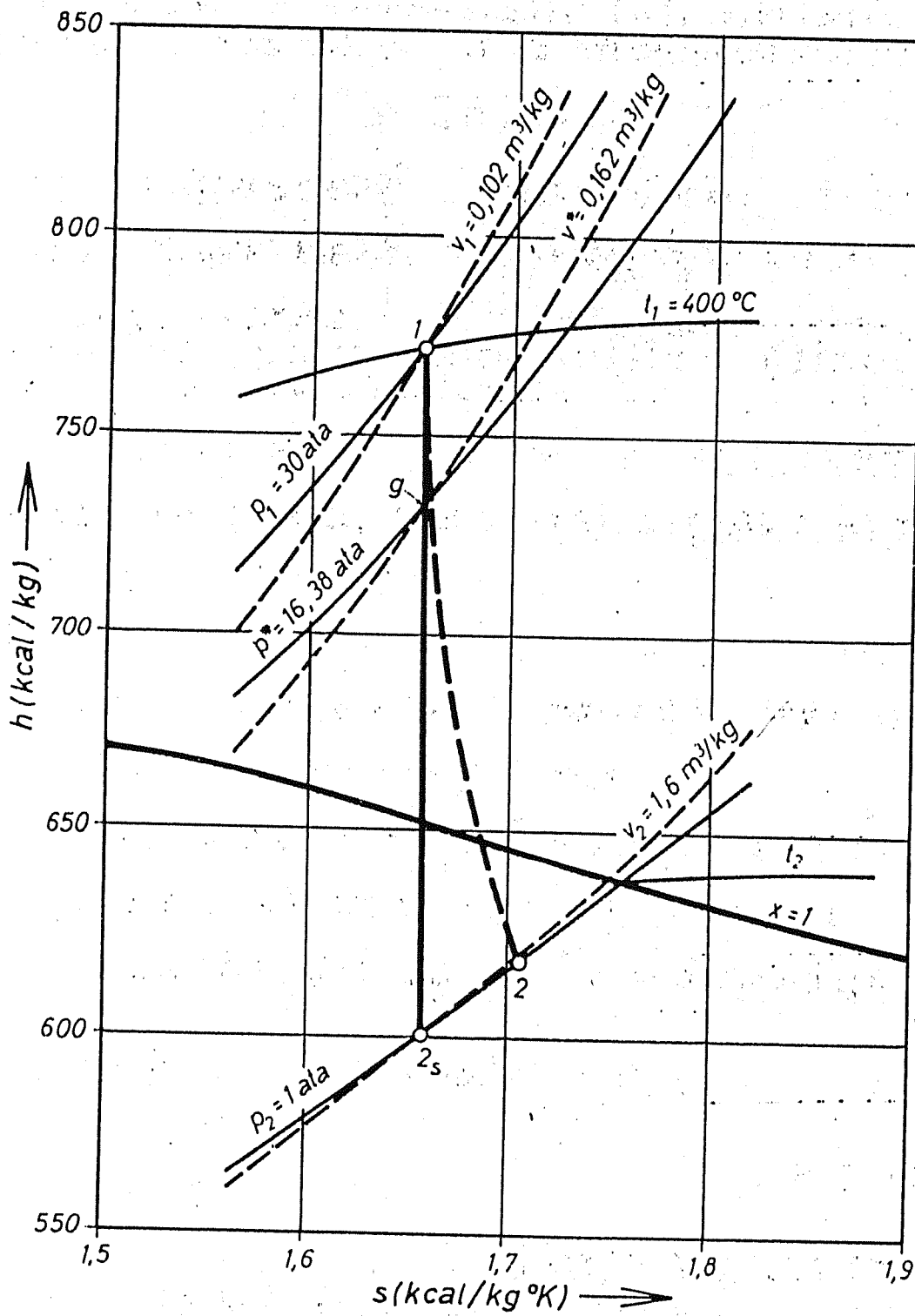


Fig. 3.6.1.P. - Problema 3.6.1.

Dimensionare un ugello di De Laval ad asse
utilino per una portata di $W = 9500 \text{ kg/h}$ di va-
r d'acqua surriscaldato inizialmente alla pres-
sione $p_1 = 30 \text{ ata}$ e temperatura $t_1 = 400^\circ \text{C}$ quan-
to la pressione finale è $p_2 = 1 \text{ ata}$. Si assuma tra-
sversabile la velocità all'ingresso ed isocinetica
espansione.

Determinare inoltre la velocità di efflusso se
rendimento isocinetico dell'ugello, anziché mi-
nio, risultasse $\eta_u = 0.9$.

La fig. 3.6.1 P illustra il processo nel dia-
gramma $h-s$.

L'area della sezione di uscita A_2 risulta allo-
ra:

$$A_2 = \frac{Wv_{2s}}{u_{2s}} = 35.2 \text{ cm}^2.$$

Si possono ora calcolare il diametro della se-
zione di gola d_g e della sezione terminale del di-
vergente d_2 : risulta $d_2 = 6.7 \text{ cm}$ e $d_g = 3.0 \text{ cm}$;
assunto un semiangolo di apertura $\alpha_1 = 7^\circ$ rimane
anche determinata la lunghezza l del tratto diver-
gente:

$$l = \frac{d_2 - d_g}{2 \cdot \tan \alpha_1} = \frac{6.7 - 3.0}{2 \cdot 0.1227} = 15 \text{ cm}.$$

Se il rendimento dell'ugello è $\eta_u = 0.9$ la ve-
locità reale di efflusso si ottiene dalla (3.6.1):

$$u_2 = \sqrt{\eta_u} \sqrt{2(h_1 - h_{2s})} = 1138 \text{ m/sec}$$

e l'entalpia dello stato finale 2 (cfr. diagramma
di fig. 3.6.1 P) risulta:

$$h_2 = h_1 - \eta_u(h_1 - h_{2s}) = 772 - 0.9(772 - 600) = 617.2 \text{ kcal/kg}.$$

Si osserva che l'espressione empirica $p v^{1.3} = \text{cost}$ è stata impiegata per determinare la pres-
sione critica e quindi indirettamente l'area di go-
la. Le velocità nelle sezioni di gola e di uscita
sono state calcolate con l'ausilio del diagramma
 $h-s$ (differenze di entalpia in espansioni isentro-
piche) e non con l'integrale $\int v dp$ della relazione

Si determina dapprima mediante la (3.6.5) il
valore della pressione critica p^* assumendo come
esponente della trasformazione $n = 1.3$:

$$p^* = p_1 \left(\frac{2}{n+1} \right)^{\frac{n-1}{n}} = 30 \cdot 0.546 = 16.38 \text{ ata}.$$

Poiché $p_2 < p^*$ il condotto deve essere costi-
tuito da un convergente-divergente al fine di rea-
lizzare la massima velocità possibile consentita
dalle condizioni operative fissate.

Con l'ausilio del diagramma $h-s$ si ricava:

$$\begin{aligned} v^* &= 0.162 \text{ m}^3/\text{kg}; \\ h_1 &= 772 \text{ kcal/kg}; \\ h_g &= 730 \text{ kcal/kg}. \end{aligned}$$

La velocità critica del suono nella sezione di
gola risulta:

$$u^* = c^* = \sqrt{2(h_1 - h_g)} = \sqrt{2 \cdot 4186(772 - 730)} = 593 \text{ m/sec}$$

e quindi dall'equazione di continuità si può calcola-
re l'area della sezione medesima:

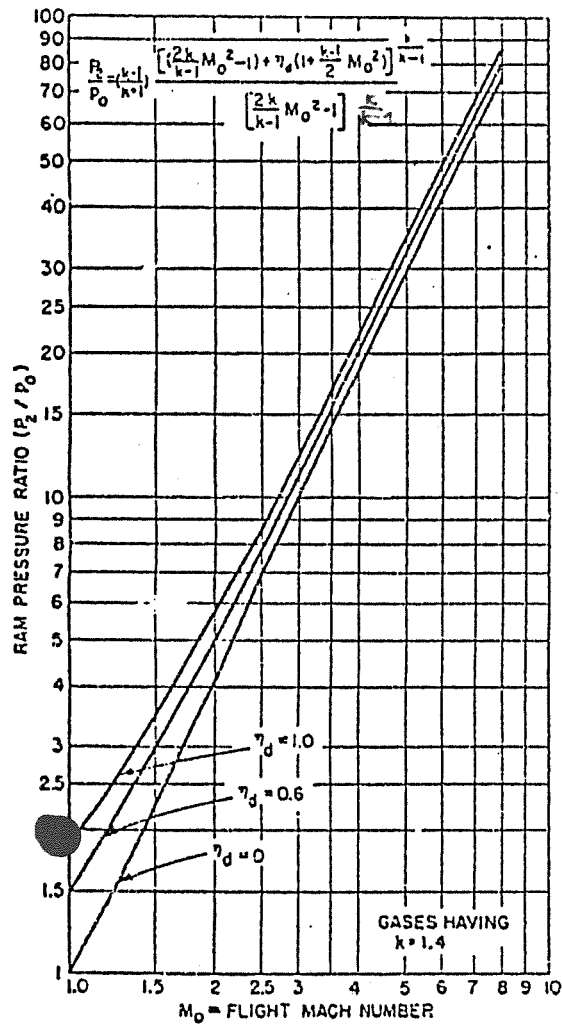
$$A_g = A^* = \frac{Wv^*}{c^*} = 7.2 \text{ cm}^2.$$

Dal diagramma $h-s$ si ha ancora:

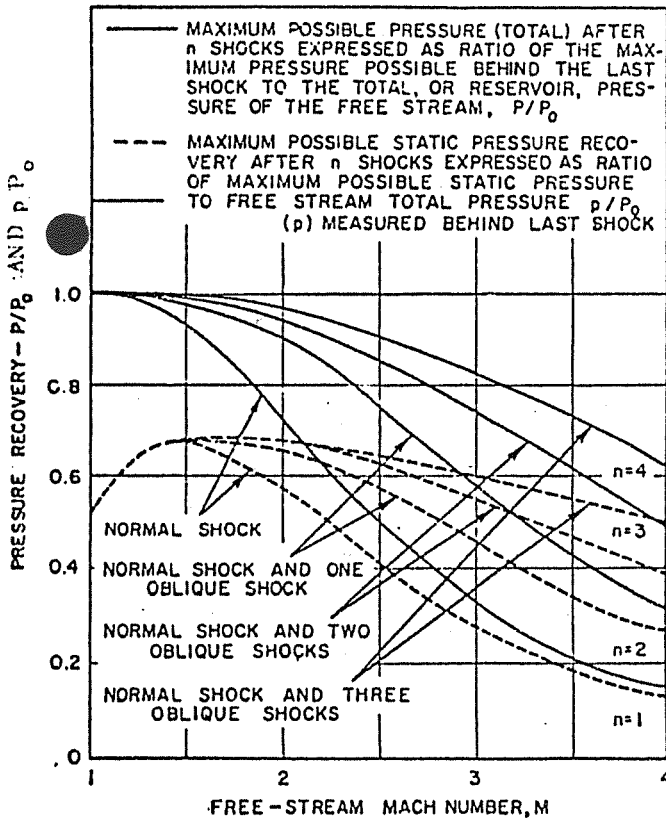
$$v_{2s} = 1.6 \text{ m}^3/\text{kg}; \quad h_{2s} = 600 \text{ kcal/kg}$$

e quindi:

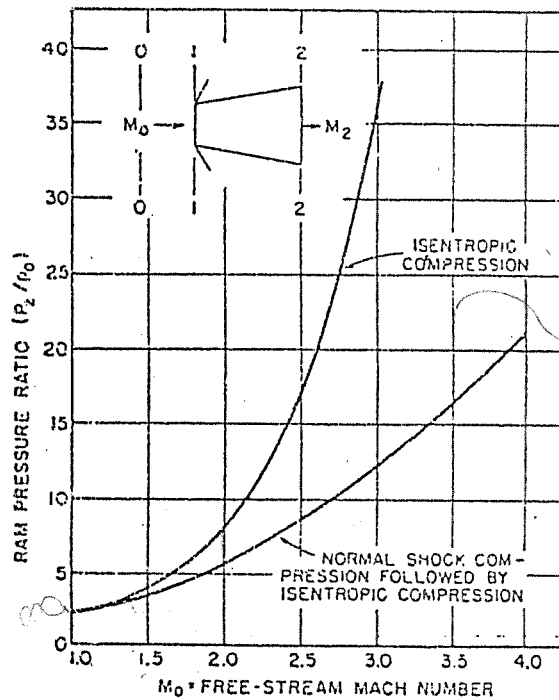
$$u_{2s} = \sqrt{2(h_1 - h_{2s})} = 1200 \text{ m/sec}.$$



Rapporto di compressione dinamica p_2/p_0 in funzione del numero di Mach di volo M_0 per vari valori del rendimento isentropico del diffusore



- Rapporto P/P_0 e p/p_0 in funzione del numero di Mach della corrente asintotica per diffusori supersonici ad onda d'urto conica con varie onde d'urto

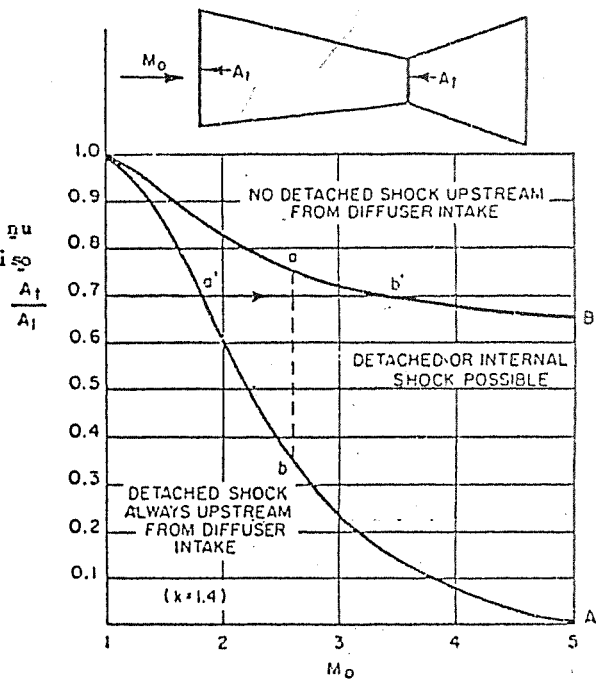


Confronto fra il rapporto di compressione dinamica di un diffusore ad onda d'urto normale e di un diffusore isentropico

$P = \text{totale}$
 $p = \text{statica}$

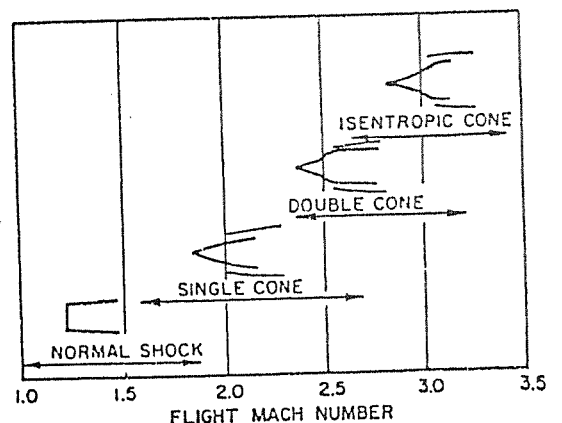
il livello che la perdita anche sopra il foil all'9 on m.

posizione dell'angolo d'urto.



Rapporto areolare A_2/A_1 per il quale si formano vari tipi d'onde d'urto in funzione del numero di Mach della corrente libera in un diffusore supersonico convergente-divergente

per onde d'urto
 per onde d'urto
 per onde d'urto
 per onde d'urto
 per onde d'urto
 per onde d'urto
 per onde d'urto
 per onde d'urto
 per onde d'urto
 per onde d'urto



	subsonico	supersonico	subsonico	supersonico
p	cala	cresce	cresce	cala
T, h	cresce $M \sim 1/\sqrt{k}$	cresce	cala $M \sim 1/\sqrt{k}$	cala
	cala $M \sim 1/\sqrt{k}$		cresce $M \sim 1/\sqrt{k}$	
p_0	cala	cala	cresce	cresce
T_0, h_0	cresce	cresce	cala	cala
ρ	cala	cresce	cresce	cala
u	cresce	cala	cala	cresce
S	cresce	cresce	cala	cala
M	cresce	cala	cala	cresce

In una camera di combustione cilindrica a sezione circolare di diametro $d = 9$ cm una portata $W = 3600$ kg/h di aria viene portata (in un processo che si assume equivalente ad un riscaldamento esterno reversibile) dalle condizioni (di ingresso) di temperatura $t_1 = 140$ °C e pressione $p_1 = 6$ ata, fino alla temperatura (di uscita) $t_2 = 850$ °C.

Considerando gas a comportamento ideale con $k = 1,4$ (costante) e massa molecolare $M_m = 28,97$ kg/kgmole, calcolare la pressione p_2 e la velocità u_2 del gas all'uscita della camera di combustione.

La velocità del gas nella sezione di ingresso si ricava immediatamente dalla relazione:

$$u_1 = \frac{W \cdot v_1}{A} = \frac{W \cdot R \cdot T_1}{M_m \cdot p_1 \cdot \pi \cdot d^2 / 4}$$

$$= \frac{3600 \cdot 8317 \cdot (273 + 140)}{28,97 \cdot 6 \cdot 98100 \cdot 3,14 \cdot 0,09^2 / 4} = \frac{1}{3600}$$

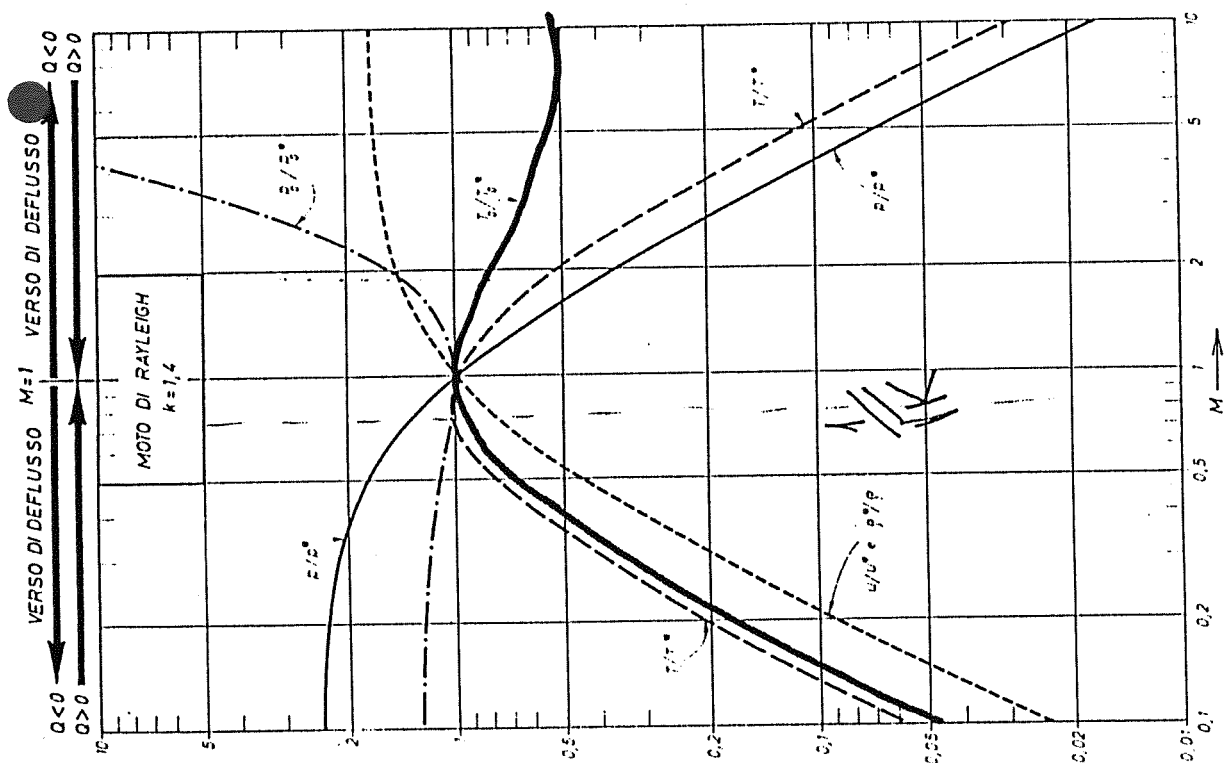
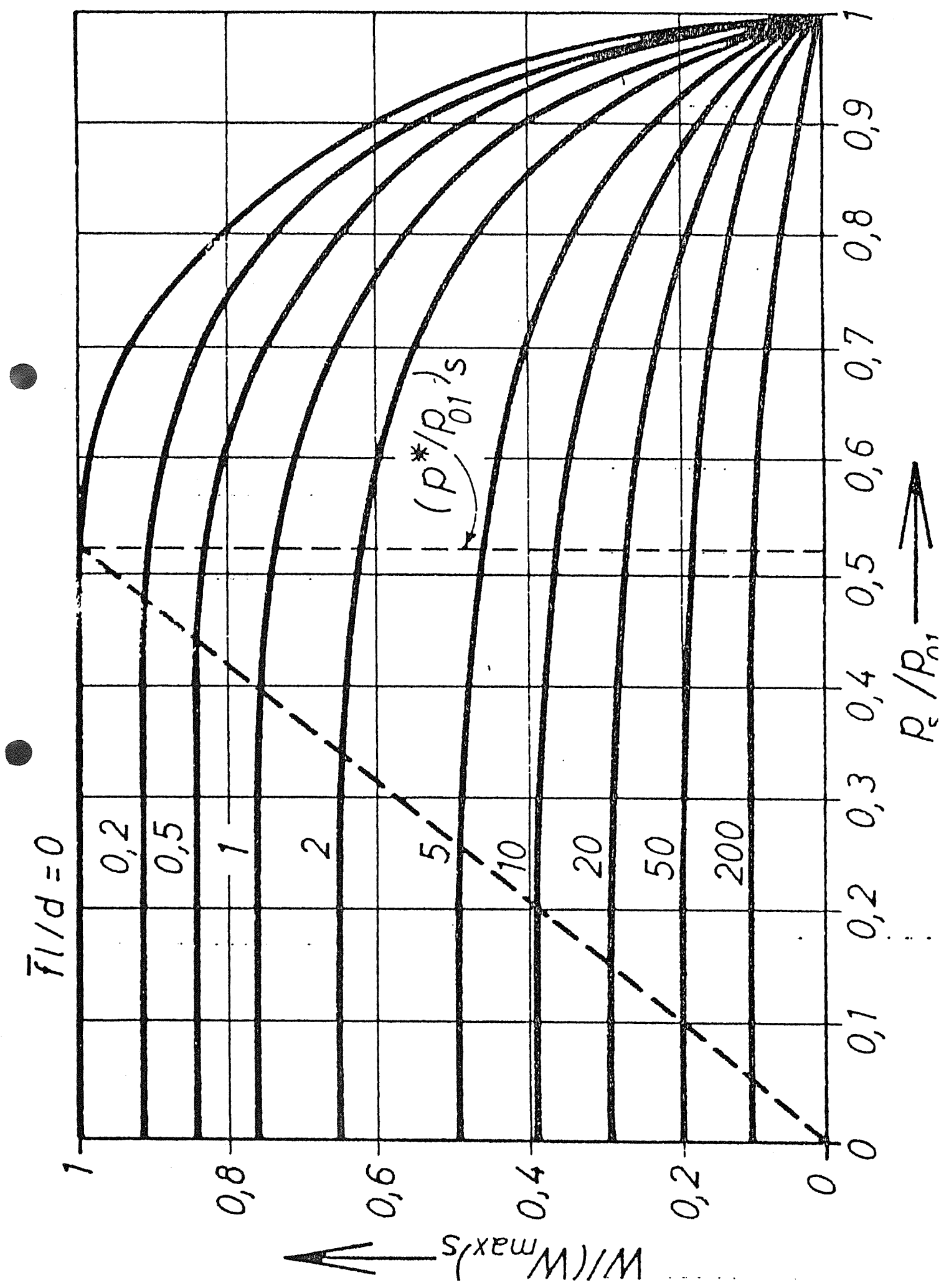


Fig. 5.2.1. - Funzioni del moto di Rayleigh per un gas ideale con $k = 1,4$.



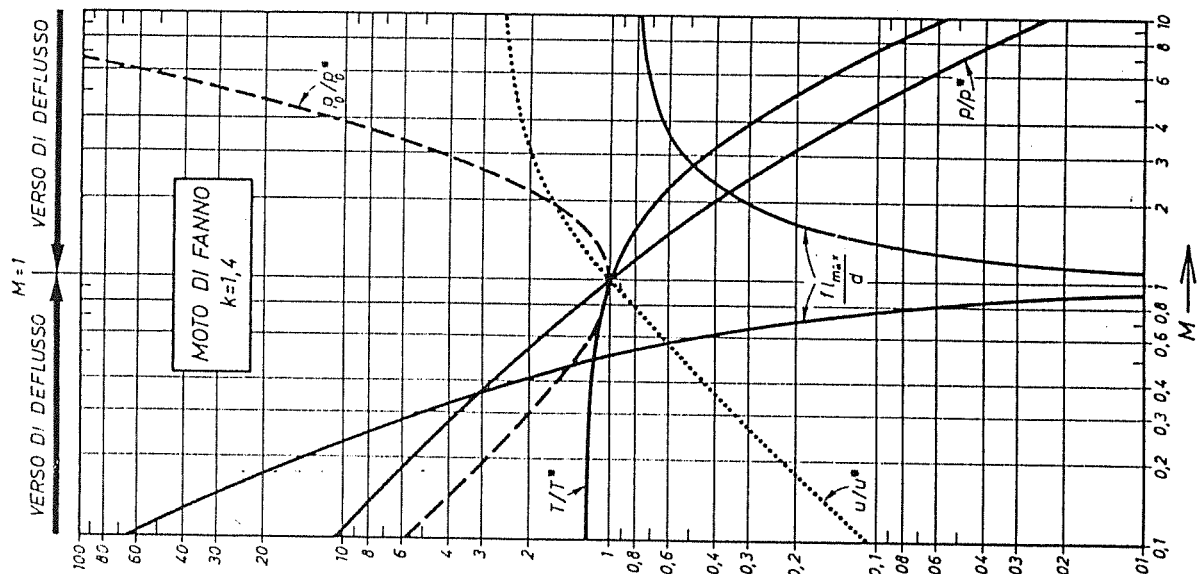


Fig. 4.5.1. - Funzioni del moto di Fanno per un gas ideale con $k = 1,4$.

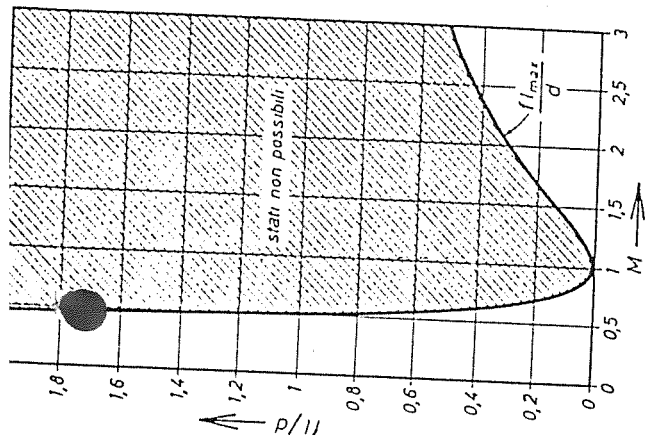


Fig. 4.4.1. Parametro limite d'attrito $f/l_{\max}/d$ in funzione del numero di Mach M per moto di Fanno di un gas ideale con $k = 1,4$. La zona tratteggiata rappresenta situazioni di moto non possibili (almeno in assenza di onde d'urto normali).

PROBLEMA 4.5.1

L'ugello convergente-divergente del problema 3.5.1 progettato per $M = 2,39$ allo sbocco viene collegato a un tubo a sezione costante, eguale a quella terminale del divergente. Determinare:

- la lunghezza del condotto necessaria a ridurre il numero di Mach a $M = 1,3$ (si ipotizzi isentropico il moto nell'ugello e adiabatico nel condotto);
- la pressione di uscita dal condotto a sezione costante nell'ipotesi che esso sia lungo 30 cm

(e la causa prima d'attrito, el fluido sulla palette della turbina) l'integrale $\oint dQ$ non ha significato, non potremmo definire, istante per istante, un volume ciclico e una pressione del fluido.

Limita qui soltanto a notare (e il discorso verrà ripreso in seguito) che, ove la trasformazione non sia quasi statica, il lavoro scambiato con l'esterno è certamente minore del lavoro che si otterrebbe in una trasformazione quasi statica con le stesse condizioni all'ingresso e la stessa pressione all'uscita, ove non vi fossero in ambo i casi scambi di calore con l'esterno.

Nel seguito, ove non vi sia pericolo di confusione, il lavoro con deflusso sarà indicato col simbolo L anziché L' .

1.10 IL PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA. ENERGIA INTERNA

Si è detto che il calore e il lavoro sono grandezze di scambio e non grandezze di stato. Per un processo ciclico (riferito sia alle variabili termodinamiche che alle variabili meccaniche, quest'ultime definendo l'energia cinetica e potenziale del sistema) gli integrali circolari

$$\oint dQ \quad \text{e} \quad \oint dL$$

non sono eguali a zero e il loro valore dipende dal cammino percorso.

Il primo principio della termodinamica stabilisce:

$$(1.33) \quad \oint dQ = \oint dL$$

ossia: "In un processo ciclico la quantità di calore netto scambiata fra il sistema e l'esterno (presa con il suo segno) è uguale alla quantità di lavoro netto scambiato (presa con il suo segno)".

Si può formulare il principio in altro modo dicendo che, se

$$(1.34) \quad \oint d(Q - L) = 0$$

l'espressione $d(Q - L)$ costituisce un differenziale esatto di una certa funzione U_t che è per tanto una funzione dello stato termodinamico e meccanico.

Si scrive:

$$(1.35) \quad d(Q - L) = dU_t$$

ossia:

$$(1.36) \quad dQ = dU_t + dL$$

(Occorre osservare che alcuni autori, usano indicare la quantità infinitesima di calore o di lavoro scambiato con simbolo δQ e δL , oppure δQ e δL a sottolineare il fatto che non si tratta di differenziali esatti).

L'energia U_t si considera somma di tre termini: energia interna (U), energia cinetica ed energia potenziale. Se si fa riferimento all'unità di massa:

$$(1.37) \quad du = d\left(u + \frac{w^2}{2} + gz\right)$$

L'equazione del primo principio si esprime in conclusione:

$$dQ = du + dL + d\left(\frac{w^2}{2} + gz\right)$$

oppure, per una trasformazione fin.

$$(1.38) \quad Q_{12} = u_2 - u_1 + L_{12} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) .$$

L'energia interna, così operativamente definita, (ottenuta da misure di scambi di calore e di lavoro) sarà intesa indipendente da fenomeni elettrici, magnetici, di tensione superficiale. Il suo valore che potrà sempre essere dato in funzione delle variabili P, V, T , risulta fissato, per le relazioni scritte, almeno di una costante additiva arbitraria.

Questa costante è determinata precisando convenzionalmente per quale stato del sistema, ossia per quale coppia di valori di due delle tre variabili indicate, deve intendersi $u = 0$.

Si vuol sottolineare ancora che in tutto quello che si è detto in questo paragrafo per gli scambi di lavoro, non si è mai posta la condizione della quasi staticità del processo. Il lavoro L_{12} rappresenta pertanto il totale lavoro scambiato dal sistema con l'esterno che può non coincidere con il lavoro delle forze interne e non è rappresentabile da un integrale $\int_1^2 p dv$ se vi sono attriti interni o squilibrio fra le forze interne e le forze esterne.

* se il sistema è in equilibrio.

1.11 ENTALPIA

Si consideri l'espressione del primo principio in cui si ritenga per il momento nulla la variazione di energia cinetica e di energia potenziale:

$$(1.39) \quad dQ = du + dL .$$

Nel caso dei sistemi con deflusso, come si è detto, il termine di lavoro dL è dato dal-

la somma del lavoro utile esterno dL' e del lavoro di immissione e di espulsione alla temperatura T_0 .

$$(1.40) \quad dL = dL' + d(pv) \text{ che corrisponde alla pressione di } T_0$$

Sostituendo in (1.39)

$$(1.41) \quad dQ = du + dL' + d(pv) ,$$

ossia:

$$(1.42) \quad dQ = d(u + pv) + dL' .$$

Per p_{atm} $dL' = dL'_{con deflusso}$

E' molto opportuno introdurre a questo punto una nuova grandezza di stato definita dalla relazione:

$$(1.43) \quad h = u + pv .$$

Questa grandezza si chiama entalpia.

Il primo principio si scrive pertanto per i sistemi con deflusso nel modo seguente:

$$(1.44) \quad dQ = dh + dL' .$$

e, in termini finiti:

$$(1.45) \quad Q_{12} = h_2 - h_1 + L'_{12}$$

Questa nuova forma del primo principio non aggiunge niente a quanto dice la (1.39) che rimane sempre valida sia nei sistemi senza deflusso che nei sistemi con deflusso. Rappresenta solo una forma più comoda nella termodinamica applicata ove i sistemi con deflusso prevalgono e ove conviene mettere in evidenza il lavoro utile L' scambiato dal sistema con l'esterno, a prescindere dal lavoro di immissione e di emissione.

Se per esempio il sistema subisce una

trasformazione adiabatica ($Q_{12} = 0$), lavoro scambiato con l'esterno è immediatamente dato dalla variazione di entalpia fra lo stato iniziale e lo stato finale:

$$L_{12} = h_1 - h_2$$

(E questo si ripete, a prescindere dalla quasi staticità del processo).

Si dice che in una turbina di espansione tutto il lavoro ottenuto è dato dalla "caduta di entalpia".

In un compressore (adiabatico) tutto il lavoro somministrato va ad aumentare l'entalpia del sistema.

Viceversa se in un processo non si ha scambio di lavoro con l'esterno, il calore scambiato coincide con la variazione di entalpia:

$$Q_{12} = h_2 - h_1$$

In particolare se il processo è quasi statico per il quale è

$$L_{12} = - \int_1^2 v dp$$

il porre $dL_{12} = 0$ per ogni variazione infinitesima, significa considerare il processo isobaro.

Lungo una isobara quindi il calore scambiato coincide con la variazione di entalpia.

Nella tecnica le trasformazioni termodinamiche di gran lunga più interessanti sono approntate le adiabatiche e le isobare. Di qui l'importanza delle osservazioni sopra esposte.

Si deve sottolineare infine che la entalpia, come è stata definita, è determinata a meno di una costante additiva. Questa costante è arbitraria e viene fissata precisando per qua-

le stato del fluido si assume l'entalpia eguale a zero.

Generalmente per i gas si fissa $h = 0$ alla temperatura di zero gradi centigradi e alla pressione di una atmosfera; per i fluidi che possono essere liquidi a zero gradi centigradi, si fissa $h = 0$ per il liquido alla pressione di saturazione a questa temperatura.

1.12 CALORI SPECIFICI

Due grandezze molto importanti che caratterizzano il sistema termodinamico sono il calore specifico a volume costante c_v e il calore specifico a pressione costante c_p .

Il primo si definisce con il rapporto fra la variazione di energia interna che subisce l'unità di massa del sistema e la sua variazione di temperatura (infinitesima) fra due stati di equilibrio allo stesso volume:

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$$

Il calore specifico c_v è definito pertanto in funzione dei parametri interni del sistema e non in funzione del calore scambiato. Per chiarire la cosa si consideri l'energia interna come funzione di due variabili:

$$u = f(T, v)$$

da cui

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv$$

$$dh = du$$

e usando la suddetta definizione di c_v :

$$du = c_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv.$$

In particolare per un processo a volume costante

$$du = c_v dT,$$

Ora se il processo a volume costante è anche quasistatico si ha $dL = pdv = 0$ e quindi per il primo principio:

$$dQ = du.$$

Solo in questo caso si può scrivere: //

$$dQ = c_v dT,$$

e in definitiva:

$$c_v = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_v.$$

Se il processo isocoro non è quasistatico, sarà sempre:

$$u_2 - u_1 = \int_1^2 c_v dT.$$

La differenza $u_2 - u_1$ dipende solo dalle temperature degli stati iniziali e finali di equilibrio, ma essendo $dL \neq pdv$, non è lecito in questo caso porre:

$$Q_{12} = \int_1^2 c_v dT.$$

Analogamente si definisce il calore specifico a pressione costante come il rapporto fra la variazione di entalpia che subisce l'unità di massa del sistema e la sua variazione di temperatura (infinitesima) fra due stati di equilibrio alla stessa pressione.

Come precedentemente si potrà sempre scrivere per un processo isobaro (a rigore si deve dire "un processo fra due stati di equilibrio alla stessa pressione a distanza infinitesima", in quanto che in un processo che non sia, quasistatico la pressione non è definibile):

$$dh = c_p dT,$$

mentre la relazione

$$dQ = c_p dT,$$

è riservata ad un processo isobaro quasistatico.

Oltre ai calori specifici lungo processi isocori e isobari si possono definire calori specifici lungo altre trasformazioni. Questi calori specifici vanno sempre definiti in funzione di variazioni di parametri interni del sistema.

Per il momento basti dire che il calore specifico lungo una trasformazione quasistatica è definito come il rapporto fra la quantità di calore scambiato durante un processo e la variazione di temperatura che, il sistema contemporaneamente subisce. Per un processo fra due stati molto vicini si scrive alla temperatura

$$c = \frac{dQ}{dT}.$$

no al -95 °C.

Per l'idrogeno a pressione di una atmosfera l'errore è inferiore a 1% per basse temperature fino a -190 °C.

In questo capitolo del gas ideale si tratterà pertanto abbastanza ampiamente dei processi di gas ricavandone formule di lavoro, rigorosamente valide per il gas ideale, ma di pratico impiego nella maggior parte di casi tecnici per i gas più comuni.

2.2 EQUAZIONE CARATTERISTICA

Nel paragrafo 1.4 la temperatura del gas ideale era stata definita dalla espressione:

$$(2.3) \quad T = 273,16 \lim_{P_T \rightarrow 0} \frac{P}{P_T} \quad (V = \text{cost})$$

ossia:

$$(2.4) \quad T = 273,16 \lim_{P_T \rightarrow 0} \frac{PV}{(PV)_T},$$

ove P_T sta ad indicare la pressione al punto triplo dell'acqua.

Si può scrivere pertanto:

$$(2.5) \quad \lim (pV) = \left[\frac{\lim (pV)_T}{273,16} \right] \cdot T.$$

Ed è appunto l'espressione entro parentesi quadrata che consente di misurare, operando sui gas reali, la costante universale $\bar{R}$ sopra indicata.

Con riferimento ad una kgmole è pertanto per il gas ideale:

$$(2.6) \quad pV = \bar{R} T \quad (\text{par. 1.12})$$

Il valore della costante $\bar{R}$ è il seguente:

$$\bar{R} = 0,08206 \frac{\text{m}^3 \times \text{atmosfera}}{\text{kgmole} \cdot ^\circ\text{K}};$$

$$\bar{R} = 8314 \frac{\text{Joule}}{\text{kgmole} \cdot ^\circ\text{K}};$$

$$\bar{R} = 847 \frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{kgmole} \cdot ^\circ\text{K}};$$

$$\bar{R} = 1,986 \frac{\text{kcal}}{\text{kgmole} \cdot ^\circ\text{K}}.$$

Con riferimento all'unità di massa si scrive:

$$(2.7) \quad pV = \frac{\bar{R}}{M} T, \quad \text{le relazioni}$$

ossia:

$$(2.8) \quad pV = R T$$

Per un gas supposto a comportamento ideale la costante caratteristica R vale

$$R = \frac{0,08206}{M} \frac{\text{m}^3 \times \text{atmosfera}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{K}};$$

$$R = \frac{8314}{M} \frac{\text{Joule}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{K}};$$

$$(2.9) \quad R = \frac{847}{M} \frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{K}};$$

$$\text{energia interna} = \frac{1,986}{273,15} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \frac{\text{kcal}}{\text{K}} ;$$

oppure anche, se si denota con v_n il volume specifico normale (alle condizioni di una atmosfera fisica e di 0 gradi Celsius):

$$R = \frac{1}{273,15} v_N = 0,00366 \frac{\text{m}^3 \times \text{atmosfera}}{\text{kg} \text{ K}} ;$$

$$(2.10) \quad R = \frac{101325}{273,15} v_N = 370,9 \frac{\text{Joule}}{\text{kg} \text{ K}} ;$$

$$R = \frac{10333}{273,15} v_N = 37,83 \frac{\text{kgf} \cdot \text{m}}{\text{kg} \text{ K}} ;$$

$$R = \frac{24,02}{273,15} v_N = 0,0886 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \text{ K}} .$$

2.3 ENERGIA INTERNA DEL GAS IDEALE

L'energia interna di un fluido, come ogni altra funzione di stato di una sostanza pura, si può definire come funzione di due grandezze di stato. Sia ad esempio, con riferimento all'unità di massa:

$$(2.11) \quad u = f(T, v) .$$

Differenziando:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv .$$

Ricordando la definizione: $du = c_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv$

$$(2.13) \quad du = c_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv .$$

Per il gas ideale la seconda derivata parziale è nulla; quindi

$$(2.14) \quad du = c_v dT .$$

Dato che u è funzione solo della temperatura, anche c_v dovrà essere costante o funzione al più della sola temperatura. Per un processo finito:

$$(2.15) \quad u_2 - u_1 = \int_1^2 c_v dT .$$

Occorre sottolineare che le relazioni (2.14) e (2.15) sono valide qualunque sia il processo che porta dallo stato 1 ad un qualsiasi stato alla temperatura T_2 , come i processi rappresentati dalle linee AB, AC, AD, AE nella figura 2.1. (Le isoterme sono linee a e

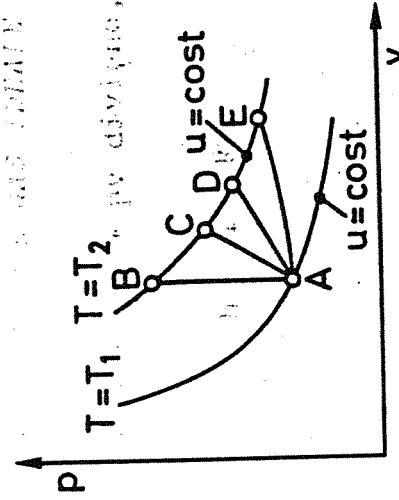


Fig. 2.1

energia interna costante per il gas ideale). Si deve evitare l'errore di pensare quelle relazioni valide solo per processi a volume costante. (Si vede come le grandezze c_v e c_p siano correttamente definite al paragrafo 1.12 e come chiamarle calori specifici possa trarre in inganno).

La variazione di energia interna coincide con la quantità di calore scambiato soltanto lungo una trasformazione durante la quale il sistema non scambia lavoro con l'esterno (e non subisce variazioni di energia cinetica e potenziale).

2.4 ENTALPIA DEL GAS IDEALE

Anche l'entalpia del gas è funzione della sola temperatura. (uguale dello del.)
Per definizione la relazione

$$(2.16) \quad h = u + pv$$

diviene:

$$(2.17) \quad h = u + RT,$$

ove ambo i termini a secondo membro sono funzioni della sola temperatura.
Procedendo come al paragrafo precedente si può esprimere, genericamente per una sostanza pura, l'entalpia come funzione della temperatura e della pressione:

$$(2.18) \quad h = f(T, p),$$

$$(2.19) \quad dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp.$$

che deve essere sempre
a d'u se si considera un
gas puro NON NOBISC.

Ricordando la definizione di c_p tenendo conto che per il gas ideale è $\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = 0$, si ottiene:

$$(2.20) \quad dh = c_p dT.$$

Anche c_p è funzione solo della temperatura.
Per un processo finito:

$$(2.21) \quad h_2 - h_1 = \int_1^2 c_p dT.$$

NON
Anche
NOBISC.

Anche qui si sottolinea che le relazioni (2.20) e (2.21) sono valide per qualunque processo fra le temperature T_1 e T_2 . E la variazione di entalpia coincide con la quantità di calore scambiato soltanto in un processo durante il quale il sistema non scambia lavoro con l'esterno (e non subisce variazioni di energia cinetica e potenziale).

2.5 CALORI SPECIFICI DEL GAS IDEALE

La relazione $h = u + pv$ diviene, per il gas ideale:

$$h = u + RT$$

e quindi

$$(2.22) \quad dh = du + R dT.$$

Tenendo conto dei risultati dei paragrafi

Precedenti:

$$(2.23) \quad c_p dT = c_v dT + R dT$$

da cui:

$$(2.24) \quad c_p - c_v = R. \quad \text{Rel. di Mayer}$$

Ne consegue:

$$m c_p - m c_v = \bar{R}$$

e indicando con C_p e C_v i calori specifici molari:

$$C_p - C_v = 8314 \frac{\text{Joule}}{\text{kgmole} \cdot \text{K}}$$

oppure:

$$C_p - C_v = 1,986 \text{ kcal/kgmole} \cdot ^\circ\text{K}.$$

Il rapporto c_p/c_v si indica con k :

$$(2.25) \quad k = \frac{c_p}{c_v}$$

Combinando le due ultime relazioni si ottiene:

$$(2.26) \quad c_v = \frac{1}{k-1} R, \quad c_p = \frac{k}{k-1} R;$$

formule queste che è utile ricordare.

La teoria cinetica dei gas stabilisce che l'energia interna del gas è proporzionale al numero di gradi di libertà traslazionale, rotazionale e di vibrazione della molecola. Indicando con ℓ questo numero di gradi di libertà si ha la relazione:

$$(2.27) \quad u = \ell \cdot \frac{R}{2} \cdot T$$

da cui:

$$(2.28) \quad c_v = \frac{du}{dT} = \ell \cdot \frac{R}{2}$$

e, tenendo conto della (2.24):

$$(2.29) \quad c_p = (\ell + 2) \frac{R}{2}$$

Il rapporto k vale pertanto

$$(2.30) \quad k = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\ell+2}{\ell}$$

Per il gas ideale monoatomico, che ha tre gradi di libertà traslazionali, si ottiene:

$$c_v = \frac{3}{2} R,$$

$$c_p = \frac{5}{2} R,$$

$$k = \frac{5}{3} = 1,66.$$

Per il gas ideale biatomico, che ha tre gradi di libertà traslazionali e due gradi di libertà rotazionali, si ottiene:

I calori portamento
 $c_v = \frac{5}{2} R$,
 $c_p = \frac{7}{2} R$,

$k = \frac{7}{5} = 1,40$.

I risultati sono applicabili ad alcuni gas molto importanti nella tecnica, quali H_2 , O_2 , N_2 , CO , NO .
 Per il gas ideale triatomico avendosi un grado di libertà rotazionale in più, si ottiene:

$c_v = 3 R$,

$c_p = 4 R$,

$k = \frac{4}{3} = 1,33$.

Per il gas ideale poliatomico dovendosi tener conto di vibrazioni a diverse frequenze, i valori c_v e c_p sono ancora maggiori e corrispondentemente più bassi il rapporto k .

Nella tabella n. 2.1 sono riportati per alcuni gas particolarmente importanti nelle tecniche, i valori della massa molecolare, della densità ρ (alla temperatura di 0 °C e alla pressione di una atmosfera fisica), della costante R , dei calori specifici e della costante k , riferiti a questi ultimi a temperature non molto diverse dalla temperatura ambiente. (Per il calore specifico c_p oltre al valore in J/kg °K è riportato anche il valore in kcal/kg°K).

TABELLA N. 2.1

Gas	ρ kg/m ³	R J/kg°K	c_p J/kg °K	c_p kcal/kg °K	c_v J/kg°K
Aria	1,293	287,02	1004,6	0,24	717,6
Ossigeno	1,429	259,81	912,5	0,218	651,8
Azoto	1,251	296,71	1042,2	0,249	744,5
Idrogeno	0,09	4124,0	14253	3,405	1018,1
Ossido di carbonio	1,25	296,92	1046,5	0,25	747
Anidride carbonica	1,964	188,95	879,1	0,21	627,9
Vapore d'acqua	0,804	461,37	1925,6	0,46	1373,4
Ammoniaca	0,760	488,19	2218,6	0,53	1584,7
Metano	0,715	518,65	2469,7	0,59	1764,1

(2.28) I calori specifici c_v e c_p dei gas a comportamento ideale non sono costanti, ma aumentano al crescere della temperatura a causa dell'aumento dei moti vibrazionali della molecola. E' necessario tenerne conto ad esempio nei processi di combustione ove si raggiungono temperature elevate. Si veda per il calore specifico a pressione costante ($c_p = \lim_{p \rightarrow 0} c_p$) di alcuni gas il diagramma di fig. 2.2.

Di conseguenza anche il rapporto $k = c_p/c_v$ non è costante, ma diminuisce al crescere della temperatura (fig. 2.3).

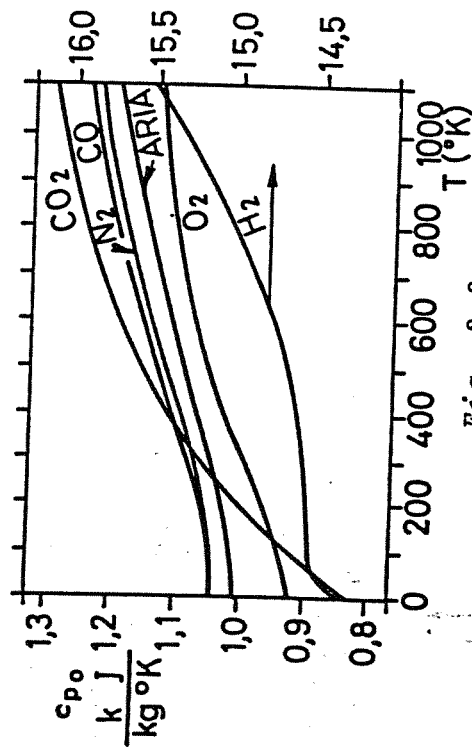


Fig. 2.2

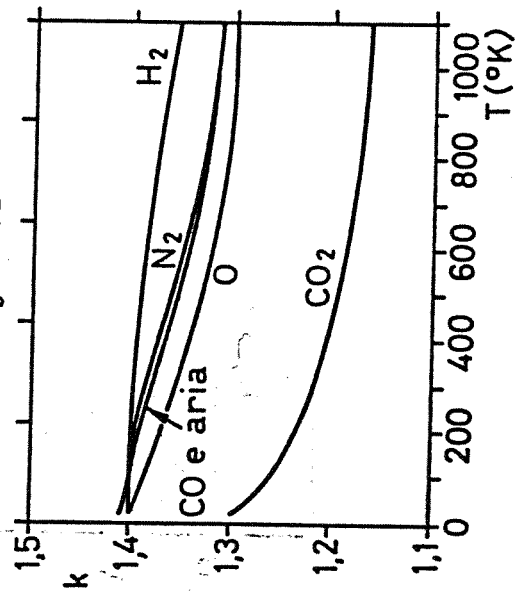


Fig. 2.3

2.6 ALCUNI PROCESSI DEL GAS IDEALE

a) Processo isocoro.

A volume costante le pressioni sono direttamente proporzionali alle temperature assolute:

$$(2.31) \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

In un processo isocoro quasistatico il lavoro scambiato dal sistema senza deflusso è nullo ($dL = pdv = 0$) e la equazione del primo principio si riduce a:

$$(2.32) \quad dQ = du$$

Il calore scambiato eguaglia la variazione di energia interna del sistema. Se si tratta di un processo finito quasistatico con deflusso, il lavoro è espresso da:

$$(2.33) \quad L_{12} = -v(p_2 - p_1)$$

b) Processo isobaro.

A pressione costante i volumi sono direttamente proporzionali alle temperature assolute:

$$(2.34) \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

In un processo isobaro finito, quasi statico il lavoro scambiato dal sistema, senza deflusso è espresso da:

il rapporto ottimale intermedia e la media geometrica fra le pressioni estreme.

2.9 RENDIMENTO VOLUMETRICO DEL COMPRESSORE ALTERNATIVO

Un compressore alternativo lavora secondo un ciclo rappresentato teoricamente nel diagramma di fig. 2.9 (nel quale in ascisse è segnato il volume).

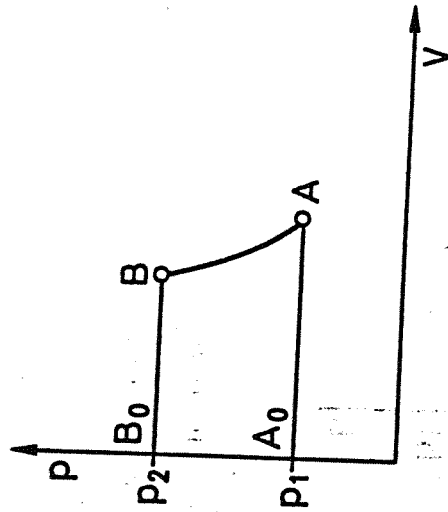


Fig. 2.9

gnato questa volta il volume interno del compressore e non il volume specifico del fluido). Il tratto A₀A rappresenta la variazione di volume interno del cilindro durante la fase di aspirazione a pressione p₁ costante; il tratto AB la compressione adiabatica, (a valvole chiuse); il tratto BB₀ la fase di espulsione a pressione p₂ costante.

Nella pratica avviene che a fine corsa di espulsione il volume occupato dal gas non si riduce a zero; questo per motivi costruttivi. Vi è un certo "volume nocivo" (fig. 2.10).

La corsa di mandata termina perciò nel punto C ed il gas residuo si espande (CD) quando lo stantuffo inverte la sua corsa. Raggiunta

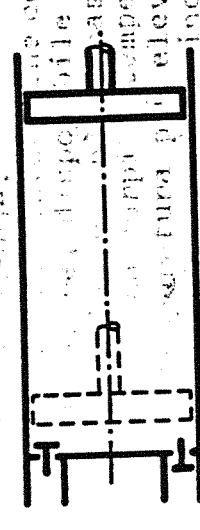
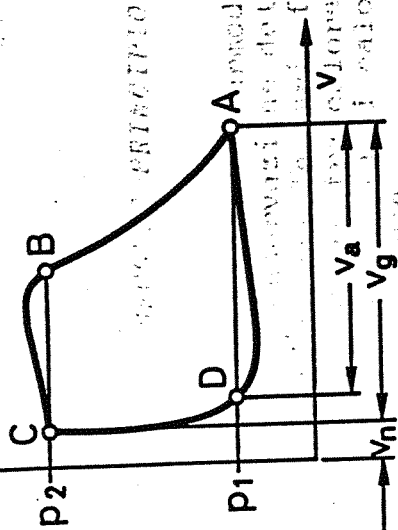


Fig. 2.10

la pressione di aspirazione in D, si apre la valvola ed inizia la fase DA di introduzione.

Si nota poi che a causa della caduta di pressione attraverso le valvole durante l'aspirazione la pressione nel cilindro è inferiore a p₁ e durante la espulsione è superiore a p₂.

Si indicano con:
V_n il volume nocivo,
V_g il volume generato durante una corsa, la opera-
zione di compressione ciclica, il cui uni-
fatto è il volume aspirato. L'incremento di calore da
corpo

Si definisce rendimento volumetrico

$$\eta_v = \frac{V_a}{V_g}$$

una macchina che

il rapporto fra il volume aspirato ed il volume generato calore. Se si tratta di gas ideale si può scrivere: $V_a = V_n + V_g - V_D = V_n + V_g - \rho l/k V_n$, avendo indicato con $\rho = p_2/p_1$ il rapporto delle pressioni. Il rendimento volumetrico è quindi dato da:

$$(2.61) \quad \eta_v = \frac{V_n + V_g (1 - \rho^{1/k})}{V_g} = 1 - \frac{V_n}{V_g} (\rho^{1/k} - 1).$$

Il rendimento volumetrico diminuisce all'aumentare del rapporto delle pressioni come si deduce chiaramente anche dal diagramma di fig. 2.11.

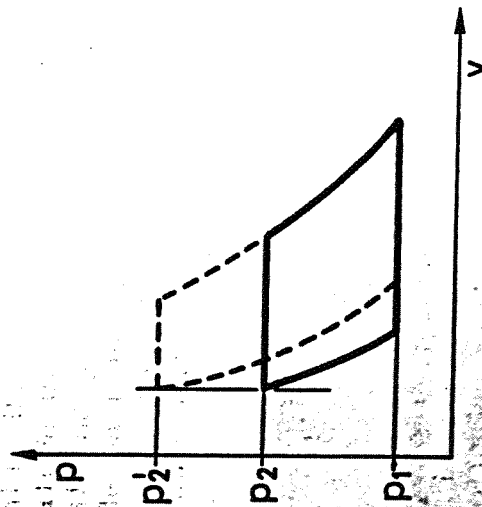


Fig. 2.11

IL SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

3.1 ENUNCIATI DEL SECONDO PRINCIPIO

Il primo principio della termodinamica è il principio della conservazione della energia e fissa l'equivalenza fra le varie forme dell'energia, in particolare fra calore e lavoro, e non distingue fra quantità di calore disponibili a temperature diverse.

Esso non vieta la conversione completa di una quantità di calore, disponibile ad una certa temperatura, in lavoro, né il passaggio spontaneo di calore da corpi a temperatura più bassa a corpi a temperatura più elevata.

Il secondo principio è il principio della degradazione dell'energia e fissa la non equivalenza delle varie forme di energia ai fini di ottenere lavoro. Il secondo principio stabilisce "certe impossibilità".

Si può dire che il primo principio stabilisce la equivalenza metrologica fra calore e lavoro, mentre il secondo principio stabilisce la non equivalenza operativa. Essi diretti e inversi.

Gli enunciati del II° principio sono vari. Ci si limita a riportarne due fondamentali:

1) Enunciato di Clausius. Anche questo processo è continuamente degradato.

"E' impossibile costruire una macchina operante secondo un processo ciclico, il cui unico effetto sia il trasferimento di calore da un corpo a temperatura più bassa ad un corpo a temperatura più elevata".

2) Enunciato di Kelvin-Planck

"E' impossibile costruire una macchina operante secondo un processo ciclico, il cui unico

Si conclude: "tutte le volte che un sistema scambia calore con l'ambiente esterno e non vi sono internamente al sistema, durante il processo di scambio, cause di irreversibilità (differenze di temperatura da punto a punto ed effetti dissipativi), la variazione di entropia del sistema è data dal rapporto

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

fra il calore scambiato e la temperatura del sistema stesso, indipendentemente dalla differenza di temperatura fra l'ambiente e il sistema. Se questa differenza di temperatura è finita, l'aumento di entropia per irreversibilità è attribuito all'insieme sistema + ambiente, non al sistema in sé.

3.9 DIAGRAMMA ENTROPICO E ALTRI DIAGRAMMI TERMODINAMICI

Accanto al diagramma meccanico (p-v) in coordinate cartesiane ortogonali per la rappresentazione degli stati di una sostanza pura, è molto impiegato il diagramma entropico avente in ascissa la entropia (riferita alla unità di massa) e in ordinata la temperatura assoluta. Questo diagramma presenta interessanti proprietà che lo rendono particolarmente utile nello studio dei processi e dei cicli.

Sia AB (fig. 3.4) un processo del sistema. (Inutile dire che si tratta di un processo internamente reversibile; se così non fosse il sistema non sarebbe, negli istanti successivi del processo, in equilibrio termodinamico e non potrebbe essere caratterizzato dai valori di due parametri: verrebbe meno la possibilità di rappresentazione nel diagramma). Si ha:

cartesiana alla curva in

il calore specifico del

Becano in un punto,

il processo a calo-

le linee verti-

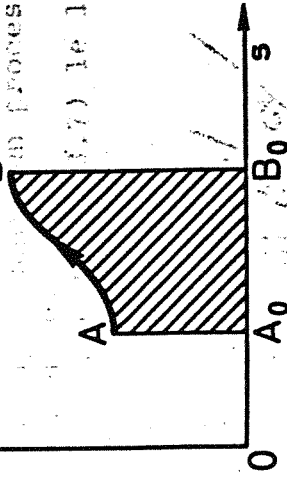


Fig. 3.4

$$(3.53) \quad \text{area } A_0 A B B_0 = \int_A^B T ds = Q_{AB}$$

Un'area nel diagramma T-s rappresenta la quantità di calore scambiata in modo internamente reversibile col sistema. (Si faccia attenzione che, se si vuole che l'area rappresenti effettivamente la quantità di calore, occorre che l'origine dell'asse delle ordinate sia, allo zero assoluto).

Se si tratta di un processo ciclico, l'area racchiusa rappresenta l'effettiva quantità di calore scambiata dal sistema, differenza fra il calore ricevuto dal sistema e il calore ceduto, e tale differenza è uguale al lavoro scambiato con l'esterno. Se il ciclo è percorso in senso orario, (ciclo diretto), l'area è positiva; il ciclo fornisce lavoro. Se il ciclo è percorso in senso antiorario (ciclo inverso), l'area è negativa; il ciclo è compiuto con la spesa di lavoro dall'esterno.

In particolare un ciclo di Carnot (due isoterme e due isentropiche) nel diagramma T-s è rappresentato da un rettangolo (fig. 3.5). Il diagramma T-s offre modo di misurare graficamente il calore specifico di un processo (fig. 3.6).

un valore economico.
Si ha P alla
to impiegato nel
attività di lavoro.

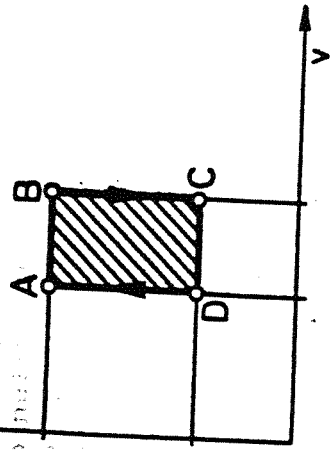


Fig. 3.5

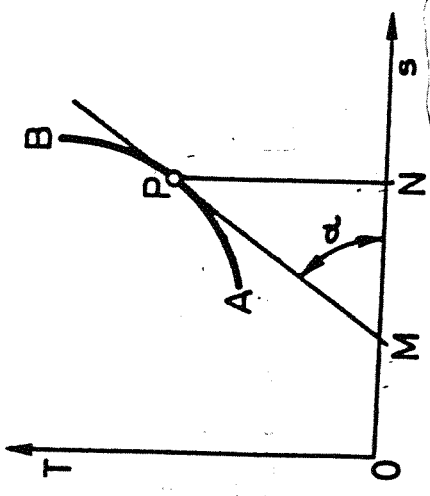


Fig. 3.6

Sia AB la linea che rappresenta il processo, P un suo punto e PM la retta tangente alla curva in quel punto. Il segmento MN rappresenta la sottotangente cartesiana alla curva nel punto P. Si ha:

$$(3.54) \quad MN = \frac{T}{dT} = T \frac{ds}{dT} = \frac{dQ}{dT} = c$$

La sottotangente cartesiana alla curva in un punto rappresenta il calore specifico del processo in quel punto. L'aggiungimento dell'entro-
Se due linee si intersecano in un punto, la più ripida rappresenta un processo a calore specifico minore.
In particolare (fig. 3.7) le linee verti-

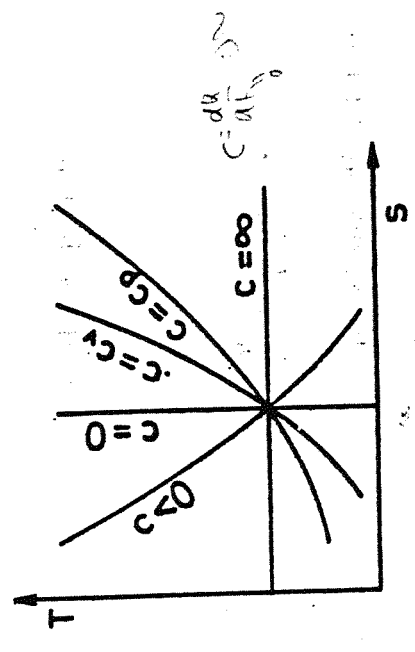


Fig. 3.7

cali rappresentano le adiabatich reversibili ($c = 0$), le linee orizzontali rappresentano le isoterme ($c = \infty$). Le linee isocore sono più ripide delle isobare ($c_v < c_p$).

Le linee a pendenza negativa rappresentano processi lungo il quale il calore specifico è negativo (diminuzione di entropia, e quindi cessione da calore da parte del sistema con contemporaneo aumento di temperatura).

Oltre al diagramma meccanico (p-v) ed entropico (T-s) fin qui considerati, altri diagrammi sono usati nella termodinamica tecnica.

In particolare interessa avere in uno dei due assi la funzione entalpia che, con le sue variazioni, rappresenta il calore scambiato (processi senza scambio di lavoro con energia cinetica e potenziale costanti) o il lavoro scambiato (processi adiabatici ancora con energia cinetica ed energia potenziale costanti) ed acquista quindi il significato netto di

un valore economico.

Si ha il diagramma $h-s$ (di Mollier) molto impiegato nello studio dei cicli delle macchine a vapore.

Questo diagramma (fig. 3.8) presenta una

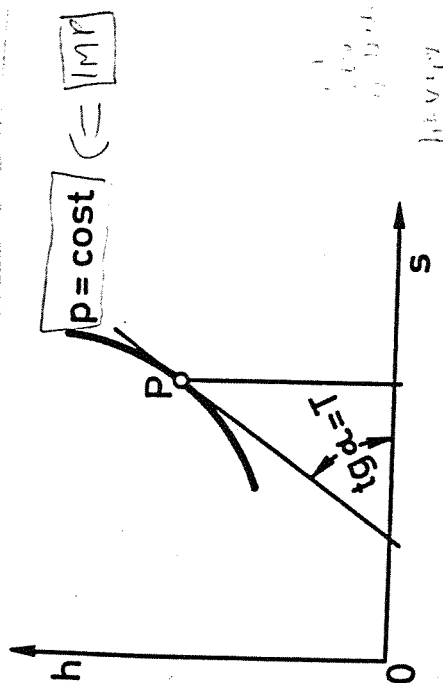


Fig. 3.8

caratteristica che merita di essere segnalata: la pendenza di una linea isobara in un punto è rappresentata dal valore della temperatura assoluta in quel punto:

$$(3.55) \quad \left(\frac{dh}{ds} \right)_p = T \frac{ds}{ds} = T$$

$dh = T ds$

(Naturalmente nel diagramma è $tg \alpha = T$ solo se le scale delle ordinate e delle ascisse sono le medesime).

Da ricordare infine il diagramma $p-h$ di frequente impiego nello studio dei cicli frigo riferi.

Su questi si avrà modo di ritornare in seguito.

3.10 ENTALPIA DEL GAS IDEALE sul diagramma

Si vogliono ricavare le trasformazioni di un gas

Si vuol ricavare l'espressione dell'entropia del gas ideale in funzione di due delle tre grandezze p, v, T .

Il primo principio della termodinamica per un gas ideale e per trasformazioni reversibili assume la forma:

$$(3.56) \quad T ds = c_v dT + p dv$$

cioè:

$$(3.57) \quad ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dv,$$

ed anche (in base alla equazione di stato

$$p = \frac{RT}{v}):$$

$$(3.58) \quad ds = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dv}{v}.$$

$$\text{Integrando e scrivendo: } R = c_p - c_v, \frac{c_p}{c_v} = k,$$

si trova:

$$(3.59) \quad s = c_v \ln T v^{k-1} + \text{cost.}$$

Si ottiene così la espressione dell'entropia a meno di una costante di integrazione da determinare attraverso la condizione limite. Per convenzione si pone:

$$s = 0 \text{ per } T = T_0 = 273,15^\circ \text{K},$$

$$p = p_0 = 1 \text{ atm},$$

Le isobare
(3.62) sono

$$v = v_0,$$

cioè in condizioni "normali".

Si ha quindi:

$$(3.60) \quad \text{cost} = -c_v \ln T_0 v_0^{k-1}$$

e l'espressione dell'entropia di un gas ideale diventa:

$$(3.61) \quad s = c_v \ln \frac{T}{T_0} \left(\frac{v}{v_0} \right)^{k-1}.$$

Nell'esprimere l'entropia in funzione di (p, v) o di (T, p) ci si avvale dell'equazione di stato $p v = RT$ a partire dalla (3.56) o dalla (3.61).

Si ottengono così le altre due relazioni cercate:

$$(3.62) \quad s = c_v \ln \frac{p}{p_0} \left(\frac{v}{v_0} \right)^k,$$

$$(3.63) \quad s = c_p \ln \frac{T}{T_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1-k}{k}}.$$

Si noti che nel ricavare la (3.61) si è supposto che i calori specifici restino costanti al variare della temperatura.

Cio non è esatto di solito, poichè i calori specifici (e quindi il loro rapporto $k = c_p/c_v$) variano con la temperatura anche in un gas a comportamento ideale, come si è già accennato. Occorre perciò fare riferimento a valori medi di c_p , c_v e k tra le temperature iniziale e finale della trasformazione.

Le relazioni (3.61), (3.62), (3.63) con-

sentono la rappresentazione sul diagramma (T, s) delle principali trasformazioni di un gas ideale.

Per il tracciamento delle linee isobare si può sfruttare la (3.63) scritta nella forma:

$$s = c_p \ln \frac{T}{T_0} + c_p \ln \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1-k}{k}}.$$

Si osservi che il secondo termine a secondo membro è costante lungo un'isobara.

Per $p = p_0$ (isobara normale) si ha:

$$s = c_p \ln \frac{T}{T_0}.$$

Le isobare a pressione più alta stanno alla sinistra e quelle a pressione più bassa a destra dell'isobara normale (fig. 3.9).

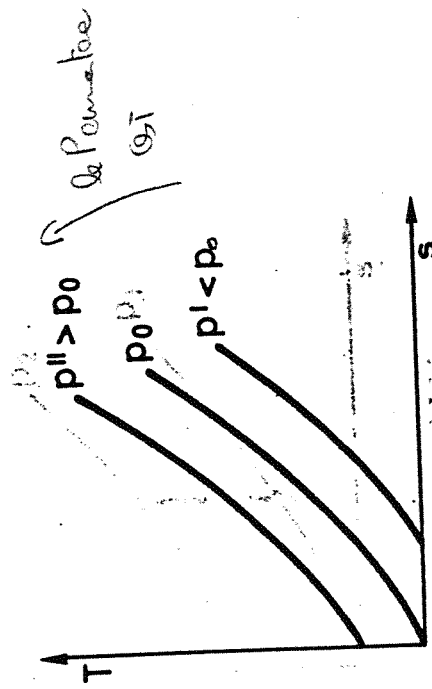


Fig. 3.9. Gas puro il cui comportamento è quello di gas ideale (d.h. c_p, c_v, k costanti).

Poichè il calore specifico a pressione costante aumenta al crescere della temperatura, le isobare divergono lievemente rispetto all'andamento esponenziale.

per le isocore si ottengono utilizzando la
(3.62) scritta nella forma:

$$s = c_v \ln \frac{T}{T_0} + c_v \ln \left(\frac{v}{v_0} \right)^{k-1}.$$

Lungo l'isocora il secondo membro è costante.
Per $v = v_0$ (isocora normale) si ha:

$$s = c_v \ln \frac{T}{T_0};$$

e quindi l'andamento delle isocore è logaritmico come quello delle isobare ma a pendenza maggiore negli stessi punti poiché $c_v < c_p$ e la sottotangente nel diagramma è più piccola.

Le isocore per volumi specifici maggiori di v_0 si trovano più a destra sul diagramma (fig. 3.10) mentre quelle per volumi specifici minori sono a sinistra.

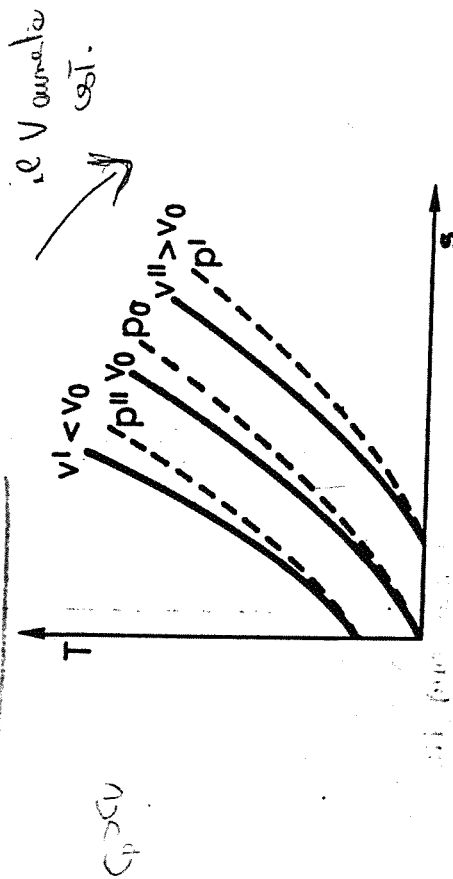


Fig. 3.10

Poiché anche il calore specifico a volume costante cresce con la temperatura le isocore divergono rispetto l'andamento esponenziale.
Un esempio di impiego del diagramma (T,s)

ne illustra l'utilità. Non è irreversibile, con un
Si abbia 1 kg di gas ideale da comprimere
isentroicamente a partire dalle condizioni
 p_1, T_1 fino ad una pressione p_2 . E' richiesta la temperatura raggiunta dal gas alla fine del processo.

La soluzione analitica del problema costringerebbe ad adoperare in successive approssimazioni la relazione:

$$T_1 p_1^{\frac{1-k}{k}} = T_2 p_2^{\frac{1-k}{k}},$$

poiché il valore medio di k è funzione della temperatura finale T_2 .

Il diagramma (T,s) consente invece (fig. 3.11), una volta segnato il punto 1, di trovare immediatamente il punto 2 come intersezione dell'isentroica per 1 e della isobara p_2 .

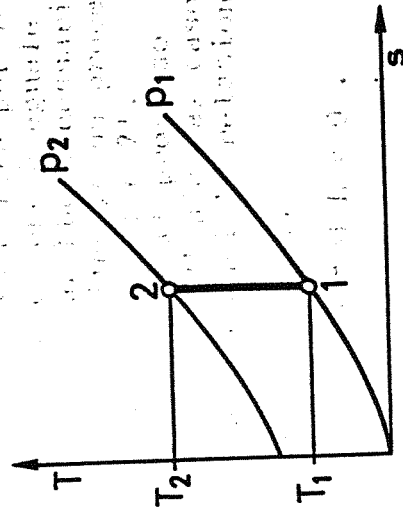


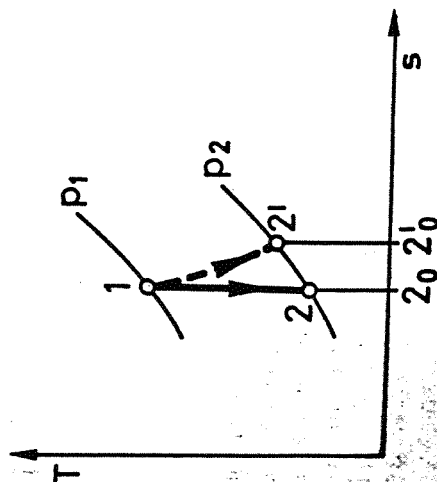
Fig. 3.11

E' molto impiegato per i gas pure il diagramma $h-s$. Se si tratta di gas ideale ($dh = c_p dT$) è chiaro che questo diagramma non differisce dal diagramma entropico $T-s$. Sulla stessa ordinata si possono segnare le due scale della temperatura e dell'entalpia (salvo te

ner conto che c_p cresce con la temperatura).

3.11 DIAGRAMMI TERMODINAMICI E PROCESSI IRREVERSIBILI

Giova a questo punto qualche osservazione circa la rappresentazione, mediante i diagrammi, dei processi internamente irreversibili. Il caso più frequente è quello del deflusso, attraverso un compressore o attraverso un espansore, di un fluido con fenomeni dissipativi interni dovuti all'attrito. Si tratti di una espansione fra una pressione p_1 iniziale e una pressione p_2 finale (fig. 3.12). Sia 1 il punto rappresentativo dello stato iniziale.



Si può ammettere nella maggior parte dei casi tecnici che il processo avvenga senza scambio di calore con l'esterno: si tratta quindi di un processo adiabatico il quale, ove fosse internamente reversibile e quindi isentropico, sarebbe rappresentato da un segmento verticale 1-2.

I fenomeni dissipativi inevitabili rendo-

no il processo adiabatico irreversibile con un aumento di entropia

$\mathbb{P} = \mathbb{P}^{\text{irr}}$.

Il punto finale del processo si sposta verso destra nel diagramma, o sempre sulla isobara p? : sia esso il punto 2'.

Il segmento $2_0 2_1$ rappresenta un reale aumento di entropia per irreversibilità. Qualora fosse nota la distribuzione della ΔS irr lungo il processo, sarebbe possibile tracciare per elementi tutta la curva rappresentatrice della successione di stati descritta dal sistema; ma ciò in genere non si può fare. Con approssimazione si può ammettere come rappresentatrice della trasformazione la retta congiungente il punto 1 e il punto 2_1 ; questo segmento va indicato tratteggiato. L'area $2_0 1 2_1$ rappresenta con approssimazione il "calore di irreversibilità" ossia la quantità di lavoro meccanico degradato in calore per le sorgenti interne di entropia e che è eguale alla quantità di calore che sarebbe necessario somministrare dall'esterno durante un processo internamente reversibile fra 1 e 2_1 .

Beninteso essendo il processo adiabatico
 reversibile $1 \rightarrow 2$, vale in ambo i casi la relazione del 1° principio:
 $Q = 0$

$$\mathbf{d} \mathbf{h} \cdot \mathbf{d} \mathbf{L} = 0. \quad (3.64)$$

Si ha nel processo reale:

$$(3.65) \quad L_r = h_1 - h_2,$$

e nel processo ideale:

$$L_{id} = h_1 - h_2. \quad (3.66)$$

Si immagini di proiettare il piano p-v-T nel piano p-v. Si ottiene quanto.

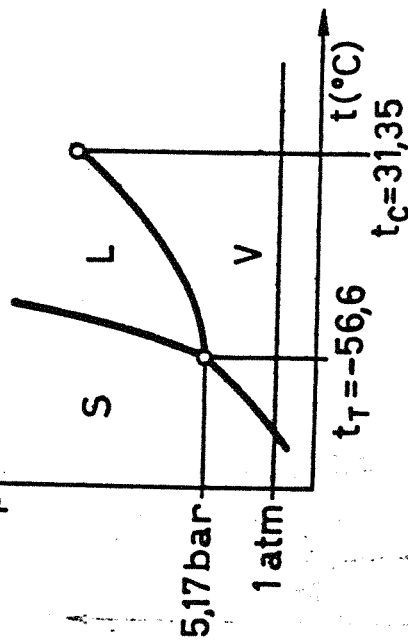


Fig. 5.5

5.3 REGOLA DELLE FASI O DI GIBBS

A chiarire meglio il comportamento di un fluido, come risulta dai diagrammi, serve la regola delle fasi o di Gibbs che si esprime nella relazione:

$$V = C - F + 2$$

ove:

V = numero dei gradi di libertà o numero delle variazioni delle proprietà intensive di fase;

C = numero dei componenti;

F = numero delle fasi.

Nel caso di un solo componente che qui si esamina, si ha:

a) con una sola fase:

$$V = 1 - 1 + 2 = 2$$

Un sistema a un componente a una sola fase presenta due gradi di libertà. Due grandezze intensive possono indipendentemente variare restando il sistema nella stessa fase. (E' quanto avviene nelle zone indicate S o L o V nel diagramma.

b) Con due fasi:

$$V = 1 - 2 + 2 = 1$$

Qui solo una grandezza intensiva può variare indipendentemente; la sola pressione o la temperatura. (E' quanto avviene lungo le linee di equilibrio del diagramma).

c) Con tre fasi:

$$V = 1 - 3 + 2 = 0$$

Il sistema non ha gradi di libertà: non può variare alcuna proprietà intensiva di una fase. E anche se una sostanza presenta più fasi solide, è chiaro che più di tre fasi contemporaneamente non possono coesistere.

La regola delle fasi si potrà applicare ancor più vantaggiosamente quando i componenti sono più di uno.

5.4 IL DIAGRAMMA p-v DEI VAPORI SATURI

Il diagramma p-T precedentemente considerato non è utile nell'esame dei processi dei fluidi reali perchè non consente di segnare le variazioni delle proprietà della sostanza (quali entalpia, entropia, ecc.) durante i cambiamenti di stato (che avvengono appunto a pressione costante).

Si immagini di proiettare la superficie p-v-T nel piano p-v. Si ottiene il diagramma di fig. 5.6 sul quale conviene soffermarsi alquanto.

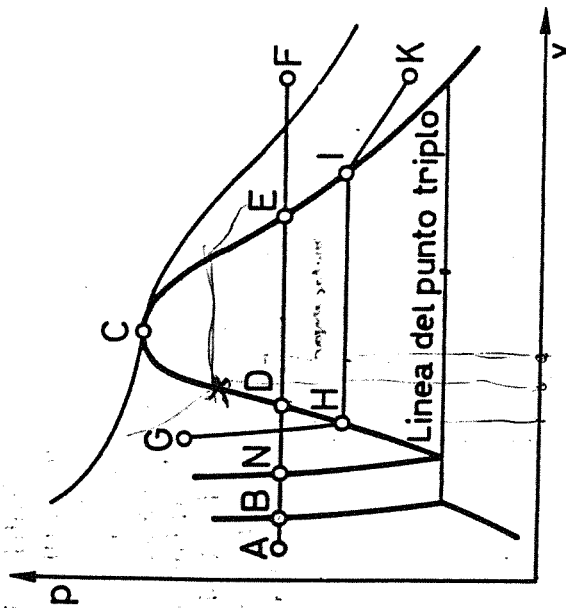


Fig. 5.6

La linea A B N D E F è una isobara; la linea G H I K una linea isoterma. Tutti i punti compresi sotto la curva H D C E I rappresentano condizioni di equilibrio liquido-vapore. E' questa la zona del vapore saturo. La curva si chiama curva limite o di Andrews; il tratto a sinistra di C, curva limite inferiore, il tratto a destra, curva limite superiore. La pressione del vapore saturo è funzione solo della temperatura (e non del volume):

$$p = f(t)$$

Si parla di pressione di equilibrio, pressione di saturazione, pressione di vaporizzazione. In generale la (5.1) può essere rappresentata approssimativamente da una legge del tipo:

(5.2)

$$\log p = A - \frac{B}{t + x}$$

con A e B costanti caratteristiche di ciascun fluido.

Nel diagramma di fig. 5.7 sono indicati gli andamenti della pressione di saturazione in funzione della temperatura per alcuni fluidi.

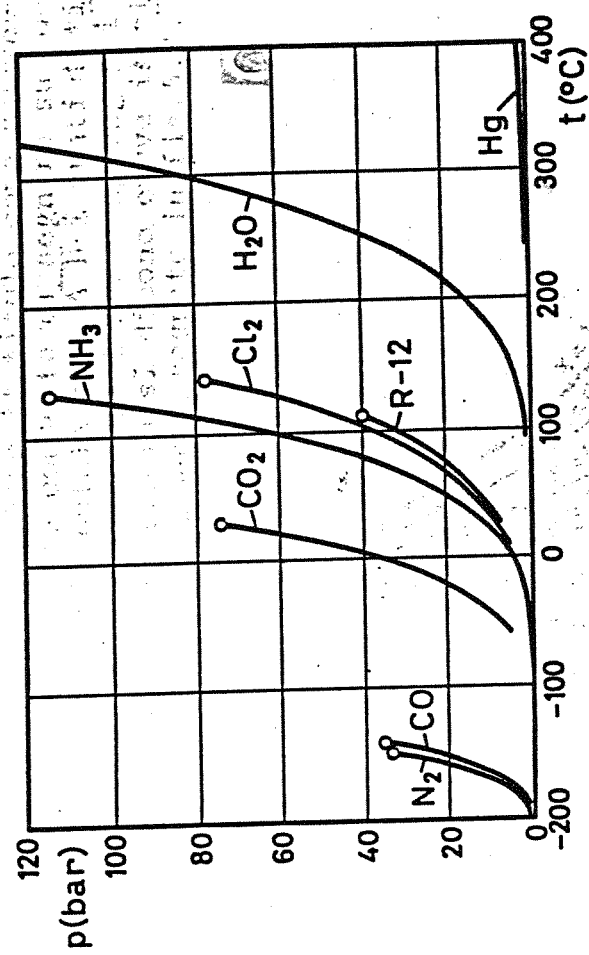


Fig. 5.7

Per l'acqua è opportuno ricordare la formula empirica (valida approssimativamente fra 90°C e 250°C):

$$p = \left(\frac{t}{100}\right)^4$$

ove t è espresso in gradi centigradi e p in atmosfere. Si dice titolo del vapore il rapporto fra la massa del vapore e la massa totale della miscela (liquido + vapore).

(5.4)

$$x = \frac{m_v}{m_l + m_v}$$

Il titolo può variare fra il valore 0 (tutto liquido: curva limite inferiore) e il valore 1 (tutto vapore: curva limite superiore).

Se, come al solito, ci si riferisce alla massa totale di un chilogrammo, il titolo è dato dal peso in chilogrammi di vapore contenuto in un chilogrammo di miscela.

Nel diagramma p-v (fig. 5.8) il titolo di un punto generico P si può leggere dal rapporto dei segmenti A P e A B:

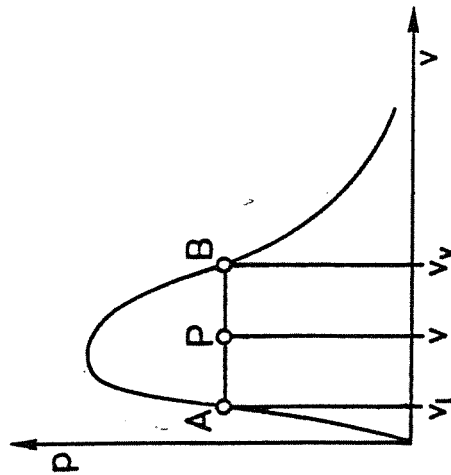


Fig. 5.8

facile-
diment.

(5.5)

$$x = \frac{A P}{A B}$$

Difatti in P la miscela è composta da $(1 - x)$ kg di liquido e da x kg di vapore. Sia v_l il volume specifico del liquido (il volume che occuperebbe il chilogrammo se fosse tutto liquido) in quelle condizioni di temperatura e pressione, e v_v il volume specifico del vapore (il volume che occuperebbe il chilogrammo se fosse tutto vapore) nelle stesse condizioni. Il volume v di un kg di miscela in P è quindi

(5.6)

$$v = (1 - x) v_l + x v_v$$

da cui:

(5.7)

$$x = \frac{v - v_l}{v_v - v_l} = \frac{A P}{A B}$$

Si è così espresso il titolo come rapporto di segmenti. Ciò consente di segnare su ogni segmento orizzontale come A B i punti di titolo 0,1, 0,2, 0,3 ecc. Le linee congiungenti i punti di egual titolo si dicono curve isotole ed hanno l'andamento segnato in fig. 5.9.

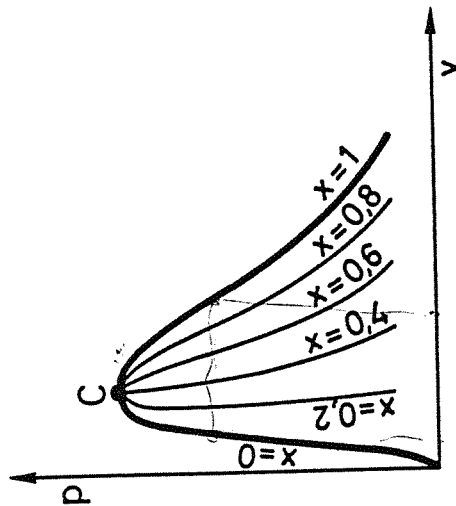


Fig. 5.9

Calore di vaporizzazione (condensazione).

Si definisce calore di vaporizzazione (condensazione) e si indica con la lettera r , il calore scambiato per vaporizzare (condensare) un chilogrammo di liquido (vapore), in condizioni iniziali e finali di saturazione. Il processo, si è detto, è isobaro e isoterma. Per ogni sostanza vi è un caratteristico calore di vaporizzazione, variabile con la tem-

peratura. L'andamento di r in funzione di T è qualitativamente indicato in fig. 5.10 ove si vede che r può presentare un massimo e si annulla alla temperatura critica.

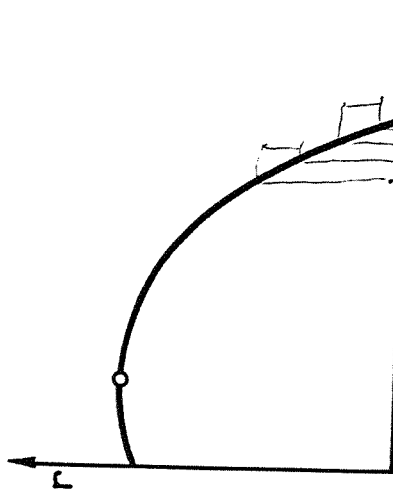


Fig. 5.10

Nella Tabella n. 5.1 si riporta, per l'acqua, il valore del calore di vaporizzazione per varie temperature e corrispondenti pressioni di saturazione.

Equazione di Clausius Clapeyron per il cambiamento di fase liquido-vapore.

Si può esprimere analiticamente, per una certa sostanza, la funzione $r = r(T)$.

Si consideri sul piano (p, v) un ciclo di Carnot infinitesimo, nella zona del vapore saturo, tra le temperature T e $T-dT$ (fig. 5.11). Per un ciclo di Carnot si ha:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

e quindi nel caso presente:

Tabella n. 5.1

Proprietà dell'acqua in condizioni di saturazione

Temperatura °C	pressione (bar)	calore di vaporiz. (kJ/kg)
0	0,0061	2500
20	0,0233	2454
40	0,0737	2407
60	0,199	2358
80	0,473	2308
100	1,013	2257
140	3,61	2145
180	10,03	2015
220	23,20	1857
260	46,94	1661
300	85,92	1404
340	146,1	1027
360	186,7	720
370	210,5	439
374,15	221,3	0

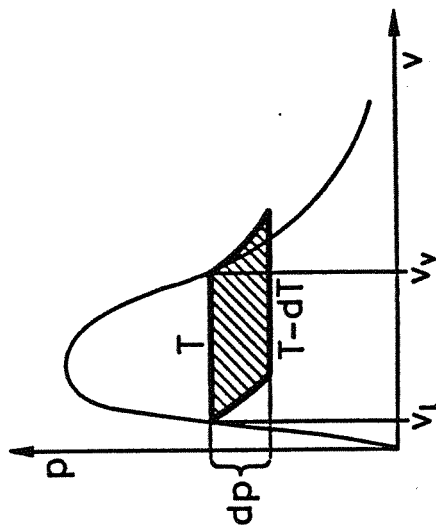


Fig. 5.11

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dT}{T}$$

dove dQ è il calore trasformato in lavoro durante il ciclo e Q è il calore fornito dalla sorgente calda a temperatura T .

Il lavoro si può esprimere, a meno di infinitesimi di ordine superiore, nella forma:

$$dL = dp (v_v - v_l) .$$

Il calore Q coincide con r alla temperatura T . Si ottiene perciò:

$$\frac{dp (v_v - v_l)}{r} = \frac{dT}{T}$$

ed alla fine, esplicitando rispetto ad r , la relazione di Clausius-Clapeyron:

$$(5.8) \quad r = \frac{dp}{dT} \cdot T \cdot (v_v - v_l) .$$

Quest'ultima relazione, confermata dall'esperienza, costituisce una verifica sperimentale indiretta dei principi della termodinamica.

Si vuole ora ricavare la relazione di Clausius-Clapeyron dalle relazioni di Maxwell ed in ipotesi più generali.

Il primo principio della termodinamica nella 1.^a forma, mediante le relazioni di Maxwell, si può esprimere attraverso la (4.46). Tale relazione per cambiamento di fase (a temperatura costante e pressione indipendente dal volume) diventa:

$$T ds = T \frac{dp}{dT} dv .$$

Se si indica con l il calore scambiato durante l'intera trasformazione, si ha:

$$(5.9) \quad T(s_{fin} - s_{in}) = l = T \frac{dp}{dT} (v_{fin} - v_{in}) .$$

Se il cambiamento di fase è una vaporizzazione ($l = r$, $v_{fin} = v_v$, $v_{in} = v_l$) si ritrova la (5.8).

Agli stessi risultati si perviene anche sfruttando la definizione di entalpia libera (potenziale di Gibbs).

Si ha:

$$g = h - Ts$$

da cui differenziando si ottiene:

$$dg = dh - T ds - s dT = v dp - s dT .$$

Durante un cambiamento di fase si ha

$$dp = dT = 0$$

e quindi l'entalpia libera è costante.

L'entalpia libera del liquido saturo è perciò uguale a quella del vapore saturo secco:

$$(5.10) \quad g_l = g_v$$

e per una trasformazione ad una temperatura infinitamente vicina:

$$g_l + d g_l = g_v + d g_v .$$

Si ha cioè per il cambiamento di fase:

$$d g_1 = d g_v .$$

Esplicitando si ottiene:

$$(v_v - v_1) dp = (s_{fin} - s_{in}) dT .$$

Moltiplicando entrambi i membri per T e ricordando che durante una vaporizzazione si ha

$$T(s_{fin} - s_{in}) = r ,$$

si ritrova la (5.8).

La relazione

$$r = T \frac{dp}{dT} (v_{fin} - v_{in})$$

è di tutta generalità e vale per ogni cambiamento di stato. Essa spiega quanto si è detto al par. 5.1.

Durante una vaporizzazione il calore di trasformazione è positivo ($l > 0$); la variazione di volume è sempre positiva ($v_{fin} > v_{in}$), dunque $\frac{dp}{dT} > 0$: a pressioni crescenti si hanno temperature crescenti di vaporizzazione.

Durante una fusione il calore di trasformazione è ancora positivo ($l > 0$); se la variazione di volume è positiva ($v_{fin} > v_{in}$) come per la maggior parte delle sostanze, risulta $\frac{dp}{dT} > 0$; un aumento di pressione comporta un aumento di temperatura di fusione. Se la variazione di volume è negativa ($v_{fin} < v_{in}$) come per l'acqua, risulta $\frac{dp}{dT} < 0$; un aumento di pressione comporta una diminuzione di temperatura di fusione. (Per l'acqua l'abbassamento della temperatura di fusione è di circa $0,01^\circ\text{C}$ per ogni atmosfera di pressione fino a circa 2000

atmosfera).

Vapore surriscaldato.

Si chiama vapore surriscaldato un vapore che si trova a temperatura più elevata del vapore saturo avente la stessa pressione. Si può anche dire surriscaldato un vapore che si trova a pressione più bassa di un vapore saturo a

vente la stessa temperatura.

Si veda in fig. 5.12 il punto D rappresen-

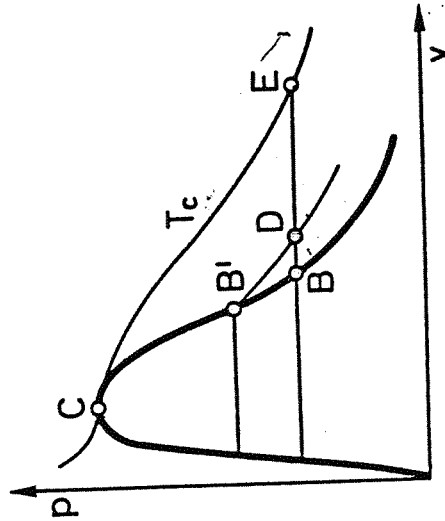


Fig. 5.12

tante vapore surriscaldato. Il tratto BD è il surriscaldamento isobaro; B'D è il surriscaldamento per espansione isoterma.

Proseguendo il surriscaldamento a pressione costante fino al punto E si raggiunge la temperatura critica.

La linea che rappresenta la isoterma critica T_c non costituisce nessuna separazione per il comportamento del fluido. Tuttavia è corretto parlare di vapore surriscaldato per temperature inferiori a T_c e parlare di gas per temperature superiori.

Liquido sottoraffreddato.

Si dice liquido sottoraffreddato un liquido che si trova a temperatura più bassa del liquido saturo alla stessa pressione. Si può anche definire sottoraffreddato quel liquido che si trova a pressione più elevata del liquido saturo avente la stessa temperatura.

Si veda in fig. 5.13 il punto A_0 . La tras-

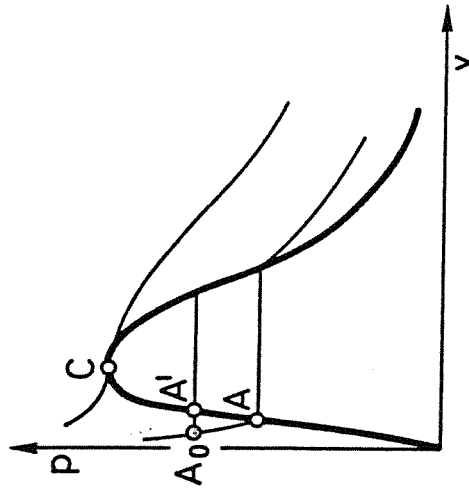


Fig. 5.13

formazione $A'A_0$ rappresenta un sottoraffreddamento isobaro; la AA_0 è una compressione isoterma (per questo nelle condizioni A_0 si parla anche di liquido pressurizzato).

L'acqua in un recipiente aperto all'atmosfera ed a temperatura ambiente è in condizioni di sottoraffreddamento.

5.5 IL DIAGRAMMA T-s DEI VAPORI SATURI

Il diagramma p-v non è molto usato nella tecnica. Fra gli altri svantaggi presenta il fatto che il volume specifico del liquido lun-

go la curva limite inferiore è (appena ci si allontani alquanto dal punto critico) di molto inferiore del volume specifico del vapore secco lungo la curva limite superiore. Per esempio per l'acqua a temperatura di 20°C si ha: $v_l = 0,001 \text{ m}^3/\text{kg}$ e $v_v = 57,84 \text{ m}^3/\text{kg}$. I diagrammi fin qui riportati risultano chiaramente deformati.

Si preferisce nella termodinamica applicata far uso di altri diagrammi, primo di tutti il diagramma entropico, avente la temperatura assoluta in ordinate e l'entropia in ascisse. (Anche per questo si potrebbe partire dalla considerazione della superficie in coordinate spaziali T-p-s).

È facile innanzitutto ricavare in questo diagramma l'andamento della curva limite (figura 5.14).

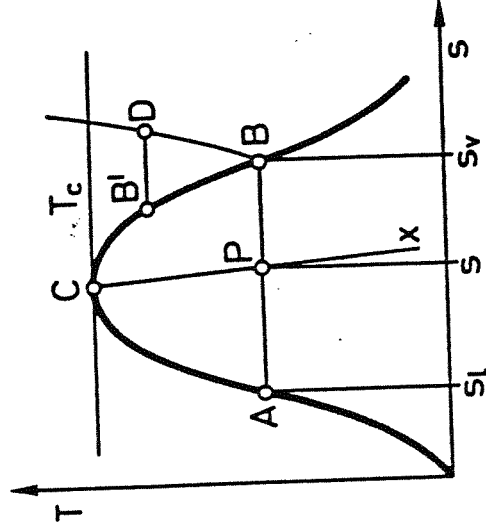


Fig. 5.14

Per una trasformazione internamente reversibile lungo la curva limite inferiore si ha

$$(5.11) \quad ds_1 = \frac{dQ}{T} = \frac{c_1 dT}{T}$$

e quindi:

134

(5.12)

$$s_1 = \int \frac{c_1 dT}{T} + \text{cost}$$

ove con c_1 si è indicato il calore specifico del liquido. Questo calore specifico si mantiene sensibilmente costante per temperature inferiori alla temperatura del punto critico T_c , ma aumenta in prossimità di questa temperatura e tende all'infinito per $T \rightarrow T_c$.

Il valore della costante è definito convenzionalmente ponendo $s = 0$ per $T = T_o = 273,15^\circ \text{K}$ e alla pressione di saturazione corrispondente. E' pertanto

(5.13)

$$s_1 = \int_{T_o}^T \frac{c_1 dT}{T}$$

Durante la vaporizzazione (a temperatura costante) l'entropia ^{specifico} aumenta di $\frac{r}{T}$ ove r è il calore di vaporizzazione. (La quantità $\frac{r}{T}$ si chiama anche entropia di vaporizzazione).

L'entropia del vapore saturo secco è per tanto:

(5.14)

$$s_v = \int_{T_o}^T \frac{c_1 dT}{T} + \frac{r}{T}$$

Le equazioni (5.13) e (5.14) consentono di tracciare la curva limite nel diagramma T-s.

Anche in questo diagramma il titolo x in un punto generico P è dato dal rapporto

$\frac{AP}{AB}$. Difatti, detta s l'entropia in P:

135

$$\frac{AP}{AB} = s - s_1 = \frac{r x}{T}$$

$$\frac{AB}{AB} = s_v - s_1 = \frac{r}{T}$$

da cui

$$\frac{AP}{AB} = \frac{r x / T}{r / T} = x$$

E si possono, anche in questo diagramma, come nel precedente p-v, tracciare le linee isotitolo che convergono in C.

Nella zona del vapore surriscaldato le isobare hanno andamento esponenziale (linea B D nel diagramma di fig. 5.14). Difatti la variazione di entropia lungo un'isobara a partire da condizioni di vapore saturo secco a temperatura T_s è:

(5.15)

$$\Delta s_{\text{surr}} = \int_{T_s}^T \frac{c_{\text{psr}} dT}{T}$$

La pendenza del vapore saturo secco

e, indicando con $(c_{\text{psr}})_m$ il valore medio del calore specifico a pressione costante del vapore surriscaldato:

$$T = T_s \quad e \quad \Delta s / (c_{\text{psr}})_m$$

L'entropia del vapore surriscaldato (punto D del diagramma di fig. 5.14) è pertanto per (5.14), (5.15):

(5.16)

$$s_D = \int_{T_o}^{T_s} \frac{c_1 dT}{T} + \frac{r}{T_s} + \int_{T_s}^T \frac{c_{\text{psr}} dT}{T}$$

136
137

E' da sottolineare il fatto che il calore specifico a pressione costante del vapore surriscaldato è funzione sia della pressione che della temperatura. Solo per basse pressioni esso si può ritenere indipendentemente dalla pressione (comportamento del gas ideale).

Si osservi nel diagramma di fig. 5.14 che il segmento B'D rappresenta il passaggio da vapore saturo secco a vapore surriscaldato per espansione isoterma (come in fig. 5.12).

Nella zona del liquido sottoraffreddato le linee a pressione costante sono molto prossime alla curva limite inferiore come è indicato in fig. 5.15. Di solito queste linee non ven-

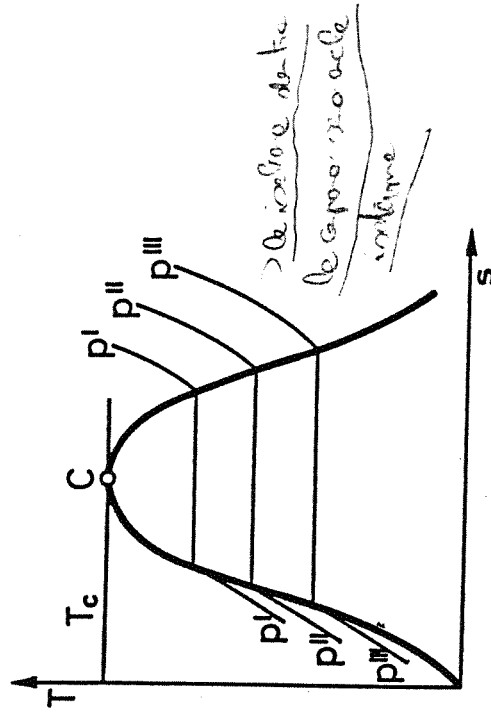


Fig. 5.15

gono rappresentate distinte dalla curva limite. (Si osservi che per il liquido c_p è poco diverso da c_l e si ricordi il significato geometrico di calore specifico nel diagramma T-s).

Per completare il diagramma T-s dei vapori, oltre al tracciamento delle isoterme (orizzontali) delle isentropiche (verticali) della curva limite, delle linee isobare, delle isoterme, sono da considerare le linee isocore e le linee isentalpiche.

Le prime, hanno andamento indicato dalle linee tratteggiate in fig. 5.16. Nella zona del vapore surriscaldato del gas hanno andamento

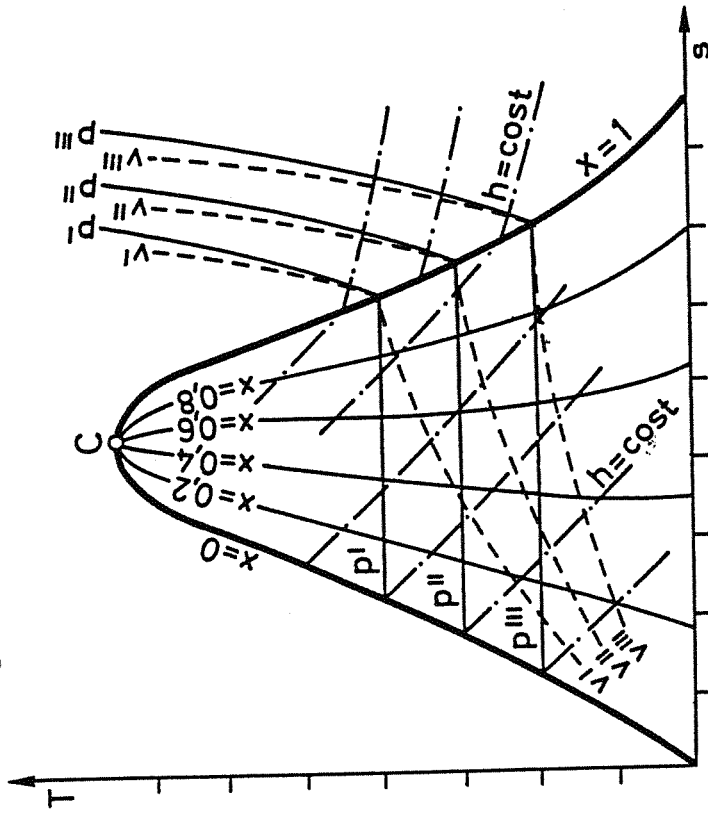


Fig. 5.16

più ripido delle linee isobare. Si trova in questa zona quanto detto a proposito del diagramma entropico dei gas (par. 3.10 e fig. 3.10).

Le isentalpiche infine hanno andamento indicato dalle linee a tratto e punto di figura 5.16 (per l'espressione dell'entalpia dei vapori si veda il paragrafo successivo).

5.6 IL DIAGRAMMA h-s DEI VAPORI SATURI

Il diagramma che riporta in ascisse l'entalpia e in ordinate l'entalpia è molto usato soprattutto per il vapore acqueo. Viene chiamato diagramma di Mollier. Si vuol tracciare anzitutto in questo diagramma la curva limite.

Per il tratto della curva limite inferiore si è già ricavata l'entropia:

(5.13)

$$s_1 = \int_{T_0}^T \frac{c_1 dT}{T}$$

Per ottenere l'entalpia si parta dalla equazione del primo principio (processi quasi statici):

$$dh = dQ + v dp,$$

da cui, ponendo l'entalpia del liquido eguale a zero alla temperatura di 0°C e alla corrispondente pressione di saturazione p_0 :

(5.17)

$$h_1 = c_1 t + v_1 (p - p_0)$$

(Il volume specifico si ritiene approssimativamente costante trattandosi di un liquido).

Il secondo termine a secondo membro è trascurabile rispetto al primo (almeno per pressioni non troppo vicine alla pressione critica) (¹) talchè si assume:

(5.18)

$$h_1 = c_1 t$$

(¹) Per esempio, alla temperatura $t = 180^\circ\text{C}$ la entalpia dell'acqua in condizioni di saturazione si trova essere:

$$h = 763 \frac{\text{k J}}{\text{kg}}$$

Il secondo termine della (5.17), essendo il volume specifico $v_1 = 0,001 \text{ m}^3/\text{kg}$ ed essendo, dalla tabella 5.1, $p = 10,03 \text{ bar} = 10,03 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$; $p_0 = 0,0061 \text{ bar}$, risulta:

Le relazioni (5.13) e (5.18) costituiscono le equazioni parametriche della curva limite inferiore.

Per la curva limite superiore l'entropia è data dalla:

(5.14)

$$s_v = \int_{T_0}^T \frac{c_1 dT}{T} + \frac{r}{T}$$

mentre l'entalpia è ovviamente:

(5.19)

$$h_o = c_1 t + r$$

Queste due ultime relazioni costituiscono le equazioni parametriche della curva limite superiore.

La curva limite si presenta come in figura 5.17. Il punto critico non si trova nel punto di massimo della curva limite come invece necessariamente avveniva nei diagrammi p-v e T-s. Si può dimostrare anzi che il punto critico costituisce un punto di flesso per la curva limite.

Si è già accennato (par. 3.8) che nel diagramma h-s la pendenza della isobara in un punto è data dal valore della temperatura assoluta in quel punto. Nella zona del vapore saturo per tanto le isobare, coincidendo con le isoterme, sono delle rette; e due tali linee come AB, A₁B₁, rappresentando vaporizzazione a temperature diverse, non sono parallele. Nella zona del liquido le isobare sono molto prossime alla cur-

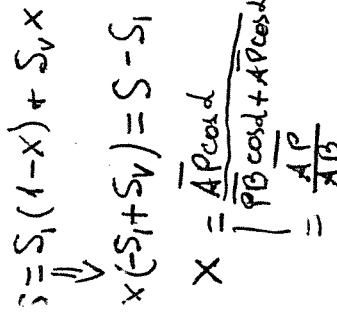
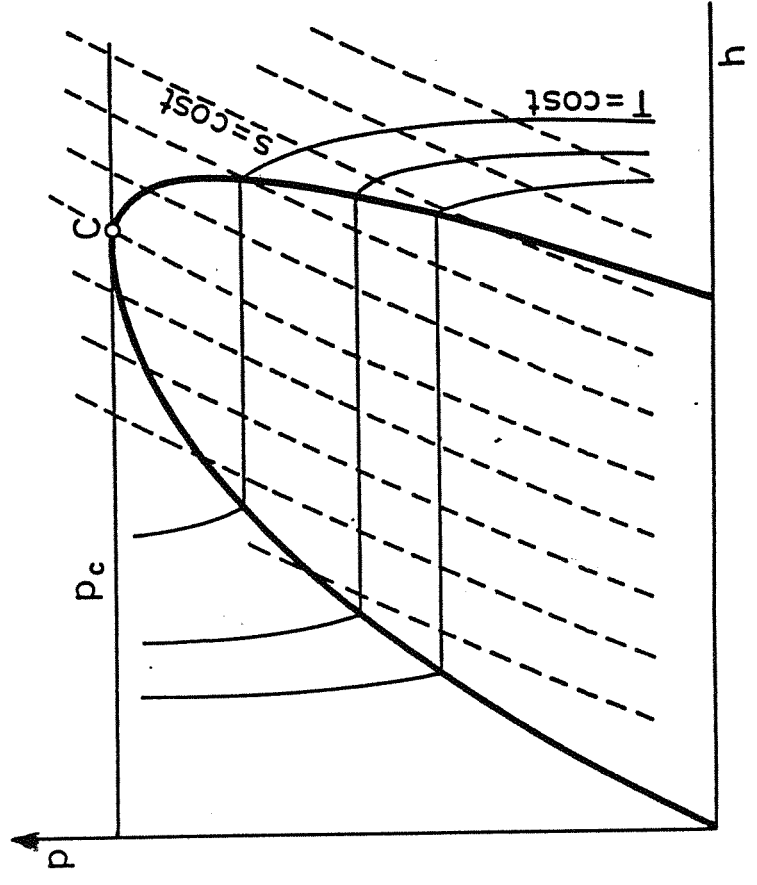
Segue nota (¹) pag. prec.

$$v_1 (p - p_0) \approx 1000 \text{ J/kg} = 1 \text{ k J/kg}$$

Come si vede questo termine è trascurabile nel computo dell'entalpia.

Di solito, di questo diagramma, per lo studio dei cicli a vapor d'acqua, viene rappresentata solo una parte contenente la curva limite superiore e la zona del vapor surriscaldato, (la zona in alto a destra delimitata dal tratteggio in fig. 5.17).

Questo diagramma che porta in ascisse l'entalpia e in ordinata la pressione, è molto impiegato per la rappresentazione dei cicli frigoriferi. Anche qui (fig. 5.18) si distinguono



va limite e non sono segnate nei diagrammi. Nella zona del vapore surriscaldato esse sono a pendenza crescente e divergenti (non vi è punto angoloso all'intersezione con la curva limite superiore).

Le isocore hanno, nella zona del vapor surriscaldato, andamento simile alle isobare, con pendenza maggiore.

$$\begin{aligned} S &= S_L(n-X) + S_U X \\ S &= S_L X + S_U X \\ S - S_L &= X(S_U - S_L) \\ X &= \frac{S - S_L}{S_U - S_L} = \frac{DP}{NR} \end{aligned}$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{s - s_1}{s_v - s_1} = \frac{r \frac{x}{T}}{r \frac{T}{T}} = x$$

una curva limite inferiore e una curva limite superiore (il punto critico è il massimo della curva) e il campo è diviso nella zona del liquido, del vapor saturo e del vapore surriscaldato.

Si tracciano con lo stesso criterio dei casi precedenti le curve isotole. Le linee isentropiche hanno pendenza positiva, essendo

$$(5.20) \quad \left(\frac{\partial p}{\partial h} \right)_s = \frac{1}{v}$$

(come si ricava dal primo principio scritto nella forma: $dh = T ds + v dp$).

Nel diagramma p-h sovente i valori dell'ordinata sono in scala logaritmica.

5.8 PROCESSI DEI VAPORI SATURI

I processi dei vapori che più frequentemente si incontrano nella tecnica sono, al solito, il processo senza scambio di lavoro e il processo adiabatrico. E si tratta di processi con deflusso.

Il primo si ha ad esempio negli evaporatori, nei generatori di vapore, nei condensatori.

Nei diagrammi T-s (fig. 5.19) e h-s (fig. 5.20) un processo di tal tipo, che può considerarsi a pressione approssimativamente costante è rappresentato dalla linea A B D E. Nel senso da A a D si ha un riscaldamento del liquido (AB) fino a pressione di saturazione, indi la vaporizzazione (BD), indi il surriscaldamento (DE). La quantità di calore scambiata è data dalla differenza di entalpia:

$$Q = h_E - h_A.$$

ed è rappresentata dall'area tratteggiata nel diagramma T-s e dal segmento letto nella scala

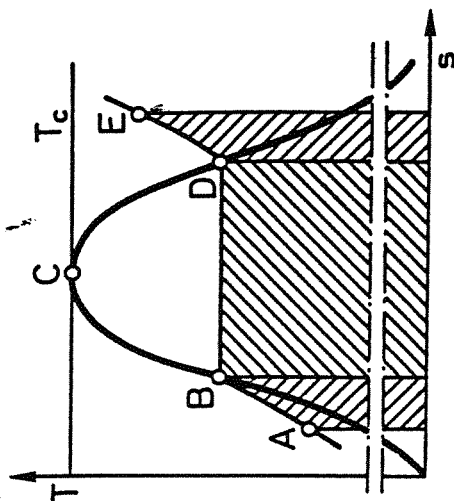


Fig. 5.19

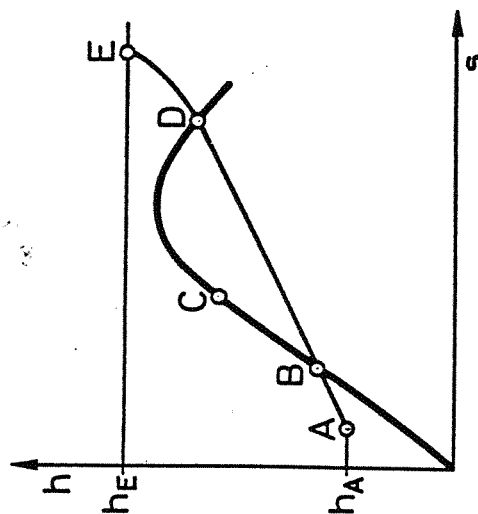


Fig. 5.20

delle ordinate nel diagramma h-s.

Il processo adiabatrico si ha nella compressione ed espansione dei vapori. Il processo, può avvenire con scambio di lavoro con l'esterno e può essere adiabatrico reversibile (isentropico) o adiabatrico irreversibile (con attrito interno).

considerata a comportamento ideale e si compone dei quattro processi (fig. 8.4):

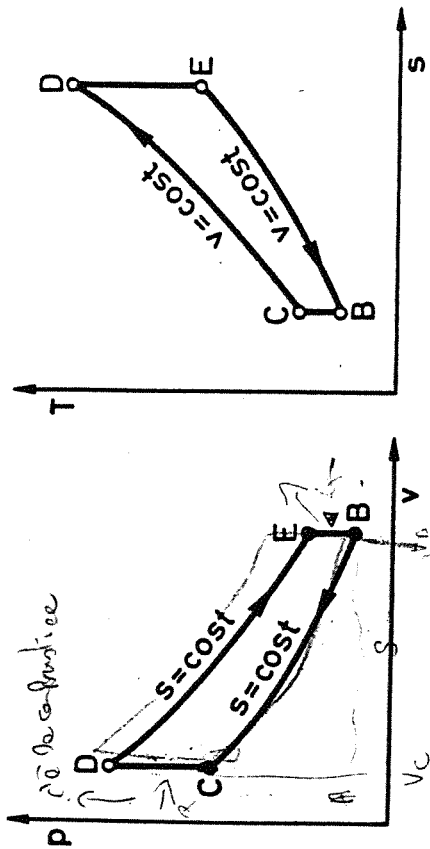


Fig. 8.4

- BC: compressione isentropica;
 - CD: somministrazione di calore Q_{CD} a volume costante;
 - DE: espansione isentropica;
 - EB: cessione di calore Q_{EB} a volume costante.
- Il lavoro ottenuto dal ciclo è dato da:

$$L = Q_{CD} - Q_{EB}$$

(ove tutti i termini sono presi in valore assoluto).
Il rendimento del ciclo è pertanto:

$$(8.1) \quad \eta = \frac{L}{Q_{CD}} = \frac{Q_{CD} - Q_{EB}}{Q_{CD}} = 1 - \frac{Q_{EB}}{Q_{CD}};$$

ma si può scrivere:

$$Q_{EB} = c_v(T_E - T_B), \text{ dove vale}$$

$$Q_{CD} = c_v(T_D - T_C);$$

quindi, considerando $c_v = \text{cost.}$:

(8.2)

$$\eta = 1 - \frac{T_E - T_B}{T_D - T_C}$$

Per i processi isentropici valgono le relazioni:

$$T_D V_D^{k-1} = T_E V_E^{k-1} \quad V_D = V_E$$

$$T_C V_C^{k-1} = T_B V_B^{k-1} \quad V_C = V_B$$

$$\frac{T_D}{T_B} = \frac{T_C}{T_E} = k-1,$$

avendo indicato con p il rapporto dei volumi

$$\frac{V_B}{V_C}$$

Ora si ha:

$$\frac{T_C}{T_D} = \frac{T_B}{T_E}$$

$$\frac{T_D - T_C}{T_E - T_B} = \frac{T_D}{T_E}$$

$$1 - \frac{T_C}{T_D} = 1 - \frac{T_B}{T_E},$$

ossia:

$$\frac{T_E - T_B}{T_D - T_C} = \frac{T_E}{T_D},$$

e quindi il rendimento (8.2) si può esprimere:

$$\eta = 1 - \frac{T_E}{T_D}$$

(8.3)

o, in termini di rapporto di compressione:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\rho^{k-1}}$$

(8.4)

Si noti che il rendimento di Carnot fra la massima e la minima temperatura del ciclo sarebbe:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_B}{T_D}$$

(8.5)

L'equazione (8.3) mostra che il rendimento del ciclo è minore, poichè $T_E > T_B$. Il risultato era prevedibile poichè la somministrazione e la cessione del calore non avvengono alla massima e alla minima temperatura.

Quello che è importante osservare è che il rendimento aumenta al crescere del rapporto di compressione ρ . L'equazione (8.4) è strettamente applicabile al ciclo ideale del gas perfetto, ma viene a indicare verso quali limiti deve tendere la macchina reale.

Sul comportamento pratico di questa sua dipendenza dal livello medio di temperatura del ciclo e dalla velocità di rotazione) qui non ci si sofferma. Basti dire che l'aumento del rapporto di compressione porta contro difficoltà insormontabili per fenomeni di *detonazione* in dipendenza della natura del combustibile. Il ciclo *Diesel* differisce dal ciclo Otto per il fatto che la combustione avviene a pressione costante anzichè a volume costante.

Il cilindro invece di aspirare miscela aspirata aria soltanto, la quale può essere compressa con valori del rapporto di compressione ben più elevati. Il combustibile è iniettato nel cilindro quando si desidera far avvenire la combustione. L'alta temperatura raggiunta dall'aria per la compressione fa sì che il combustibile iniettato bruci spontaneamente.

Il classico ciclo ideale dell'aria per un motore così funzionante è rappresentato nel diagramma (di stato dell'aria) di fig. 8.5.

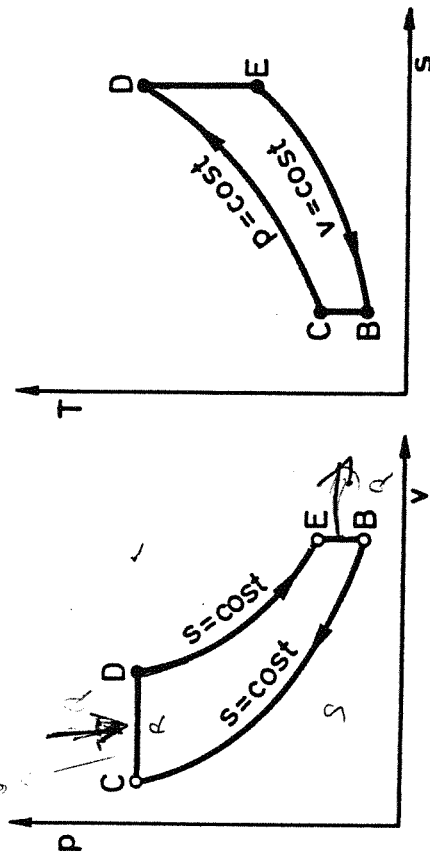


Fig. 8.5

Si hanno i quattro processi:

BC: compressione isentropica;

CD: somministrazione di calore Q_{CD} a pressione costante;

DE: espansione isentropica;

EB: cessione di calore Q_{EB} a volume costante.

Il rendimento del ciclo si esprime:

$$\eta = \frac{Q_{CD} - Q_{EB}}{Q_{CD}}$$

$$(8.6) \quad \eta = \frac{L}{Q_{CD}} = 1 - \frac{Q_{EB}}{Q_{CD}} = 1 - \frac{c_v(T_E - T_B)}{c_p(T_D - T_C)} =$$

$$= 1 - \frac{T_E - T_B}{k(T_D - T_C)}$$

Questo rendimento si può esprimere in funzione

del rapporto di compressione $\rho = \frac{v_B}{v_C}$ e del rapporto $r = \frac{v_D}{v_C}$ nel modo seguente:

$$\frac{T_C}{T_B} = \rho^{k-1}$$

da cui $T_B = T_C \cdot \frac{1}{\rho^{k-1}}$

Per un processo a volume costante:

$$\frac{T_D}{T_C} = r$$

e quindi $T_D = T_C \cdot r$

Ne deriva: $T_E = T_D \cdot r^{k-1} = T_C \cdot r^k$

$$\frac{T_E}{T_D} = \left(\frac{v_D}{v_E} \right)^{k-1} = \left(\frac{v_D \cdot v_C}{v_C \cdot v_E} \right)^{k-1} = \left(\frac{r}{\rho} \right)^{k-1}$$

e quindi:

$$T_E = T_C \cdot r \cdot \left(\frac{r}{\rho} \right)^{k-1}$$

Sostituendo le espressioni di T_B , T_D e T_E nella (8.6) si ottiene:

$$(8.7) \quad \eta = 1 - \frac{1}{\rho^{k-1}} \cdot \left(\frac{r^{k-1}}{k(r-1)} \right)$$

Si vede che il rendimento del ciclo Diesel dipende dal rapporto r ossia dalla quantità di calore somministrato, oltre che, beninteso, dal rapporto di compressione ρ . Poichè il termine

$\frac{r^{k-1}}{k(r-1)}$ è sempre maggiore di uno (per $r \neq 1$)

il ciclo Diesel ha sempre un rendimento inferiore al ciclo Otto per lo stesso rapporto ρ . Ma, come si è detto, nel ciclo Diesel si possono realizzare rapporti di compressione ben maggiori. Nella fig. 8.6 è rappresentato il ren-

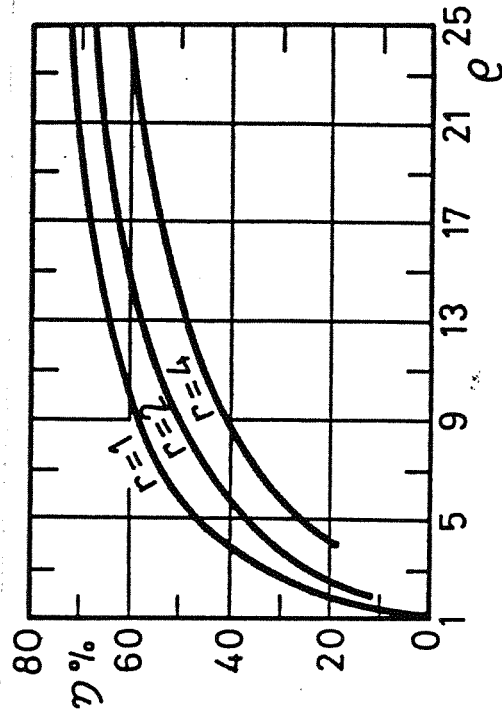


Fig. 8.6

dimento del ciclo Diesel ideale in funzione del rapporto di compressione ρ per vari valori del rapporto r .

Il comportamento di molti motori alternativi a combustione interna è meglio rappresentato da un ciclo misto, nel quale il calore è somministrato parte a volume costante e parte a pressione costante.

Si veda la fig. 8.7. Indicando con

$$\rho = \frac{v_B}{v_C}, \quad r = \frac{v_E}{v_D}, \quad \sigma = \frac{p_D}{p_C}$$

si può dimostrare che l'espressione del rendimento è data da:

$$(8.8) \quad \eta = 1 - \frac{1}{\rho^{k-1}} \cdot \frac{\delta^{k-1}}{(\delta-1) + k\delta(r-1)}$$

Evidentemente le espressioni del ciclo Otto ($r=1$) e del ciclo Diesel ($\delta=1$) sono casi

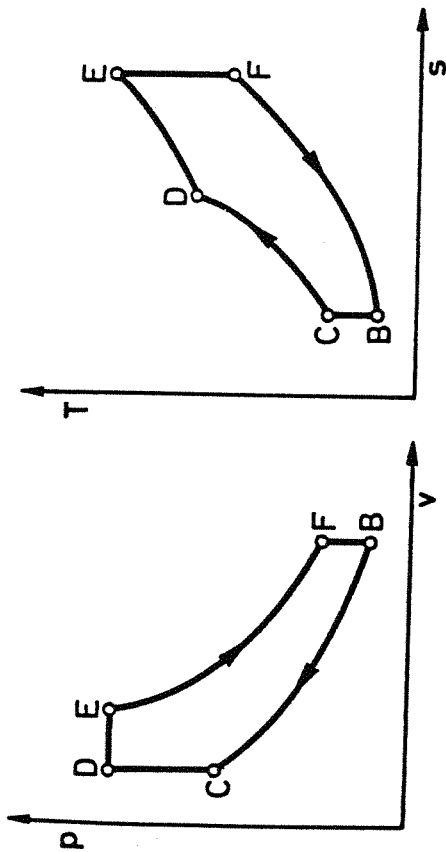


Fig. 8.7

particolari della (8.8).

Per un dato rapporto di compressione si vede che il rendimento di un ciclo misto è compreso fra quelli del ciclo Otto e del ciclo Diesel e dipende dal rapporto fra il calore somministrato a volume costante e il calore somministrato a pressione costante.

A completamento di quanto detto fin qui sui motori a combustione interna è opportuno segnalare che una grandezza alla quale spesso si fa ricorso nella valutazione del loro funzionamento è la pressione media effettiva p_m . E' questa definita come l'altezza del rettangolo nel diagramma $p-v$ che ha la stessa area e la stessa variazione di volume del ciclo. Questo è illustrato nella fig. 8.8 ove si vede che:

$$p_m (v_1 - v_2) = \oint p dv = L$$

ove L è il lavoro netto compiuto dall'unità di massa del fluido.

La pressione p_m può essere considerata

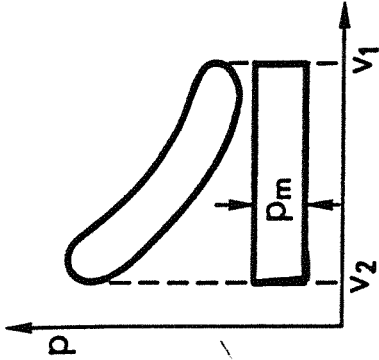


Fig. 8.8

come quella pressione che agendo sul pistone lungo la sua corsa produrrebbe il lavoro netto del ciclo.

Si vede che un ciclo con una elevata pressione media produce maggior lavoro per unità di volume generato e pertanto il motore richiede minore ingombro. E' una riduzione del volume del cilindro si riflette anche in una riduzione delle perdite per attrito.

8.4 I CICLI NELLE TURBINE A GAS

Un impianto di una turbina a gas è rappresentato schematicamente nella fig. 8.9. L'aria è aspirata e compressa adiabaticamente da un compressore (AB), indi inviata in una camera di combustione (c.c.) ove è somministrato il combustibile.

Il rapporto aria combustibile è regolato in modo da avere non troppo elevate temperature dei prodotti della combustione all'ingresso in turbina ove la miscela stessa si espande fino alla pressione atmosferica. Generalmente più di metà del lavoro della turbina è richiesto per il trascinamento del compressore e la differenza è il lavoro netto ottenuto (a parte il lavoro

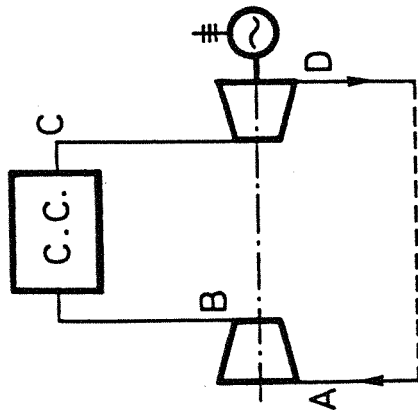


Fig. 8.9

Il ciclo ideale ad aria corrispondente alla turbina a gas è chiamato ciclo Brayton o ciclo Joule ed è rappresentato nel diagramma T-s dell'aria di fig. 8.10.

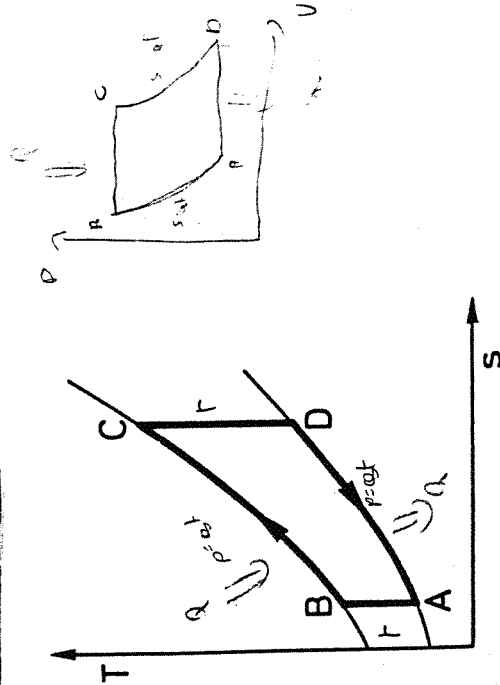


Fig. 8.10

Si legge:

AB: compressione isentropica;

BC: somministrazione di calore a pressione co-

stante,

CD: espansione isentropica;

DA: cessione di calore a pressione costante.

Considerando al solito l'aria a comportamento ideale si esprime il rendimento:

$$(8.9) \quad \eta = \frac{L}{Q_{BC}} = 1 - \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 - \frac{c_p (T_D - T_A)}{c_p (T_C - T_B)}.$$

Indicando con r il rapporto delle pressioni

$$\frac{P_B}{P_A} = \frac{P_C}{P_D} \text{ si può scrivere: } T_B \rho_B^{\frac{1}{k}} = T_D \rho_D^{\frac{1}{k}} \quad T_B = T_D \left(\frac{\rho_D}{\rho_B} \right)^k = T_D \left(\frac{P_D}{P_B} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$T_B = T_A r^{\frac{k-1}{k}} \quad \text{e} \quad T_C = T_D r^{\frac{k-1}{k}}.$$

Sostituendo questi valori nella (8.9) si ottiene:

$$(8.10) \quad \eta = 1 - \frac{1}{r^{\frac{k-1}{k}}}.$$

Poichè il ciclo appena descritto va pensato a temperatura massima limitata da motivi tecnologici (necessità di ottenere una certa resistenza a caldo, per un buon numero di ore, dai materiali impiegati) è interessante studiare come varia il rendimento di un ciclo ideale, nell'ipotesi di temperatura massima costante, in funzione del rapporto delle pressioni.

Con riferimento alla fig. 8.11 si vede che, nelle ipotesi poste, il lavoro ottenuto da un ciclo diminuisce all'aumentare di r da un certo punto in poi (diminuiscono le aree racchiuse) mentre la (8.10) ci assicura che il

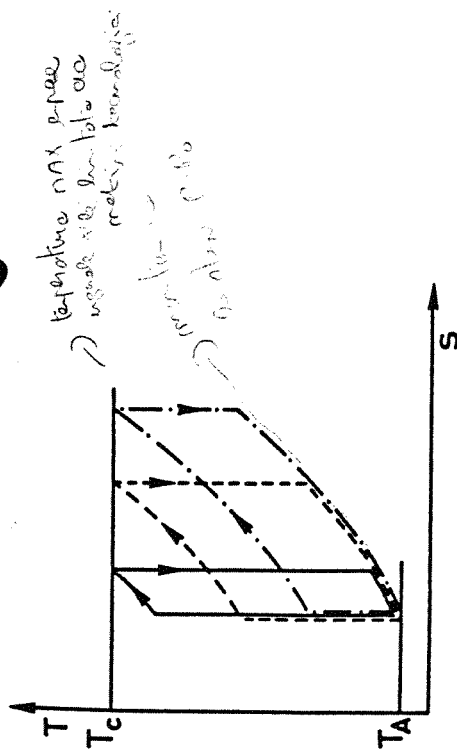


Fig. 8.11

rendimento aumenta.

Al limite, aumentando r si ha che T_B tende a T_C mentre T_D tende a T_A : il ciclo tende ad assumere la forma rettangolare propria di un ciclo di Carnot, per il quale il rendimento

è dato dal rapporto $\frac{T_C - T_A}{T_C}$. Nello stesso tem-

po l'area racchiusa dal ciclo, cioè il lavoro ottenuto, tende a zero. Si ha quindi il diagramma di fig. 8.12.

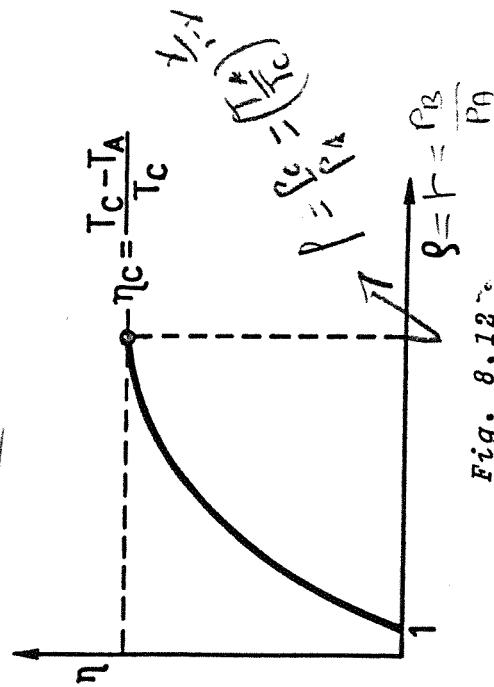


Fig. 8.12

I cicli reali non sono però reversibili. Si supponga pure di trascurare le perdite di carico nelle tubazioni e di considerare isobara la fornitura di calore; si devono però caratterizzare la turbina ed il compressore mediante opportuni valori del rendimento isentropico (η_T ed η_C). L'espansione e la compressione (adiabatiche) avvengono con aumento di entropia e il ciclo si modifica come indicato nella figura 8.13.

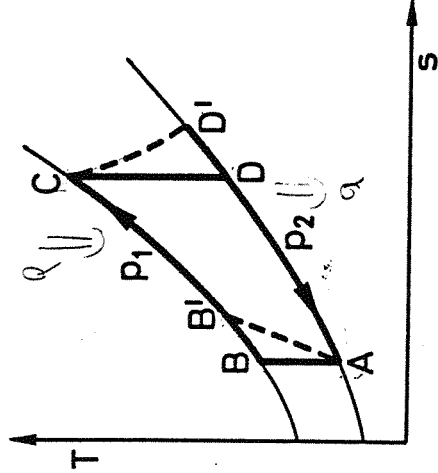


Fig. 8.13

Il rendimento si può esprimere:

$$\eta = \frac{L}{Q} = \frac{(h_C - h_{D'}) - (h_B - h_A)}{h_C - h_{B'}} = \frac{\eta_T (h_C - h_D) - (h_B - h_A) \cdot \frac{1}{\eta_C}}{h_C - h_{B'} + h_A - h_A} = \frac{\eta_T (h_C - h_D) - (h_B - h_A) \cdot \frac{1}{\eta_C}}{h_C - \frac{h_B - h_A}{\eta_C} - h_A}$$

$\eta = \frac{L_{rev}}{L_{irr}}$
 $\eta = \frac{Q_{rev}}{Q_{irr}}$
 $\eta = \frac{L_{rev}}{L_{irr}}$

Trattando il fluido operante come gas ideale si ha:

$$\eta = \frac{\eta_{TC} (T_C - T_D) - c_p (T_B - T_A) \frac{1}{\eta_c}}{c_p \left[T_C - \frac{T_B - T_A}{\eta_c} - T_A \right]}$$

e supponendo il calore specifico costante al variare della temperatura:

$$(8.11) \quad \eta = \frac{\eta_{TC} (T_C - T_D) - (T_B - T_A) \frac{1}{\eta_c}}{T_C - \frac{T_B - T_A}{\eta_c} - T_A}$$

Indicando ancora r il rapporto delle pres-

sione $\frac{p_1}{p_2}$ si ha:

$$T_D = T_C \frac{1}{r^{\frac{1}{k}}}$$

$$T_D = \frac{T_C}{r^{\frac{1}{k}}}$$

ed anche

$$T_B = T_A \frac{k-1}{r^{\frac{1}{k}}}$$

Sostituendo le espressioni trovate nella (8.11) si ottiene:

$$\eta = \frac{\eta_{TC} \left(\frac{T_C}{r^{\frac{1}{k}}} - \frac{T_A}{r^{\frac{1}{k}}} \right) - \frac{T_B - T_A}{\eta_c}}{T_C - T_A \left[\frac{k-1}{r^{\frac{1}{k}}} + 1 \right]}$$

Se si pone:

$$M_1 = r^{\frac{k-1}{k}} - 1$$

$$M_2 = \frac{r^{\frac{k-1}{k}} - 1}{r^{\frac{1}{k}}}$$

la espressione precedente si può mettere nella forma concisa:

$$(8.12) \quad \eta = \frac{\eta_{TC} M_2 - \frac{M_1}{\eta_c} T_A}{T_C - T_A \left[\frac{M_1}{\eta_c} + 1 \right]}$$

Tale espressione, una volta fissati i rendimenti η_T ed η_C , si presta ad essere rappresentata in diagramma, in funzione del rapporto delle pressioni e per una data temperatura massima (fig. 8.14). Poichè le perdite nel compressore e nella turbina dissipano parte del lavoro utile, non si ottiene più lavoro già prima di arrivare al rapporto delle pressioni corrispondente, nel caso ideale, ad η Carnot; cioè

ne sul diagramma (T,s) è data in fig. 8.16 con

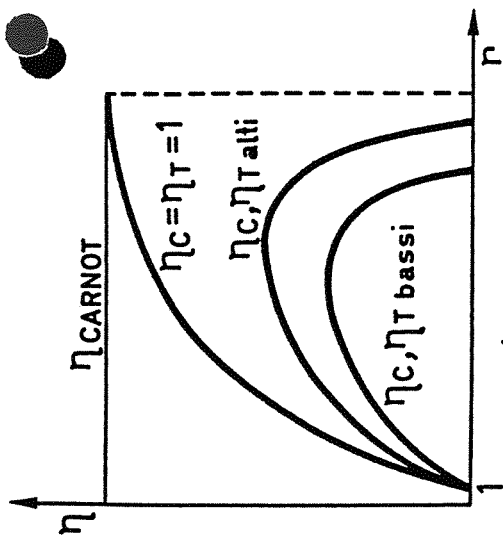


Fig. 8.14

non si ottiene più lavoro quando ancora si fornisce calore e perciò il rendimento si annulla.

Un inconveniente dei cicli fin qui descritti è che, secondo tali schemi, si scaricano nell'atmosfera dei gas a 300-400°C, cioè con notevole contenuto entalpico che non viene sfruttato ai fini della produzione di lavoro. Si è perciò pensato di recuperare il calore sensibile dei fumi, utilizzandolo per preriscaldare l'aria dopo la compressione. Lo schema funzionale di questi cicli a rigenerazione termica è dato in fig. 8.15. La rappresentazio-

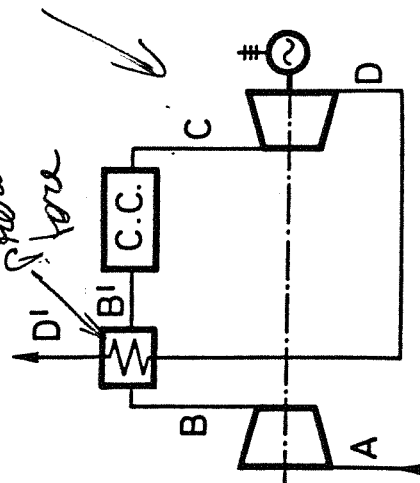


Fig. 8.15

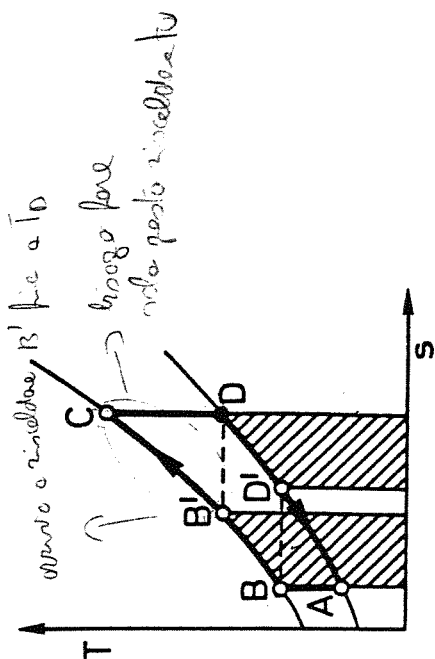


Fig. 8.16

riferimento ad un ciclo ideale ($\eta_C = \eta_T = 1$) e ad uno scambiatore di calore rigenerativo di efficienza unitaria, cioè capace di preriscaldare l'aria fino alla temperatura $T_{B'} = T_D$.

Se ci si pone nelle solite ipotesi il rendimento di tale ciclo è dato da:

$$\eta = \frac{L}{Q} = \frac{(h_C - h_D) - (h_B - h_A)}{h_C - h_{B'}} =$$

$$= \frac{c_p (T_C - T_D) - c_p (T_B - T_A)}{c_p (T_C - T_{B'})} =$$

$$= \frac{c_p (T_C - T_D) - c_p (T_B - T_A)}{c_p (T_C - T_D)}$$

e in definitiva:

$$(8.13) \quad \eta = 1 - \frac{T_B - T_A}{T_C - T_D}$$

Indicando con r il rapporto delle pressioni p_1/p_2 si ha:

$$T_B = T_A r^{k-1/k}$$

e

$$T_D = \frac{T_C}{r^{\frac{k-1}{k}}}$$

Sostituendo le espressioni precedenti nella (8.13) si arriva ad esprimere il rendimento nella forma:

$$(8.14) \quad \eta = 1 - \frac{T_A}{T_C} r^{k-1/k}$$

Da questa relazione si vede che, per un ciclo ideale con rigenerazione termica, il rendimento tende al rendimento di Carnot quando il rapporto delle pressioni tende ad 1. Si può perciò, sempre nell'ipotesi di temperatura massima del ciclo fissata, confrontare il ciclo ideale con rigenerazione ed il ciclo ideale senza rigenerazione. Si ottiene così il diagramma di fig. 8.17. Si tenga presente, per l'interpretazione corretta, che l'impiego del recuperatore ha senso fino a quando T_D è maggiore od uguale a T_B e quindi, da un certo valore del rapporto delle pressioni in poi, non si può più fare il ciclo a rigenerazione termica. Dal diagramma di fig. 8.17 si vede chiaramente che l'impiego dello scambiatore di calore rigenerativo permette di realizzare rendimenti elevati con bassi rapporti di compressione.

Se si fa ora riferimento al caso reale, cioè a rendimenti non unitari per il compressore

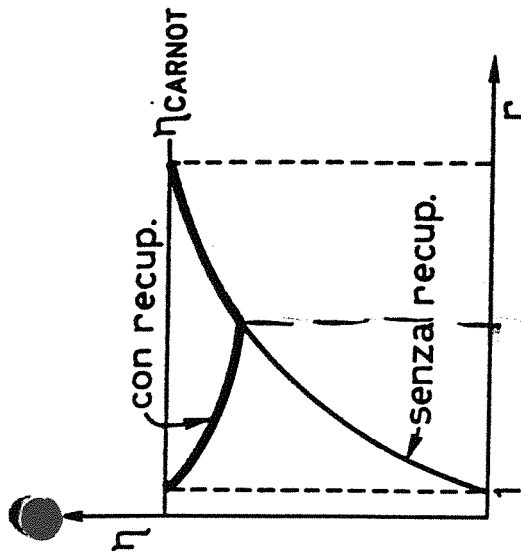


Fig. 8.17

re e la turbina, si vede (fig. 8.18) che mediante l'impiego della rigenerazione si ottengono dei rendimenti più elevati ed il massimo

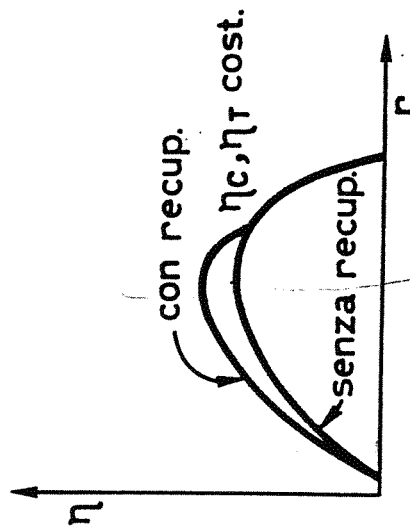


Fig. 8.18

del rendimento termico si ha per valori più bassi del rapporto delle pressioni.

In fig. 8.19 è rappresentato il diagramma riassuntivo di tutte le considerazioni fin qui svolte, con riferimento ad una data temperatura massima del ciclo ed a ben definite condizioni di temperatura e di pressione alla a-

ambientali di 20°C ed 1 atm).

E' chiaro che cambiando la T_{max} il diagramma di fig. 8.19 si modifica; non è comune compito di questo corso spingere oltre l'indagine. Si può però dire qualitativamente che, aumentando la temperatura massima e lasciando invariato il rapporto delle pressioni, aumenta la parte di ciclo a comportamento ideale e perciò si ottiene un rendimento più elevato. Ciò si potrebbe dimostrare rigorosamente studiando il segno della derivata prima del rendimento (8.12) in funzione della temperatura massima (T_C).

Si nota poi che, aumentando la temperatura massima, il massimo del rendimento va verso valori più elevati del rapporto delle pressioni, in accordo con l'aumento della parte di ciclo a comportamento ideale. Tutto ciò è illustrato dalla fig. 8.20, relativa evidentemente

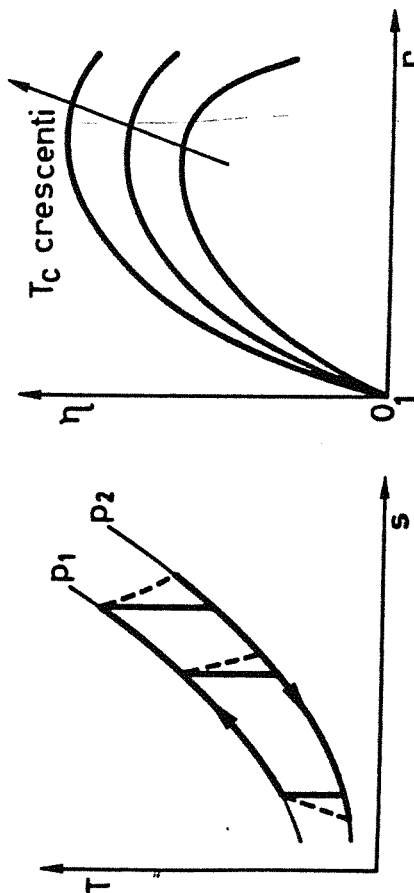


Fig. 8.19

Fig. 8.20

ad una data coppia di valori del rendimento della turbina e del compressore.

9.1 GENERALITA'

I cicli finora considerati sono chiamati diretti perchè servono a trasformare in lavoro meccanico una certa frazione della quantità di calore fornito al sistema. In un diagramma termodinamico la linea chiusa che li rappresenta è percorsa in senso orario.

Nei cicli inversi il sistema assorbe una certa quantità di calore da una sorgente a bassa temperatura T_0 ; mediante la spesa di una certa quantità di lavoro si ottiene il trasferimento di tale calore ad una sorgente a temperatura più elevata T_1 . In un diagramma termodinamico la linea corrispondente è percorsa in senso antiorario.

Si è già fatto cenno al paragrafo 3.6 ai cicli inversi e si è definito per questi il coefficiente di effetto utile. Nel caso in cui lo scopo del ciclo sia quello di sottrarre calore alla sorgente a bassa temperatura (ciclo frigorifero) è definito come coefficiente di effetto utile il rapporto fra il calore Q_0 si sottratto e il lavoro L corrispondentemente speso:

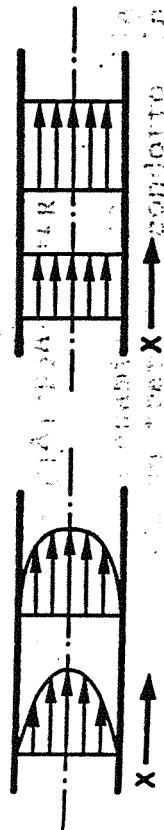
$$(9.1) \quad \epsilon = \frac{|Q_0|}{|L|}$$

Nel caso in cui lo scopo del ciclo sia quello di somministrare calore alla sorgente a temperatura più elevata (pompa di calore), il coefficiente di effetto utile è definito quale rapporto fra il calore Q_1 ceduto a questa sor-

12.1 DEFLUSSO MONODIMENSIONALE

Il deflusso di un fluido si dice mono-dimensionale se le proprietà del fluido stesso (pressione, temperatura, velocità) dipendono da una sola coordinata spaziale. Si dice bi o tri-dimensionale se queste proprietà dipendono da due o tre coordinate spaziali.

Si consideri il deflusso di un fluido in un condotto in regime stazionario in condizioni tali cioè che le proprietà in ciascun punto sono indipendenti dal tempo. Le proprietà del fluido variano da una sezione all'altra del condotto: ma in una stessa sezione esse possono variare. Le forze di attrito, quanto meno, sulle superfici interne del condotto producono un profilo delle velocità come indicato nella fig. 12.1a. Se il condotto è circola-



a) b) Fig. 12.1

re e il flusso assialmente simmetrico, si tratta di deflusso bidimensionale.

Spesso tuttavia per semplificare si assume l'approssimazione di flusso mono-dimensionale (fig. 12.1b), nel quale la velocità uniforme in una sezione è data dal rapporto fra la portata volumetrica e la sezione:

$$w = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot A} \quad (12.1)$$

E' da notare che l'energia cinetica in un deflusso monodimensionale non è la medesima del flusso bidimensionale con la stessa velocità media. La differenza spesso può essere trascurata. Ed è quanto si farà nei paragrafi che seguono.

12.2 EQUAZIONI FONDAMENTALI

In un deflusso in regime stazionario la portata di massa è uguale in tutte le sezioni:

$$\dot{m} = A \cdot \rho \cdot w = \text{cost.}$$

Differenziando si può scrivere

$$(12.2) \quad \frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dw}{w} = 0,$$

oppure, introducendo il volume specifico al posto della densità ($v = \frac{1}{\rho}$):

$$(12.3) \quad \frac{dA}{A} - \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} = 0.$$

E' questa l'equazione di continuità per il moto dei fluidi.

La seconda equazione fondamentale si può ricavare come segue.

Si considerino due sezioni in un deflusso monodimensionale nelle quali le velocità sono rispettivamente w_1 e w_2 (fig. 12.2). La massa di fluido che passa nella unità di tempo subi-

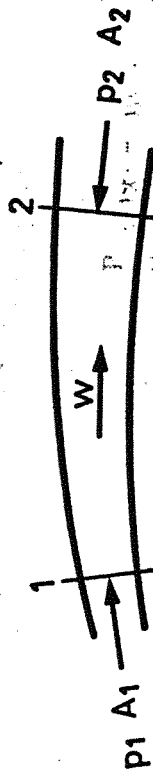


Fig. 12.2

$$\dot{m}(w_2 - w_1).$$

Questa variazione è data dalla somma delle forze che agiscono nel fluido fra le sezioni 1 e 2. (Beninteso dalle componenti di queste forze in direzione della velocità).

Queste forze sono, dovute: a) alle pressioni normali che agiscono nelle due sezioni e valgono $p_1 A_1 - p_2 A_2$; b) alle forze che agiscono sulla superficie del condotto, F_s ; c) alla reazione F_R alle forze che il fluido esercita sugli oggetti interni alla massa fluente, fissi, o mobili, quali in particolare palettature di turbine, di ventilatori, di compressori; d) alla forza di gravità F_g .

Si può scrivere:

$$(12.4) \quad \dot{m}(w_2 - w_1) = p_1 A_1 - p_2 A_2 + F_s + F_R + F_g.$$

La forza F_s può essere esaminata più dettagliatamente considerando un tratto di condotto infinitesimo (fig. 12.3). Sono scambiato con l'esterno il differenziale dF_s , è la somma di due forze: la prima è la componente della pressione normale alla superficie:

$$(12.5) \quad dF_n = p \sin \alpha \, dA_t = p \, dA,$$

ove dA è la proiezione, in direzione del moto, della superficie dA_t del tubo.

La seconda è dovuta dallo sforzo di attri-

$$(12.13) \quad \frac{dw^2}{2} + v \frac{dw}{dx}$$

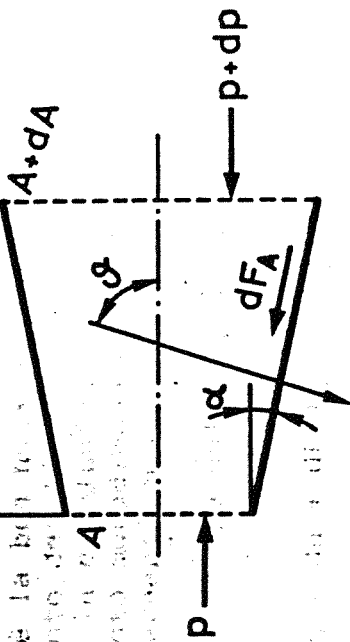


Fig. 12.3

to τ sulla superficie:

$$(12.6) \quad dF_A = -\tau dA_t \cos \alpha = -\tau P dx$$

avendo indicato con P il perimetro del tubo.

La forza dovuta alla gravità F_g si esprime:

$$(12.7) \quad dF_g = -g \cdot \rho \cdot A \cdot dx \cdot \cos \vartheta = -g \rho A dx$$

ove dz è la distanza verticale dei due punti nell'asse della corrente.

In definitiva la (12.4) in termini infinitesimi si scrive:

$$(12.8) \quad \dot{m} dw = -d(pA) + p dA - \tau P dx - g \rho A dx + F_R$$

ossia (con $\dot{m} = A \cdot \rho \cdot w$):

$$(12.9) \quad \rho w dw = -dp - \tau \frac{P}{A} dx - g \rho dz + \frac{F_R}{A}$$

I termini sono tutti omogenei con una pressione. Moltiplicando per il volume specifico v si ottiene:

$$(12.10) \quad \frac{dw^2}{2} = -v dp - \tau \frac{P}{A} v dx - g dz + \frac{F_R v}{A}$$

I termini sono omogenei ad una energia per unità di massa. Questa equazione può leggersi in questo modo: di controllo

"La variazione di energia cinetica della massa unitaria del fluido lungo il condotto è data dal contributo del lavoro delle forze di pressione, delle forze di attrito, delle forze di gravità, e dal lavoro scambiato con l'organo motore".

Il termine $\tau \frac{P}{A} v dx$ sarà indicato semplicemente con dR . Il termine $\frac{F_R v}{A}$ sarà indicato

semplicemente con dL e tenendo conto della convenzione stabilita in termodinamica che un lavoro dL somministrato al fluido, è negativo, questo simbolo sarà preceduto da un segno $-$.

La formula (12.10) quindi si scrive:

$$(12.11) \quad \frac{dw^2}{2} + v dp + g dz + dR + dL = 0.$$

È questa chiamata l'equazione delle forze vive del moto dei fluidi. $pA - (p+dp)A$.

Si osserva che se manca il termine dovuto all'attrito e al lavoro scambiato con l'esterno l'equazione si riduce a:

$$(12.12) \quad \frac{dw^2}{2} + v dp + g dz = 0$$

e questa costituisce la equazione di Eulero.

Se si tratta di un fluido incompressibile la (12.12) integrata fra due sezioni 1 e 2 porge:

$$(12.13) \quad \frac{w_1^2}{2} + vp_1 + gz_1 = \frac{w_2^2}{2} + vp_2 + gz_2$$

che è la ben nota equazione di Bernoulli per il moto dei fluidi.

In conclusione per lo studio di un fluido in moto monodimensionale si possono utilizzare le seguenti equazioni:

1) Equazione del I° principio:

$$dq = dh + dL + \frac{dw^2}{2} + gdz$$

- 2) equazione delle forze vive (12.11);
- 3) equazione di continuità (12.13);
- 4) equazione di stato del fluido in questione.

12.3 VELOCITA' DEL SUONO. NUMERO DI MACH

Si consideri un condotto circolare nel quale un pistone è spostato con improvviso movimento Δx da sinistra a destra (fig. 12.4).

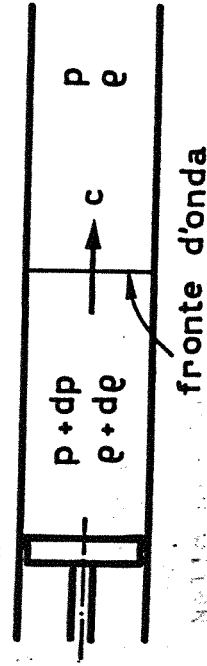


Fig. 12.4

Si genera, nel gas immediatamente vicino, un aumento di pressione Δp che si propaga, verso destra nel gas stesso con una certa velocità C . Questa velocità di propagazione di una perturbazione in un fluido si dice anche velocità

Per esaminare la cosa analiticamente, ci si riduca al moto stazionario immaginando che l'onda sia ferma e il gas si muova da destra a sinistra con velocità c (fig. 12.5): regime

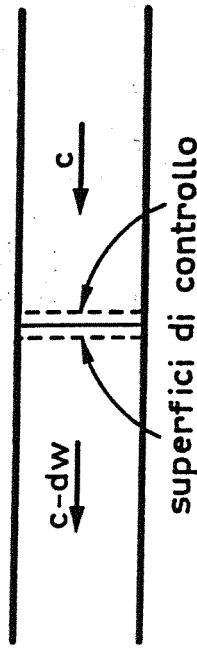


Fig. 12.5

Sia inoltre la perturbazione piccola quanto si vuole. Attraverso il fronte d'onda da destra a sinistra la pressione passa da $p + dp$, la densità da $\rho + d\rho$ e la velocità da c a $c - dw$. Il condotto ha sezione costante e il moto di considera senza attrito.

Applicando l'equazione di continuità (12.2) e l'equazione della quantità di moto (12.4) fra due superfici a monte e a valle del fronte d'onda e a distanza infinitesima, si può scrivere:

$$(12.14) \quad \frac{dp}{\rho} - \frac{dw}{c} = 0$$

$$(12.15) \quad A c [(c - dw) - c] = pA - (p + dp)A$$

Quest'ultima si riduce a: alla legge delle isen-

$$(12.16) \quad \rho c dw = dp$$

e combinando con la (12.14) si ottiene:

$$(12.17) \quad c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Il valore della derivata dipende dal tipo di processo che si immagina. Ed è ragionevole assumere questo processo isentropico per i picoli gradienti di pressione e di temperatura attraverso il fronte d'onda.

La (12.17) pertanto diviene:

$$(12.18) \quad c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s},$$

oppure anche

$$(12.19) \quad c = v \sqrt{-\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s}.$$

Nel caso di gas ideale per il quale vale la legge $p v^k = \text{cost.}$, assunto $k = \text{cost.}$, si ottiene:

$$(12.20) \quad c = \sqrt{k p v} = \sqrt{k R T}.$$

Le velocità del suono cresce al crescere della temperatura. Per l'aria alla temperatura di 20°C si ha:

$$c = \sqrt{1,4 \cdot 286,8 \cdot 293} \approx 340 \text{ m/sec}.$$

Nello studio del moto dei gas un parametro molto utile è il rapporto fra la velocità del gas in un punto e la velocità del suono nelle stesse condizioni. Tale rapporto è chiamato numero di Mach e viene indicato col simbolo M :

$$M = \frac{w}{c}.$$

Si distinguono vari regimi di deflusso. Per $M < 1$ si ha il cosiddetto regime incomprimibile; per $M < 1$ il regime è subsonico; per $M \approx 1$ il regime è transonico; per $M > 1$ il regime è supersonico; per $M > 1$ il regime è ipersonico.

12.4 VARIAZIONE DI SEZIONE NEL MOTO ISENTROPICO

Si consideri il moto isentropico (adiabatico senza attrito) di un gas in un condotto orizzontale. Sia nullo anche il lavoro scambiato con l'esterno.

L'equazione di continuità

$$(12.3) \quad \frac{dA}{A} = - \frac{dw}{w} + \frac{dv}{v}$$

esprime la variazione della sezione lungo il condotto in relazione alla variazione della velocità e del volume specifico.

Se $v = \text{cost}$ risulta che la sezione è inversamente proporzionale alla velocità.

Se il fluido è comprimibile si esprime $\frac{dw}{w}$ in base alla equazione delle forze vive

$$(12.10): \quad \frac{dw}{w} = \frac{v}{c^2} \frac{dw}{w} + \frac{v}{c^2} \frac{dw}{w} = \frac{v}{c^2} \frac{dw}{w} + \frac{v}{c^2} \frac{dw}{w}$$

$$(12.21) \quad \frac{dw}{w} = - \frac{v dp}{w^2}$$

e si esprime $\frac{dv}{v}$ in base alla legge delle isentropiche $p v^k = \text{cost.}$

$$\frac{dv}{v} = - \frac{dp}{k p}.$$

Sostituendo in (12.3) si ha:

$$\frac{dA}{A} = \frac{v dp}{w^2} \left(1 - \frac{w}{kpv} \right)$$

ossia:

$$(12.22) \quad \frac{dA}{A} = \frac{v dp}{w^2} (1 - M^2),$$

e, per la (12.21):

$$(12.23) \quad \frac{dA}{A} = - \frac{dw}{w} (1 - M^2).$$

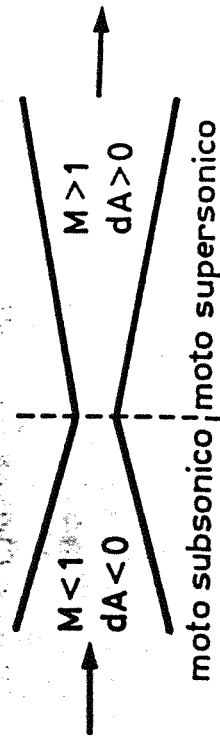
In base a queste due ultime equazioni si può concludere:

$$\text{Se } M < 1: \frac{dA}{d\rho} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{dA}{dw} < 0;$$

$$\text{se } M > 1: \frac{dA}{d\rho} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{dA}{dw} > 0$$

$$\text{se } M = 1: \frac{dA}{d\rho} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dA}{dw} = 0$$

ossia, se $dp < 0$: nel moto subsonico il condotto è convergente e la velocità va aumentando; nel moto supersonico il condotto è divergente e la velocità va aumentando. Per passare da moto subsonico a moto supersonico occorre attuare un convergente-divergente. Nella strozzatura si ha velocità sonica (fig. 12.6).



12.5 UGELLO DI DE LEVALTE

Le considerazioni del paragrafo precedente consentono di esaminare un problema di grande importanza pratica.

Un gas a pressione p_1 e temperatura T_1 è contenuto in un recipiente nel quale è praticato un foro di uscita come indicato nella figura 12.7. A valle del foro la pressione è p_2 .

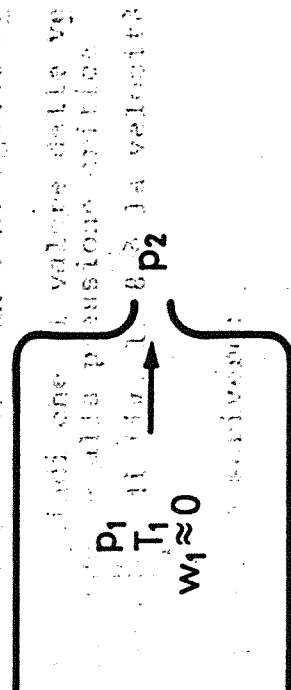


Fig. 12.7

Fra due sezioni immediatamente a monte del foro e in corrispondenza alla sezione di uscita si può scrivere per l'equazione delle forze vive (12.10):

$$(12.24) \quad \frac{dw^2}{2} = - \frac{v dp}{k}$$

immaginando il moto senza attrito, orizzontale e in assenza di un organo che scambi lavoro con l'esterno.

L'equazione (12.24) dice che tutto il lavoro delle forze di pressione si trasforma in energia cinetica del fluido.

Integrando fra le sezioni 1 e 2, tenendo conto della $p v k = \text{cost.}$ si ottiene:

al fine di ottenere
consentita dalla

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]$$

e, assunto $w_1 = 0$:

$$(12.25) \quad w_2 = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}.$$

Questo risultato è riportato nella fig. 12.8.
La linea continua rappresenta la equazione (12.25).

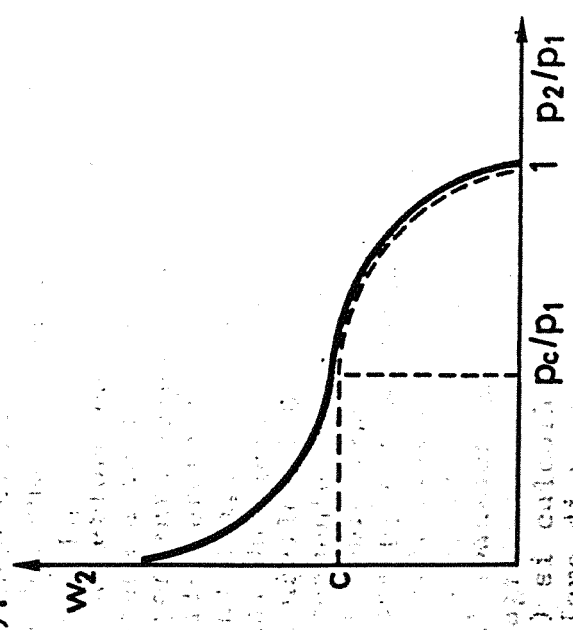


Fig. 12.8

La velocità cresce al diminuire del rapporto $\frac{p_2}{p_1}$ fra la pressione a valle e la pressione a monte. Per $p_2=0$ si ha

$$(12.26) \quad w_2 = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_1 v_1}.$$

La linea tratteggiata rappresenta la velocità che sperimentalmente si ottiene alla sezione di uscita con un ugello come indicato nella fig. 12.7. La velocità cresce al diminuire della pressione p_2 fino ad un certo punto come vuole la teoria, Ma per valori della pressione p_2 inferiori ad un certo valore, $p_2=p_c$ detta *pressione critica* la velocità alla sezione d'uscita non aumenta più.

Il risultato è in accordo con quanto detto al paragrafo precedente.

In un convergente si può ottenere al massimo la velocità del suono. Per passare a velocità supersoniche (se la pressione a valle lo consente) è necessario porre un convergente-divergente.

E' evidente quindi che il valore delle velocità corrispondente alla pressione critica p_c (al rapporto $\frac{p_c}{p_1}$ di fig. 12.8 è la velocità del suono.

Si può pertanto scrivere:

$$\sqrt{k p_c v_c} = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_c}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}$$

si riduce a

e dopo qualche passaggio, tenendo conto dell' $p_c v_c = p_1 v_1^k$ si arriva:

$$(12.27) \quad \frac{p_c}{p_1} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

(Si trova per es.: per $k=1,4$: $\frac{p_c}{p_1} = 0,528$;

per $k=1,33$: $\frac{p_c}{p_1} = 0,54$).

In conclusione:

valori al fine di ottenere la massima velocità consentita dalla differenza di pressione fra p_1 e p_2 , ossia al fine di trasformare completamente l'energia di pressione in energia cinetica dell'ugello:

a) se $p_2 > p_1 \cdot \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$ basta un semplice convergente:

b) se $p_2 < p_1 \cdot \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$ occorre un convergente seguito da un divergente.

Se, pur essendo $p_2 < p_c$, si pone il solo convergente si ha alla sezione di uscita la velocità del suono e nella sezione stessa la pressione p_c .

L'ulteriore caduta di pressione da p_c a p_2 avviene a valle della sezione d'uscita e il corrispondente aumento di velocità non è realizzabile perchè la corrente, non più guidata dal condotto, si disperde in fenomeni di turbolenza. Un ugello convergente-divergente si chiama ugello di De Laval e la sua applicazione è frequente nelle turbine a vapore.

Si abbia vapor acqueo surriscaldato a pressione p_1 e temperatura T_1 a monte dell'ugello (cfr. diagramma $h-s$ di fig. 12.9).

Sia p_2 la pressione a valle.

L'espansione isentropica è rappresentata nel diagramma dal segmento 12. In base alla (12.27) si calcola la pressione p_c . Se questa è maggiore di p_1 (come in figura) allora il segmento 1C rappresenta l'espansione nel convergente, il segmento C2 l'espansione del divergente e il punto C rappresenta le condizioni del vapore nella sezione ristretta.

Per il calcolo della velocità si può usare ovviamente la (12.25) ma più semplicemente si può fare ricorso all'equazione del primo principio:

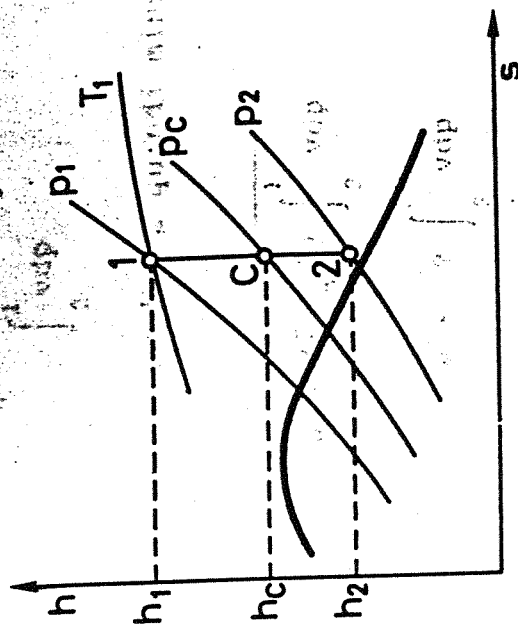


Fig. 12.9

che in questo caso si riduce a

$$dh + \frac{dw^2}{2} = 0$$

da cui integrando fra 1 e C:

$$(12.28) \quad w_c = \sqrt{2(h_1 - h_c)}$$

e integrando fra 1 e 2:

$$(12.29) \quad w_2 = \sqrt{2(h_1 - h_2)}$$

I valori delle entalpie si leggono facilmente nel diagramma.

Si possono leggere nel diagramma anche i

valori dei volumi specifici nei punti C e 2. Quindi se è nota la portata di massa del vapore, facilmente si ottengono la sezione ristretta (*sezione critica*) e la sezione di uscita dell'ugello:

$$A_c = \frac{\dot{m} v_c}{w_c}, \quad A = \frac{\dot{m} v_2}{w_2}.$$

La lunghezza dell'ugello, (parte divergente) non deve essere troppo grande, per evitare attrito nelle pareti, né troppo piccola per evitare distacco della vena. In genere si fissano coni con angolo di apertura di circa 7 gradi.

E' chiaro che il deflusso in un ugello di De Laval non può prescindere interamente da fenomeni di attrito. L'equazione di partenza

$$(12.24) \quad \frac{dw^2}{2} = - vdp$$

si modifica nella

$$(12.25) \quad \frac{dw^2}{2} = - vdp - dR.$$

Dell'intero lavoro delle forze di pressione

$$- \int_1^2 vdp$$

solo una parte si trasforma in energia cinetica del fluido, $\frac{w^2}{2}$, la parte rimanente essendo degradata in calore d'attrito. Si definisce allora un rendimento dell'ugello

La velocità di uscita è quindi minore di quella teorica

$$w = \sqrt{\eta} \cdot \sqrt{2 \int_1^2 vdp}$$

$$= \varphi \cdot 112 \sqrt{1 \int_1^2 vdp}$$

con $\varphi < 1$.

Se poi l'ugello opera in condizioni di pressione diversa da quelle di progetto il suo rendimento cala ulteriormente. Per pressioni a valle di quella prevista si generano nella parte terminale del divergente delle onde d'urto sulle quali qui non ci si può soffermare.

12.6 DEFLUSSO CON ATTRITO IN CONDOTTO A SEZIONE COSTANTE

Sia dato un condotto orizzontale nel quale non esistono organi di lavoro. L'equazione delle forze vive si riduce a

$$(12.30) \quad \frac{dw^2}{2} + vdp + dR = 0.$$

Il termine d'attrito dR si è espresso nella (12.10) in funzione dello sforzo unitario di attrito τ . Giova però, più praticamente e-

sprimerlo in funzione del coefficiente di attrito adimensionale ξ .

Si può esprimere R funzione di alcuni parametri

$$(12.31) \quad R = f(D, \lambda, w, \rho, \mu)$$

in cui λ è la lunghezza del tubo e μ la viscosità del fluido.

Con semplici considerazioni di analisi dimensionali si arriva ad esprimere:

$$(12.32) \quad R = \psi\left(\frac{wD\lambda}{\mu}\right) \cdot \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{w^2}{2}.$$

La funzione $\xi = \psi\left(\frac{wD\lambda}{\mu}\right)$ è appunto il coefficiente di attrito ed il gruppo $\frac{wD\lambda}{\mu}$ rappresenta il numero di Reynolds.

Nel campo dei numeri di Reynolds inferiori a 3000 (regime laminare) ove l'attrito è tutto dovuto alla viscosità, il coefficiente ξ si può esattamente determinare:

$$(12.33) \quad \xi = \frac{64}{Re}.$$

Nel campo dei numeri di Reynolds superiori a 3000 (regime turbolento), ove l'attrito è anche dovuto a fenomeni di turbolenza, il coefficiente ξ si esprime mediante formule semi-empiriche del tipo monomio:

$$\xi = a + \frac{b}{Re^m}$$

o binomio:

$$\xi = \frac{b}{Re^m}$$

con $0,2 < m < 0,35$.
Era le più note, si ricordano: i dati al cal.

$$\xi = \frac{0,010,182}{Re^{0,2}}, \text{ per i più comuni condotti}$$

$$\xi = \frac{0,3164}{Re^{0,25}} \text{ (Blasius)}$$

Si ricorda che nella tecnica il più delle volte si realizza moto turbolento e il coefficiente di attrito è pertanto compreso fra 0,01 e 0,03 (fig. 12.10).

Ritornando alla equazione (12.30), essa si può esprimere in termini finiti,

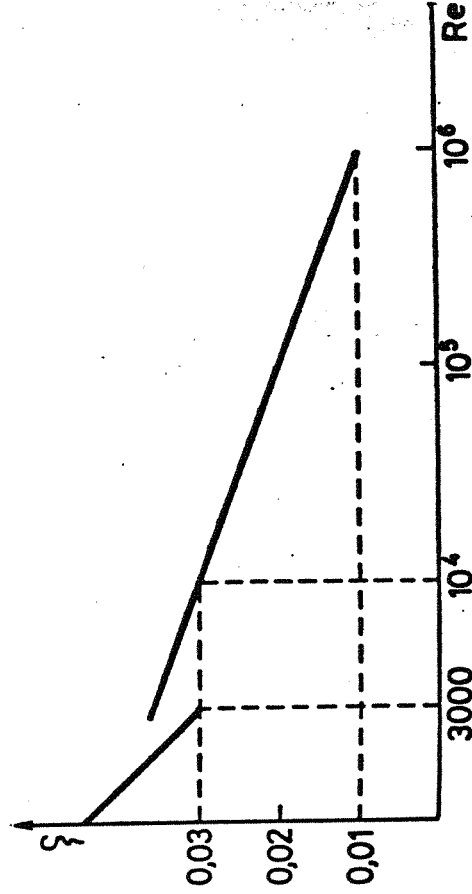


Fig. 12.10

$$(12.35) \quad \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \int_1^2 v dp + \xi \frac{\lambda}{D} \frac{w^2}{2} = 0,$$

essendo w_m velocità media nel tratto calcolato. La soluzione della (12.35) non può essere fatta che per approssimazioni successive.

Ben più semplice si presenta il caso, di generale applicazione, in cui il volume specifico si possa considerare costante e quindi $w_2=w_1$. In questo caso

$$v(p_1-p_2) = \xi \frac{l}{D} \frac{w^2}{2}$$

ossia

$$(12.36) \quad p_1-p_2 = \xi \frac{l}{D} \rho \frac{w^2}{2}$$

quest'ultima essendo, fra tutte, la formula di maggior utilità nella tecnica.

Si faccia attenzione che essendo

$$w = \frac{\dot{m}}{A \cdot \rho} = \frac{\dot{m}}{\pi \frac{D^2}{4} \cdot \rho}$$

la (12.36) si scrive:

$$p_1-p_2 = \xi \cdot l \cdot \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{\rho} \frac{\dot{m}^2}{5}$$

e, ponendo $B = \xi \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\rho}$:

$$(12.37) \quad \frac{p_1-p_2}{l} = B \cdot \frac{\dot{m}^2}{D^5}$$

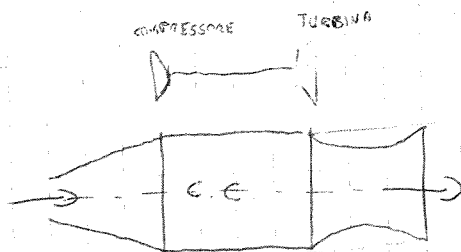
Avendo di più, la caduta di pressione in un tubo di

zionale alla quinta potenza del diametro. Si trovano diagrammi e abachi atti al calcolo rapido della (12.37) per i più comuni casi teorici (tubazioni per acqua, condotti per aria, ecc.).

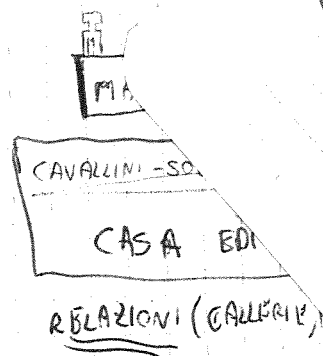
CAS



ENDOREATTORE



STATOREATTORE



RELAZIONI (GALLERIE)

3 fluidi non si possono considerare incompressibili xche le velocità sono molto alte

1) Monodimensionale

Fluidi: non offre resistenza alle tensioni tangenziali

$$KNUDSEN = \frac{l}{L} \rightarrow \begin{matrix} l \rightarrow \text{lunghezza del cammino libero} \\ L \rightarrow \text{lunghezza di riferimento} \end{matrix}$$

se $\frac{l}{L} < 0,01$ è possibile una trattazione meccanica alternante

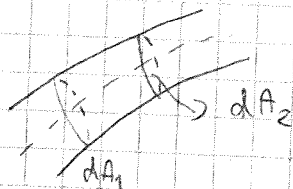
invece per la dinamica dei gas rarefatti.

Sono fino a 740 m/s si può considerare incompressibile.

A sono 4 equazioni: conservazione della massa, della quantità di moto, dell'energia

e l'equazione $\frac{P}{\rho} = RT$

$$R = \frac{Q}{PM}$$



fluido stazionario, corrente monodimensionale

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt}$$

$$\dot{m} = \rho_1 \bar{V}_1 A_1 = \rho_2 \bar{V}_2 A_2 = \text{cost.}$$

velocità media

area trasversale

Portata di massa

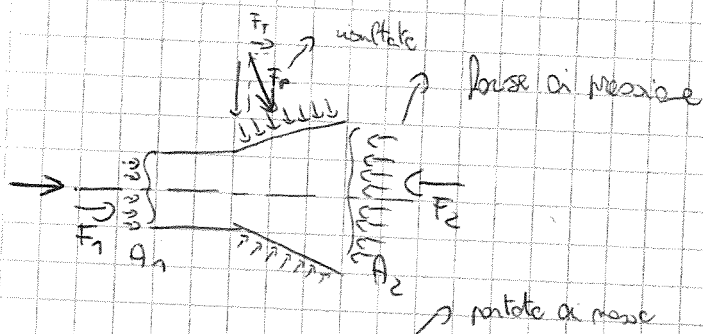
$$\frac{ds}{s} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0$$

$$\frac{p}{s} = RT$$

$$\frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} - \frac{dT}{T} = 0$$

$$\frac{dp}{s} = \frac{ds}{s} + \frac{dT}{T}$$

Valore a stella: valore critico fissato nella massa ed determinato da una superficie più o meno infinitesima o di spessore finito.



$$F_1 + F_3 - F_2 = \rho (V_2 - V_1)$$

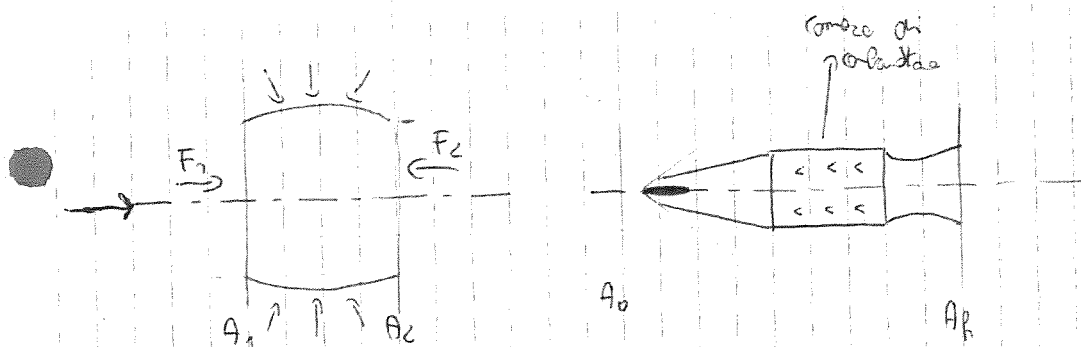
$$p_1 A_1 - p_2 A_2 + F_3 = \rho_2 A_2 V_2^2 - \rho_1 A_1 V_1^2$$

$$\propto A_1 = A_2$$

Equazione della portata di massa

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2$$

$$\cancel{p_2 A_2 - p_1 A_1} - p_1 A_1 + p_2 A_1 + p_2 A_2 - p_1 A_1 = \rho_2 (V_2 - V_1)$$



$$F_x = P_1 A_1 + P_2 A_2 + F_i$$

$$= \dot{G}' (V_2 - V_1)$$

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}$$

$$\Rightarrow P_1 A_1 + P_2 A_2 + F_i = \dot{G}' (V_2 - V_1)$$

$$F_i = P_i A_i$$

$$F_i = \dot{G}' (V_2 - V_1) + P_2 A_2 - P_1 A_1$$

questo è definito spinta interna
 $\rightarrow$ velocità a afflusso

$\dot{G}'$ sarà la portata d'aria ma la portata di combustibile

$$\text{cioè } \dot{G}'_A (V_A + V_0) + \dot{G}'_C V_C$$

$\downarrow V_0 = 0$ cioè c'è la portata d'aria

$$\Rightarrow F_i = \dot{G}'_A (V_A + V_0) + \dot{G}'_C V_C + P_2 A_2 - P_1 A_1$$

$\rightarrow$ Densità

$$F_i = D_2 - D_1$$

$$D = \rho A + \dot{G}' V$$

Adesso stiamo vedendo solo quello che accade internamente ma ci sono anche forze esterne



$$F_m = F_i + F_e$$

F_e è la forza di reazione delle pareti

$$F_e = P_A (A_P - A_1) + - P_A (A_P - A_2)$$

è la forza di reazione esterna

$$F_m^{\text{utile}} = G_A'(V_g - V_o) - \underbrace{G_C' V_g}_{\text{si può togliere}} + A_2(P_2 - P_1)$$

perché fare in modo che $P_2 = P_1$

annullare la
della cui

$$\Rightarrow F_m = G_A'(V_g - V_o) \quad \text{Nelle altre si calcola il denominatore la } G_A' \text{ mentre nei turboreattori la } \Delta V \text{ (+ combustibile)}$$

Potenza propulsiva utile di un motore

$$P = F_m \cdot V_R$$

$$= G_A'(V_g - V_o) V_o \quad \rightarrow \text{velocità } \times \text{propulsione o attraversamento}$$

$$\Rightarrow \eta_p = \frac{P_{\text{ut}}}{P_{\text{tot}}} = \frac{P_{\text{ut}}}{P_{\text{ut}} + \frac{1}{2} G_A'(V_g - V_o)^2}$$

rendimento propulsivo

è la parte energetica

EAS

7/3/85

$$F = \underbrace{G_A'(V_g - V_o)}_{\text{contributo dinamico}} + \underbrace{A_2(P_2 - P_1)}_{\text{contributo statico}}$$

$$\eta_p = \frac{G_A'(V_g - V_o) \cdot V_o}{G_A'(V_g - V_o) \cdot V_o + \frac{1}{2} G_A'(V_g - V_o)^2}$$

$$= \frac{2V_o}{V_o + V_g}$$

$$\frac{V_o}{V_g} = V \quad \rightarrow \text{rapporto a un sommatore}$$

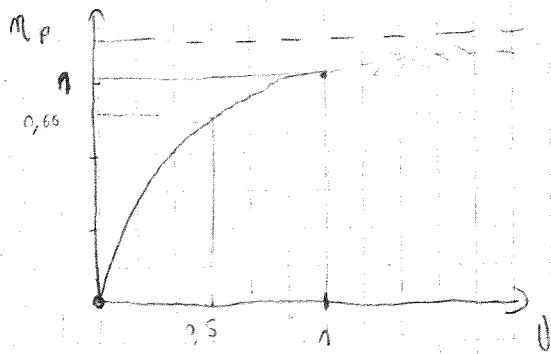
↓
velocità del getto

$$\Rightarrow \eta_p = \frac{2V}{1+V}$$

$$G_A'(V_g - V_o) + G_C' V_g + P_1 A_1 - P_2 A_2$$

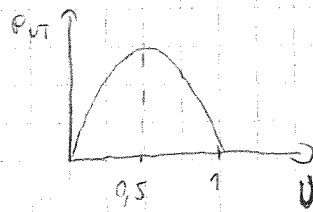
$$= P_1 A_1 + P_2 A_2 - P_1 A_1 - P_2 A_2$$

A_p



$\times U=1$ lo $P_{UT}=0$

Ma la stessa parabola $\times U > 1$



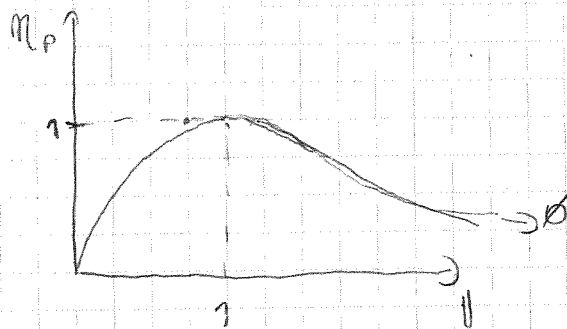
Se $U \approx 1$ ($\Rightarrow$ alto coefficiente propulsivo) $\Rightarrow$ meno consumi specifici
(velocità del getto $\approx$ velocità di volo)

Se $U \approx 0,5 \Rightarrow$ consumi aumentano per le massime potenze disponibili

$\Rightarrow \begin{cases} \times \text{trasporto aereo dove } U \approx 1 \\ \times \text{veicoli militari (picchi virgoli, MAX potenza)} \quad U \approx 0,5 \end{cases}$

$$\eta_P = \frac{C_A V_g V_0}{C_A V_g V_0 + \frac{1}{2} C_R (V_g - V_0)^2} \quad (\text{vale } \times \text{ EUDOREATTORI}) \quad \text{il denominatore ce la portiamo sotto}$$

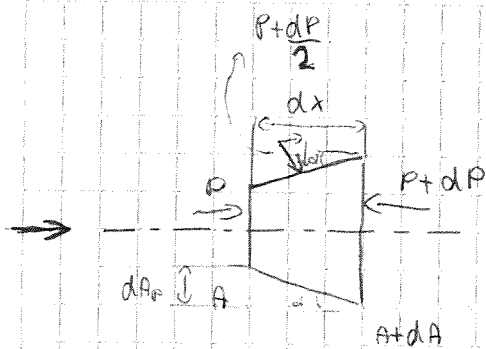
$$= \frac{2 V_g V_0}{V_g^2 + V_0^2} = \frac{2U}{1+U^2}$$



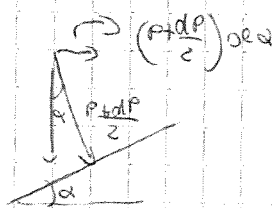
Se $U=1 \Rightarrow$ tutta l'energia fornita viene trasformata in moto

3. posto $\text{se } m \neq 0 \Rightarrow U > 1$ ($V_0 > V_g$)

Se nasce quella parte staccata fuori da $\eta_P \approx 0 \Rightarrow$ consumi molto grandi soprattutto nella partenza (ecco i cili + scrobati che si staccano). Non nasce che la velocità cresce tanto oltre il regime $\Rightarrow$ consumi bassi.



Bravura la forsa de greutate pe
sectiune elementare



$$F_x = pA - (p+dp)(A+dA) + \left(p + \frac{dp}{2}\right) dA + F_{att} + F_{res. int.}$$

$$F_x = \text{volume} \times g \times \text{acceleratie}$$

$$= (A + \frac{dA}{2}) dx g \frac{dV}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

$$\text{moto stationara} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} V$$

$$\Rightarrow A g V dV = \cancel{pA} - \cancel{pA} - d p dA - A dp + \cancel{p dA} + \frac{dp dA}{2} + F_{att} + F_r$$

$$\Rightarrow A dp + A g V dV - F_A - F_r = 0 \quad \text{anularea ge. infinitesim al nume. suprafete}$$

$$\boxed{dp + g V dV - \frac{F_A}{A} - \frac{F_r}{A} = 0}$$

$$\text{Se } F_A = F_r = 0$$

$$\boxed{dp + g V dV = 0}$$

Ecuatie a lui Euler

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} = \text{const} \quad (\text{Bernoulli}) \quad g = \text{const.}$$

Se la transformarea e adiabatic

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const} \quad k = \frac{C_p}{C_v}$$

$$dp = k p g^{-1} ds$$

$$= k \text{const} s^{k-1} ds$$

$$p = \text{const} s^k$$

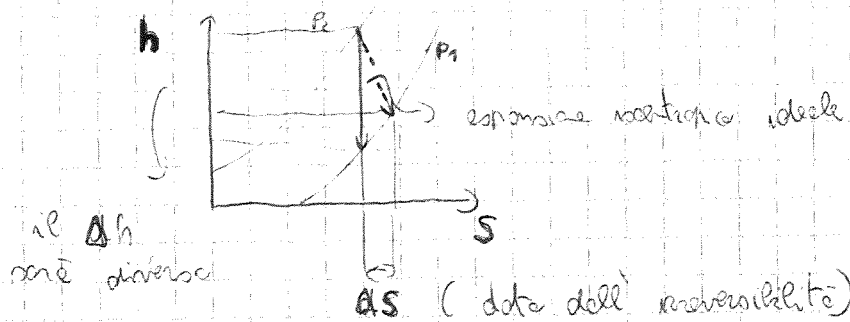
$$\Rightarrow k \text{const} s^{k-1} \frac{ds}{s} + V dV = 0$$

$$\Rightarrow \frac{k \text{const} s^{k-2+1}}{k-1} + \frac{V^2}{2} = \text{const}$$

$$\Rightarrow k \text{const} s^{k-2} ds + V dV = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const}} \quad \text{X plusa adiabatic}$$

$$Q-L = \Delta U + \frac{P_1}{S_1} - \frac{P_2}{S_2} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} \quad (I^\circ \text{ principio})$$



$\Rightarrow$ dato che $h = c_p \Delta T$ si vede che l'irreversibilità porta ad un temperatura maggiore.

Se la trasmessa del suono è determinata dalle proprietà di onde in mezzo, la velocità in parte onde è determinata dalle proprietà elastiche del solido.

$$dV = -\frac{1}{E} V dP \quad ds = \frac{1}{E} S dP$$

volume specifico

Dato che $V = h(P)$

$\propto E$

$$\Rightarrow E_T = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T$$

$$E_S = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_S$$

onde va moduli

$$E \propto 10^5 \text{ Pas}$$

$\downarrow$ x fluido

$$PV = \text{cost}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = 0$$

$$\Rightarrow E_T = -V \left(-\frac{P}{V} \right) = P$$

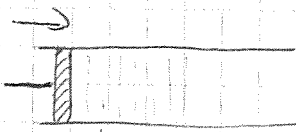
$$PV^k = \text{cost}$$

$$\frac{dP}{P} + k \frac{dV}{V} = 0$$

$$\Rightarrow E_S = -V \left(-k \frac{P}{V} \right) = kP$$

↳ velocità del suono = velocità di propagazione di una onda infinitesima di pressione.

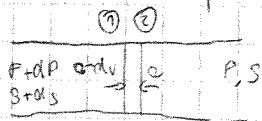
impulso (dv)



$$\begin{aligned} P &\rightarrow P+dP \\ T &\rightarrow T+dT \\ S &\rightarrow S+dS \end{aligned}$$

a massa compressibile

↳ spostare solidale con il fluido



↳ $S^A e$ velocità dell'onda

$$A [P - (P + dP)] = \rho_g' [(e - dv) - e]$$

$$\boxed{dP = \rho_g dv}$$

$$S \cdot e \cdot A = \rho_g t = (S + dS)(e - dv) A$$

$$\Rightarrow dS = \frac{\rho_g dv}{e}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\rho_g e}{dv}$$

$$\rightarrow dP = dS \rho_g^2$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \sqrt{\frac{dP}{dS}}} \quad \text{Velocità del suono}$$

$$c = \sqrt{\frac{dP}{dS}}_{S=cT} \quad \text{meglio con (x di costante variabile)}$$

$$= \sqrt{\frac{E_s}{S}} = \sqrt{\frac{kP}{S}} = \sqrt{kRT}$$

$$\sqrt{kRT} = c_{VT}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \sqrt{kRT}}$$

↳ velocità
del fluido in pace



Vel. vel. $a \approx 5000 \text{ m/s}$

$$\frac{V}{a} = M \quad (\text{numero di Mach})$$

$\Rightarrow$ se $M < 1$ flussi subsonici

$M = 1$ " sonici

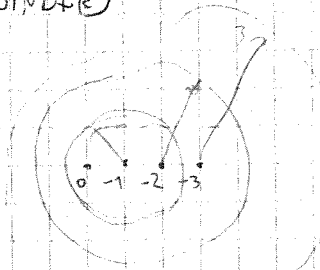
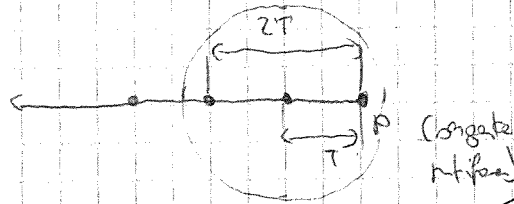
$M > 1$ " ipersonici

Per $M \approx 1$ si è tutta in zone di transizione detta transonica

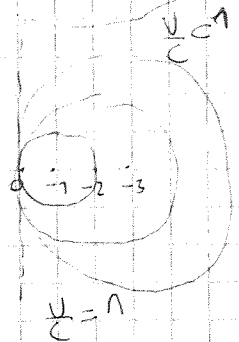
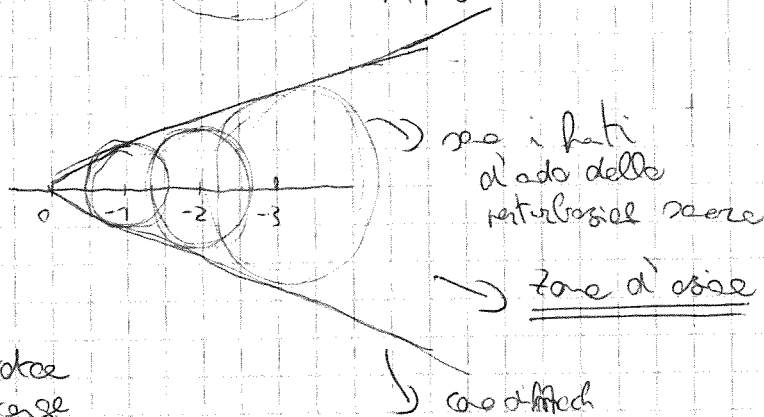
se $M > 5$ ipersonica

La velocità critica è la più bassa velocità a cui una perturbazione di compressione può reggere nel fluido (analoga a BLINDEF)

se $V < a$



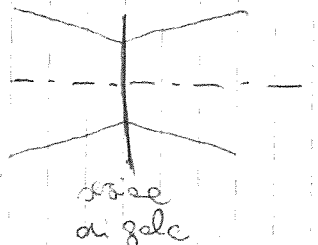
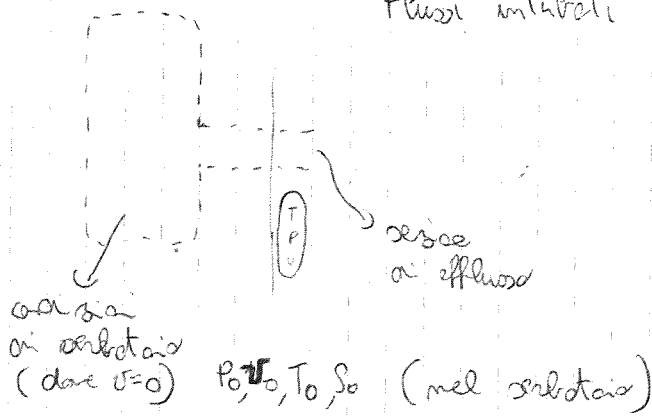
se $V > a$



in un osservatore
non si osserva
della perturbazione
(zona del silenzio)

se $V = a$ le zone di Mach si trasformano in un piano

Flussi intubati



Se c'è una resaca
dove $\eta=1 \Rightarrow$ quella
resaca non detta critica

$$\Delta h = \frac{k}{k-1} R(T-T_0)$$

$\rightarrow C_p$

Se il flusso è isentropico

$$\Delta h + V dv = 0$$

$$\Rightarrow \frac{k}{k-1} R \frac{dT}{T} + V dv = 0$$

$$\frac{1}{k R T}$$

$$\frac{1}{k-1} \frac{dT}{T} + \frac{V dv}{k R T} = 0$$

$$\frac{k C_p}{C_v}$$

$$\eta = \frac{\eta+1}{\eta}$$

$$\boxed{\frac{1}{k-1} \frac{dT}{T} + \frac{V^2}{2} = 0}$$

Se integrasse tra il subsonic e un suo punto

$$\frac{k}{k-1} R T_0 + \frac{V^2}{2} = \frac{k}{k-1} R T_0$$

$$\frac{V^2}{2} + \frac{V_0^2}{2} = \frac{V_0^2}{2}$$

3. In processo isentropico la velocità massima nel subsonic $\Rightarrow$ che
in qualche resaca di effluvio ($\Rightarrow T_0 \bar{v} > a$ ogni T in ogni subsonic)
 $\Rightarrow$ la velocità la massima media che porta dell'angolo specifico all
moto, $\Rightarrow$ anche la T non è un parametro.

$$\Rightarrow x T \rightarrow 0 \quad V \rightarrow \max$$

$\Rightarrow$ data velocità non detta velocità max isotropica

$$\boxed{V_{\max}^2 = \frac{2}{k-1} Q_0^2}$$

(è un valore limite che si avvicina il gas
che allo zero assoluto)

$$a_0 = \sqrt{kRT_0}$$

Velocità massima isentropica (adiabatica reversibile)

$$V_{MAX} = a_0 \sqrt{\frac{k}{k-1}}$$

3C. flude $\Rightarrow$ da una velocità nulla (nel serbatoio) raggiungere la velocità del suono, contemporaneamente la T diminuisce. 3C. punto nel quale la velocità locale e la velocità acustica coincidono ($M=1$), sarà dove le condizioni vengono dette critiche ($V^* = a^*$)

se uguali nelle condizioni critiche

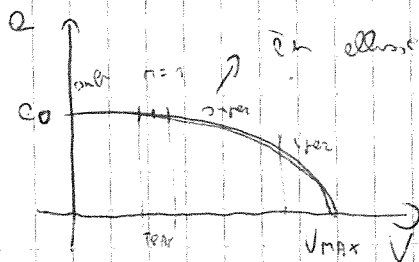
$$\frac{k}{k-1} RT + \frac{V^2}{2} = \frac{k}{k-1} RT_0$$

$$\frac{a^{*2}}{k-1} + \frac{V^{*2}}{2} = \frac{a_0^2}{k-1}$$

$$a^{*2} = \frac{2a_0^2}{k+1}$$

velocità critica (acustica)

$$\Rightarrow a^* = a_0 \sqrt{\frac{2}{k+1}}$$



locale

$$M = \frac{V}{a}$$

è funzione anche della T

$$\bar{M} = \frac{V}{a^*} = R(V)$$

velocità acustica critica è ben definita dalle condizioni iniziali

$$\left(\frac{\rho}{\rho^*}\right)^k = \left(\frac{a}{a^*}\right)^k$$

$$\frac{a^2}{k-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_0^2}{k-1}$$

$$V_{MAX}^2 = \frac{2}{k-1} a_0^2$$

$$a^{*2} = \frac{k-1}{k+1} V_{MAX}^2$$

$$\Rightarrow \frac{k-1}{k-1} \frac{V_{MAX}^2}{2} \rightarrow a^2 = \frac{k+1}{2} V_{MAX}^2 - \frac{k-1}{2} V^2$$

$$\Rightarrow = \frac{\frac{k-1}{2} V_{MAX}^2}{\frac{k-1}{k+1} V_{MAX}^2} - \frac{\frac{k-1}{2} V^2}{\frac{k-1}{k+1} V_{MAX}^2} = \frac{k+1}{2} - \frac{k+1}{2} \frac{V^2}{V_{MAX}^2}$$

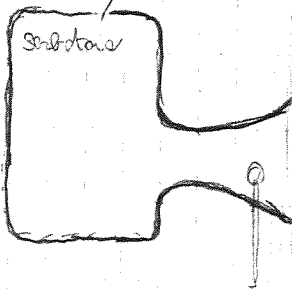
$$\Rightarrow \frac{\bar{m}^2}{n} = \frac{k+1}{2} - \frac{k-1}{2} \bar{m}^2$$

$$\bar{m}^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} n^2 \right) = \frac{k+1}{2} m^2$$

$$\bar{m}^2 = \frac{\frac{k+1}{2} m^2}{1 + \frac{k-1}{2} n^2}$$

$$m^2 = \frac{\bar{m}^2}{\frac{k+1}{2} - \frac{k-1}{2} \bar{m}^2}$$

è solo energia termica



temperatura che nel d'ordine avere il gas se fosse portato a quella velocità con $h=ct(??)$ (ciò corrisponde)

$$\Rightarrow T_{\text{risi}} \equiv T_0 = T_{\text{tot}} \text{ (temperatura totale)}$$

se mettessi per un termometro una misurazione la temperatura d'ordine (quella statica + quella data dall'ordine delle particelle) si misura

$$c_p T + \frac{V^2}{2} = c_p T_0 = h_0$$

$\Rightarrow$ relazione tra T e m

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2 c_p}$$

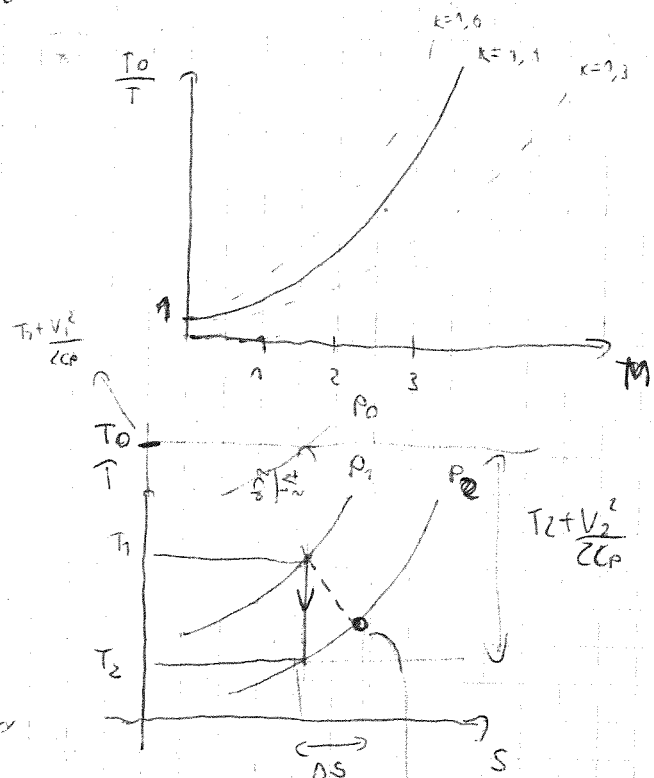
$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{V^2}{2 c_p T} = 1 + \frac{k-1}{2} m^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} m^2}$$

grafico dell'espansione dell'aria

no

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} m_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} m_2^2}$$



un gesto così le velocità finali saranno inferiori della velocità che ci vorrebbe in condizioni ideali (ci vorrebbe che vada anche la P_{tot} ma NON la $T_{\text{tot}}(T_0)$)

Se temperatura totale P_c si può intendere che T che avrebbe il gas delle condizioni iniziali ($V=0$) con un'espansione adiabatica reversibile.

Si intende totale che valore resterebbe nel moto isentropico e anche nel moto ~~isotermo~~ ma isentropico ~~non~~. Però solo nel moto isentropico la pressione totale rimane costante lungo il flusso.

Dato che $\frac{P_c}{P} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{k-1}{k}}$

$$\Rightarrow \frac{P_{TOT}}{P} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{S_0}{S} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

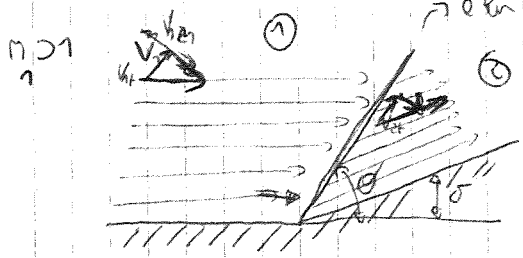
$$= \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

CAS

14/3/85

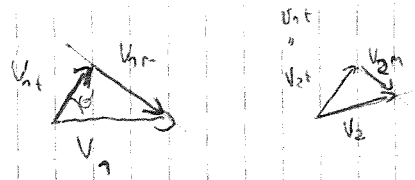
MANFA

onde di Mach; onde deboli (compressione e espansione), onde d'urto
 Ma possono trascurare le onde deboli, ma non le onde d'urto o compressione
 → onde d'urto (oblique)



$$V_{2t} = V_{1t}$$

si trova sperimentalmente



$M_1, P_1 \Rightarrow$ conosce tutto e parte del fronte d'onda
 T_1 me dopo? $\Rightarrow$ le debbes trovare
 V_1

$$V_2^2 = V_{2n}^2 + V_{2t}^2$$

1) Equazione a densità $\boxed{S_1 V_{1n} = S_2 V_{2n}}$ $\Rightarrow$ onde che si muove

2) " Energie $\frac{k}{k-1} R \rho T + \int V dV = 0$
 $\frac{k}{k-1} R (T_1 - T_2) + \frac{1}{2} (V_1^2 - V_2^2) = 0$

$$R T_1 = \frac{P_1}{S_1}$$

$$V_1^2 = V_{1n}^2 + V_{1t}^2$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \frac{V_{1n}^2 + V_{1t}^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{P_1}{S_1} = \rho_1^{\frac{k+1}{2}} \frac{k+1}{2}$$

$$\textcircled{2} \left[\frac{V_{2n}^2 + V_{2t}^2}{2} + \frac{k}{k-1} \frac{P_2}{S_2} = \rho_2^{\frac{k+1}{2}} \frac{k+1}{2} \right]$$

Onde che avviene se oblique
 ma grazie a T totale $\Rightarrow$ onde
 tutte le onde

$$P_1 + S_1 V_1^2 = P_2 + S_2 V_2^2 \quad \text{Eulero}$$

$$\frac{P_1}{S_1 V_1} + V_1 = \frac{P_2}{S_2 V_2} + V_2 \quad \text{Sempre } V_2 \text{ (m)}$$

$$\frac{k}{k-1} \frac{P_1}{S_1} \frac{1}{V_1} + \frac{k}{k-1} V_1 = \frac{k}{k-1} \frac{P_2}{S_2} \frac{1}{V_2} + \frac{k}{k-1} V_2$$

$$\frac{k}{k-1} \frac{V_1}{S_1} = -\frac{V_1^2 + V_2^2}{2} + c^{*2} \frac{k+1}{2(k-1)}$$

$$\frac{V_1^2 + V_2^2}{2 V_{m1}} - \frac{c^{*2}}{V_{m1}} \frac{1}{2} \frac{k+1}{k-1} - V_{m1} \frac{k}{k-1} = 2 V_{m1} V_{m2}$$

$$\frac{V_1^2 + V_2^2}{2 V_{m2}} - \frac{c^{*2}}{V_{m2}} \frac{1}{2} \frac{k+1}{k-1} - V_{m2} \frac{k}{k-1}$$



$$\frac{2 V_{m1} V_{m2} + 2 V_{m2}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{m1} V_{m2} = c^{*2} - \frac{k-1}{k+1} V_t^2 \quad \text{Routine}$$

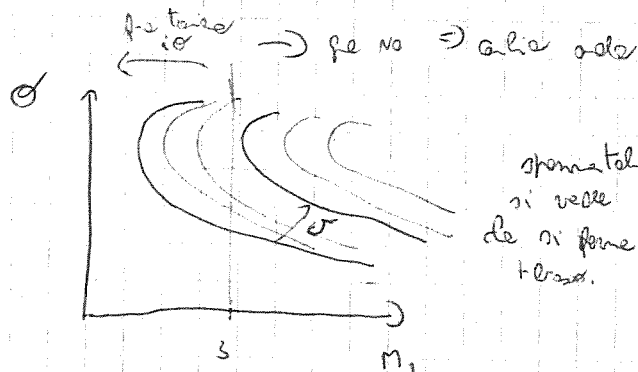
$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{P_2}{P_1} + 1}{\frac{k+1}{k-1} + \frac{P_2}{P_1}}$$

e lo stesso x le pressioni e le temperature

$$\tan \theta = \frac{V_{1r}}{V_{1t}}$$

$$\tan(\theta - \sigma) = \frac{V_{2r}}{V_{2t}}$$

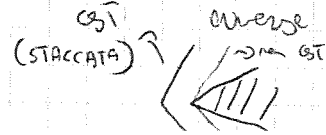
$$\frac{\tan \theta}{\tan(\theta - \sigma)} = \frac{V_{m1}}{V_{m2}}$$



spontaneamente
si vede che l'angolo
de si pone una bella
terza.

Si vede che si vede nelle pressioni.
(con tutto: vederli)

si vede che x oggi
nuovo o mach si tiene di MAX
x le poli le cose non operano
avere



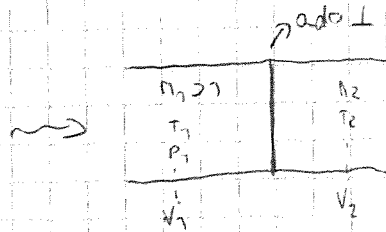
17/3/85

C.A.S.

velocità del
gas nelle sezioni critiche

$$V_{m1} V_{m2} = a^{*2} - \frac{k-1}{k+1} V_t^2$$

Se si conosce davanti ad un'onda d'urto normale un'altra
velocità



velocità onda d'urto normale

Dalla relazione (1) si vede che $V_1 V_2 = a^{*2}$ Xella la componente tangenziale
è nulla $\Rightarrow \bar{M}_1 \bar{M}_2 = 1$ e $\bar{M} = \frac{V}{a^*}$

$\Rightarrow$ si vede che $M_2 < 1$ SEMPRE

$\Rightarrow$ un'onda d'urto normale porta il fluido da de supersonico a subsonico.

Altre trovate una relazione tra M_1 e M_2
ovvero debbono trovare M_1 e M_2

$$\bar{M}^2 = \frac{k+1}{2} \left[\frac{M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right]$$

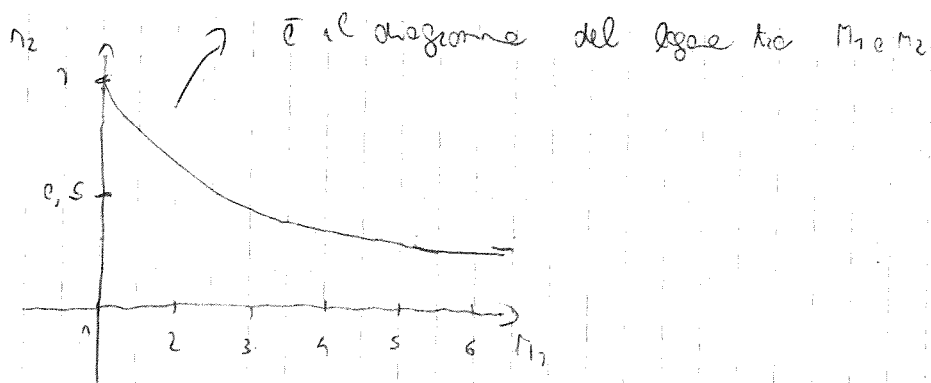
$$\frac{k+1}{2} \left(\frac{M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right) \left(\frac{k+1}{2} \frac{M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right) = 1$$

$$M_2^2 = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{\frac{k+1}{2} M_1^2} \right) \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{\frac{k+1}{2}} \right) = \text{ma non si può risolvere}$$

$$M_2^2 \left[1 - \frac{k-1}{2} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{\frac{k+1}{2} M_1^2} \right) \right] = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{\left(\frac{k+1}{2} \right) M_1^2}$$

$$\Rightarrow M_2^2 = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right) \cdot \left[\frac{1}{\left(\frac{k+1}{2} \right)^2 M_1^2 - \frac{k-1}{2} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)} \right]$$

$$= \frac{M_1^2 + \frac{2}{k-1}}{M_1^2 \left[\frac{2k}{k-1} \right] - 1} = M_2^2$$



Se T_{01} è la temperatura totale iniziale dell'aria T_{02} dopo

$T_{01} = T_{02}$ la temperatura totale rimane costante

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \quad M_2^2 = h(M_1^2) \text{ oppure } T_{01} = T_{02}$$

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$$

$$1 + \frac{\rho_1 V_1^2}{P_1} = \frac{P_2}{P_1} + \frac{\rho_2 V_2^2}{P_1} \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{1 + \frac{\rho_2 V_2^2}{P_1}}$$

$$1 + k M_1^2 = \frac{P_2}{P_1} \left[1 + k M_2^2 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + k M_1^2}{1 + k M_2^2} \quad \text{cioè } P_{01} = P_{02}$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{k+1}{2} \left[\frac{M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \right]$$

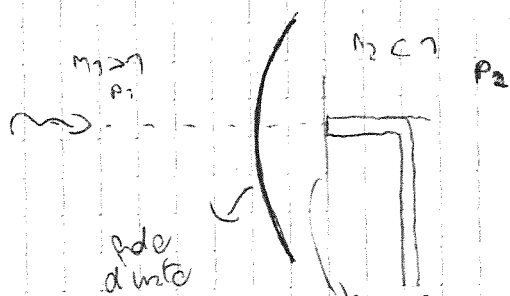
Adesso ~~però~~ per il rapporto tra le P_{tot}

$$\textcircled{2} \quad \frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_{02}}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_1}{P_{01}} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

$\downarrow$
 $1 + \frac{k-1}{2} M_2^2$

3 diagrammi su tutto (memorabili)

Se dicesse in A flusso supersonico che pressione e massa le k?



Se leggiamo la $P_{TOT2} \Rightarrow$ dopo l'onda d'urto

$\Rightarrow$ noi misuriamo la P_{02} però con la formula torricelli
 b. $P_{01} \Rightarrow P_1 \Rightarrow$ dunque anche in posto (x varie altre zone di sede)

$$\frac{P_{02}}{P_1} = \left[\frac{\left(M_1^2 \frac{k+1}{2} \right)^k}{\frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}} \right]^{\frac{1}{k-1}}$$

CAS

21/3/35

Ma considero una meta isentropica $\Rightarrow$ reversibile (adiabatica).

$\rightarrow$ portata di massa

$$\dot{G} = SVA = \text{cost.}$$

$\Downarrow$

$$\textcircled{1} \quad \frac{dS}{S} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0 \quad \text{se il fluido è incomprimibile} \quad \frac{dV}{V} = -\frac{dA}{A}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{S} + V dV &= 0 & \text{Eulero} \\ \frac{1}{S} &= -V \frac{dV}{dP} \end{aligned}$$

$$V dV = -\frac{dP}{S} = -\frac{dP}{dS} \frac{dS}{S} = -\left(\frac{dP}{dS} \right)_S \frac{dS}{S}$$

$$\textcircled{2} \quad -\frac{V^2 dV dS}{V dP} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0$$

$\downarrow$
 $\frac{dP}{dS} = a^2$ x che col. rev.

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dP}{S a^2} [M^2 - 1] \quad \text{altre relazioni}$$

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dS}{S} \left[\frac{M^2 - 1}{M^2} \right]$$

$$\Rightarrow -M^2 \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0$$

$$\boxed{\frac{dA}{A} = \frac{dV}{V} [M^2 - 1]} \quad \boxed{\text{HUGONIOT}}$$

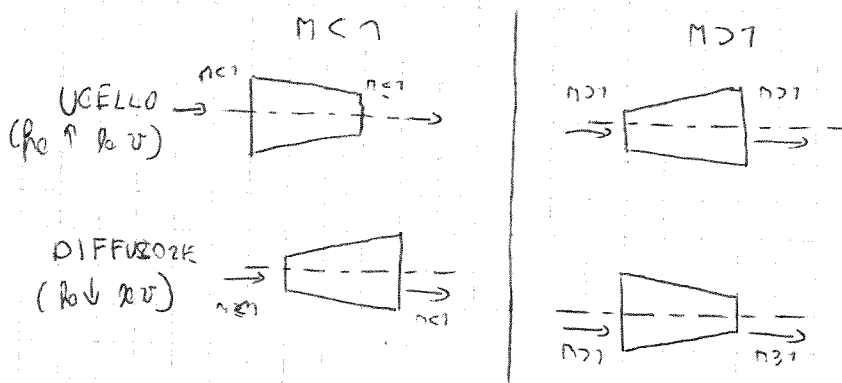
$\rightarrow$ A mi interessa il getto

$$\Rightarrow \alpha \quad M < 1 \quad \text{se si ha } m \begin{cases} dA > 0 \\ dA < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dV < 0 \\ dV > 0 \end{cases}$$

$$\alpha \quad M > 1 \Rightarrow \begin{cases} dA > 0 & dV > 0 \\ dA < 0 & dV < 0 \end{cases}$$

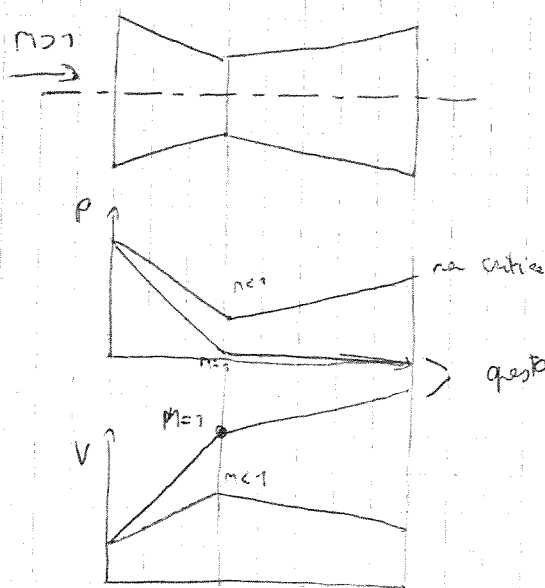
$\Rightarrow$ Effusore o ugello in condotto che permette di ottenere un aumento di velocità α ne diminuisce α p

Diffusore in condotto attraverso il quale il fluido viene accelerato α recupero di pressione.



Si ha $M=1$ ~~se~~ $\Rightarrow$ nelle sezioni α area minima $\frac{dA}{A} = 0$
 Se ne è detto che se il condotto ha α area minima in esso
 ne è detto che sia dove $M=1$

Il passaggio da subsonico
 α supersonico solo nelle sezioni
 minime



$\Rightarrow$ questo solo se riesce a passare α supersonico α alternati
 anche la p α diminuisce α V .

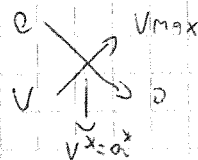
XX

$$\frac{a^2}{k-1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_0^2}{k-1}$$

de è l'aria dell'aria pesante del fluido
Equazione dell'energia

$$V \rightarrow V_{max} \quad (\text{dove } T=0)$$

$$a_0 \rightarrow 0 = \sqrt{\frac{2}{k-1}} a_0$$



$\Rightarrow$ in un punto critico dove la velocità del suono locale $\bar{a}$ è uguale alla velocità del fluido ($V^* = a^*$)

$$V^* = a^* = \sqrt{\frac{2}{k-1}} a_0 \quad \Rightarrow \text{invece che tutta si usa alle accelerazioni (alla } T_0)$$

$$a^* = \sqrt{kRT^*}$$

$$T^* = \frac{a^{*2}}{kR}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$$

$$\frac{T_0}{T^*} = \frac{k+1}{2}$$

$\rightarrow$ cioè $M=1$
che è appunto la condizione.

$$\frac{T^*}{T} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}}$$

Se stato critico $\bar{a}$ dove $M=1$ può essere raggiunta una trasformazione isentropica.

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{s^*}{s} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

T^*, s^*, p^* hanno valore costante

Se ma $\bar{a}$ è reversibile rimane costante solo la T^*

Si possono trovare anche i rapporti $\frac{T^*}{T_0}, \frac{p^*}{p_0}, \frac{s^*}{s_0}$

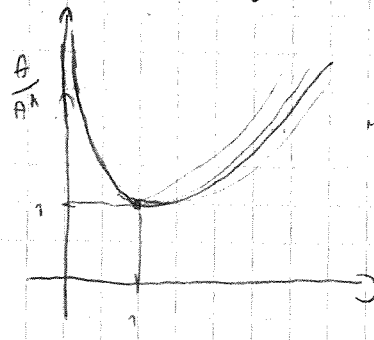
$$G' = \dot{S} A V = \dot{S} A M \sqrt{kRT}$$

$$= \frac{\dot{P}}{RT} A M \sqrt{kRT} = \dot{P} A M \sqrt{\frac{k}{RT}}$$

$$= \dot{P} \frac{p_0}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}} A M \sqrt{\frac{k}{RT_0}} \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{T_0}}$$

$$G' = \frac{P_0}{\sqrt{T_0}} A M \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{1}{\left(\gamma + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k+1}{2k-2}}} = A^* \cdot \frac{P_0}{\sqrt{T_0}} \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{1}{\left(\gamma + \frac{k-1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2k-2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{\gamma + \frac{k-1}{2} M^2}{\gamma + \frac{k-1}{2}} \right]^{\frac{k+1}{2k-2}}$$



si vede che
da $k \rightarrow \infty$ si
ne finisce in curva

CAS

22/3/95

$$G' = S U A = S^* V^* A^* \\ = S^* A^* \sqrt{k R T^*}$$

$$G = \frac{G'}{A} = \sqrt{\frac{k}{R T_0}} P_0 \frac{A^*}{A} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2k-2}}$$

partita di massa
specifica

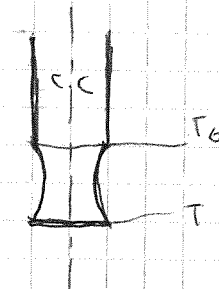
G max quando $A = A^* \Rightarrow$ nella gola cioè dove $M=1 \Rightarrow$
nella sezione critica.

$$\frac{G'}{A} = S U$$

$$\frac{S}{S_c} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{2}{k}}$$

$$V = \sqrt{2 C_p (T_0 - T)} \\ \downarrow 4600 \text{ m/s} \\ \sqrt{\frac{2 k R T_0}{k-1} \left(\gamma - \frac{T}{T_0}\right)}$$

temperatura in
area di ristrettezza $\Rightarrow P = \text{cost} \Rightarrow$ ma varia la composizione
chimica del gas.
 $\Rightarrow$ si vede che
la U data così la
pesce cambiare



Questo è altrettanto valido
nelle T_0 e $P_0 \Rightarrow$ ne dipende (P_0)
dalle sezioni (T_0) ok!
EQUILIBRIO CONGELEATO

$$V = \sqrt{\frac{2 k R T_0}{k-1} \left(1 - \frac{T}{T_0}\right)} \Rightarrow \frac{T}{T_0} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

$$\frac{T_0}{T_0} = P \left(\frac{P_0}{P_0}\right) \Rightarrow \text{gusto si può ottimizzare modificando}$$

le sezioni dell'ugello (e il numero M)

$\Rightarrow$ è legato dalla geometria

se $\frac{P}{P_0} \rightarrow 0 \Rightarrow$ meglio è la
partita di calore che

occorre a trasformare in vettore critico

Se P_0 può espandersi a P_0 molto verso di cui. x_{eff} la velocità del gas all'interno della c.c. ~~non~~ è molto piccola. Un'altra P_0 di effluire non deve finire allo 0.5 delle masse alate

$$V = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{RT_0}{P_0} \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}$$

massima T_0 massima velocità (3000-4000°C) ^{nei reattori chimici.}

Si potrebbero aggiungere valori + alti a reattori nucleari (e plasma, ionici) con un risultato non realistico.

Conviene anche tenere basso il P.M. ($\Rightarrow$ * gas i reattori usano l'el che è la + bassa valore specifico ma che + basso P.M.) $\Rightarrow$ si vede anche x_{eff} in uso H_2 .

$$\frac{G}{A} = \rho V$$

$$\frac{G}{S_0} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{k}}$$

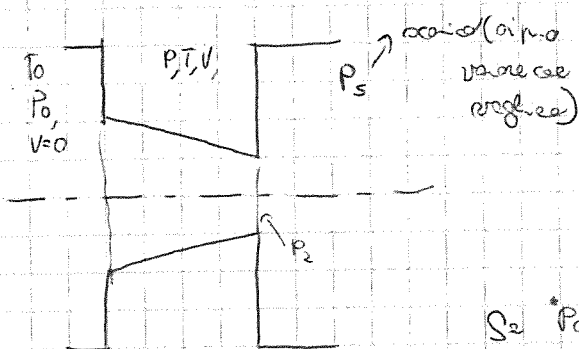
$$= S_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{k}} \sqrt{2 \dots}$$

$$= \sqrt{2 \frac{k}{k-1} P_0 S_0 \left[\left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}$$

Si vede che espandendo si annulla la portata massima. Questo è assurdo.

GAS

24/3/86



Dato che knowing P, T, V è se a base collegata ad un reattore ($P_0, T_0, V=0$)

Ma ci saranno anche d'intro ($\pi < 1$)

Se $P_0 = P_s \Rightarrow$ non c'è deflusso.

Se $P_0 > P_s$ inizia deflusso

$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{P_0}{S_0} \left[1 - \left(\frac{P_s}{P_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}$$

$$G = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} P_0 S_0 \left[\left(\frac{P_s}{P_0} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{P_s}{P_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}$$

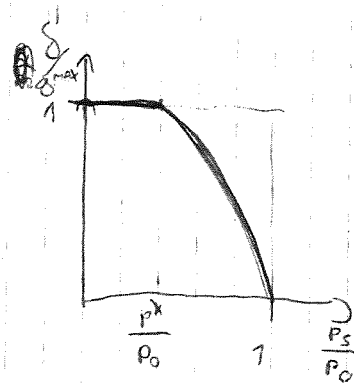
è la portata specifica

$\Rightarrow$ più si allarga P_S più aumenta la velocità e più aumenta la portata.
Questo fino a quando la $P_S = P^*$

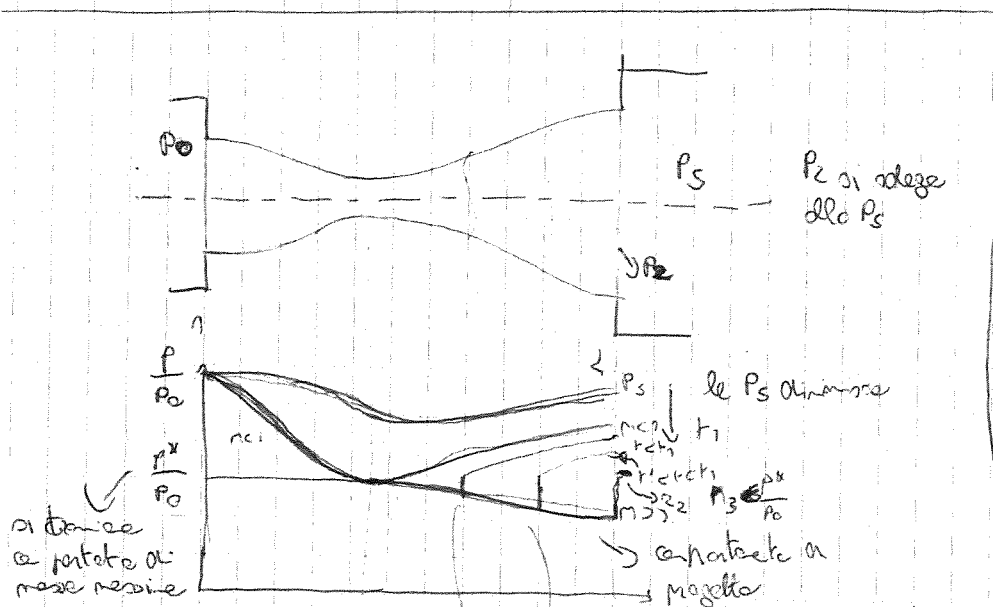
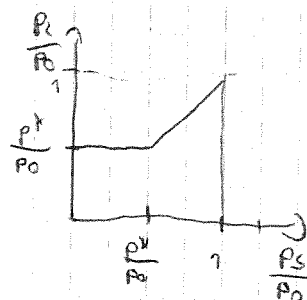
$$p^x = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}} p_0$$

$\Rightarrow v = v^* = a^*$ $\Rightarrow$ il numero di Mach = 1

G aneta $17x$ (poredo $P_S - P^*$)



Se si diminuisce scorie la P_S ($\Rightarrow$ $< P^*$) la pressione P_2 non
più aumentata $< P^*$ xché $\Rightarrow$ si dovrebbe creare ~~una~~ una velocità
superficiale che non è ipotizzabile a causa di un deflusso
insufficiente $\Rightarrow$ la portata viene maggiore e la P_2 rimane
uguale alle P^* $\Rightarrow$ si resta in collegamento all'estate
del catotto (gasto perché si riceve ed è $P_2 > P'_S$)



È il recupero di massima
velocità dell'angolo d'uscita

Scendendo da $Z_1 \rightarrow Z_3$ si fanno molte discese
con successive recuperi a Moscia

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2}} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

$$\frac{A}{f^k} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k+1)}} \left(\frac{2}{k-1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{2k}{k}} - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}}$$

→ resta in mano dato $\frac{G}{A}$ e $\frac{G_{max}}{A}$

ing the same $\Rightarrow$ head & opps

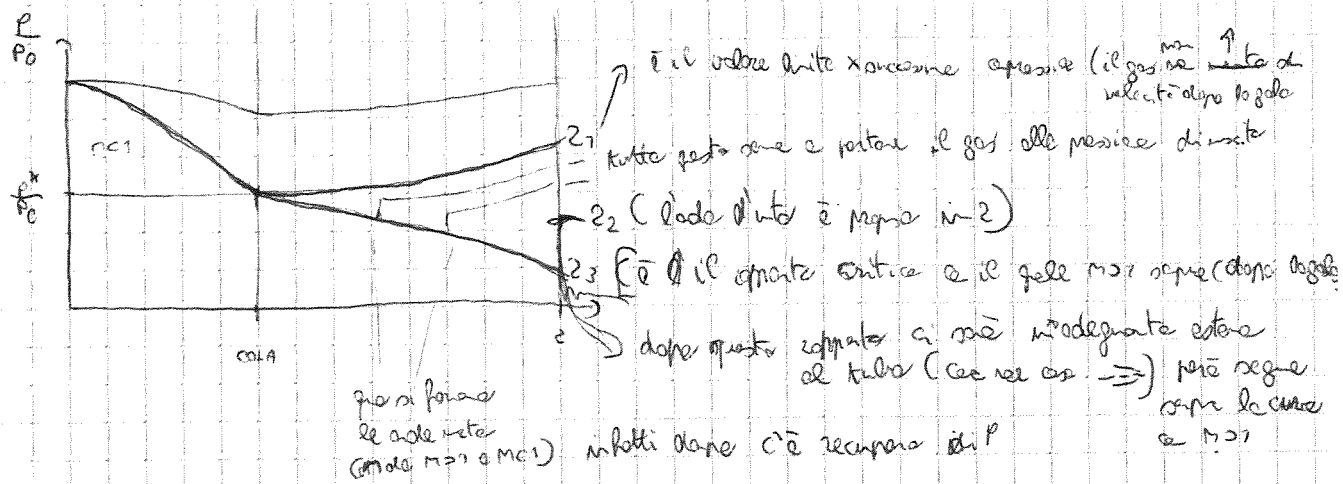
no. of opps in $\frac{P_2}{P_0}$ at 2 places

$2_1, 2_2$

$2_1 \Rightarrow \frac{P_1}{P_0}$

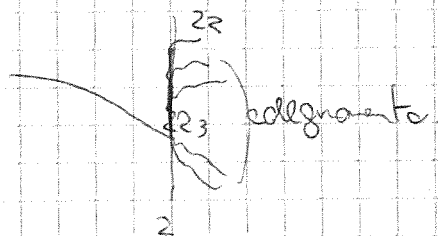
$2_2 \Rightarrow \frac{P_2}{P_0}$

$\Rightarrow 2_3 \text{ at } M \Rightarrow 2_4 \text{ at } M \Rightarrow$



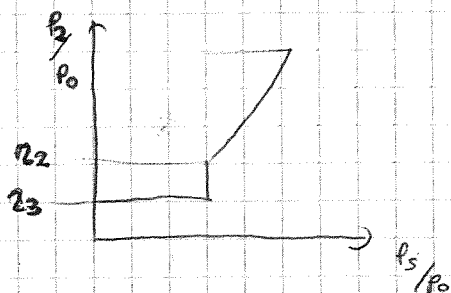
Se $\frac{P_2}{P_0}$ si trova tra 21 e 23 $\Rightarrow$ si può trovare d'ingresso in numero da notare P_2 e P_3

$$\frac{22}{23} = \frac{2k}{k+1} M_{(23)}^2 - \frac{k-1}{k+1}$$



CAS

28/3/85



tutta parte dove c'è posto il gas alla pressione di uscita
 le temperature finali. Si definisce rendimento isentropico dell'ugello il rapporto tra l'energia cinetica raggiunta dall'uscita di flusso nella sezione terminale del condotto nel caso reale rapportata al valore nel caso di espansione isentropica reversibile.

$$\eta = \frac{\frac{V^2}{2}}{\left(\frac{V^2}{2}\right)_{s=st.}}$$

normalmente la velocità verso l'uscita

$$V = \eta \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} p_0 v_0 \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$\downarrow$
 $\frac{1}{\gamma}$
 $\frac{1}{\gamma}$
 $\frac{1}{\gamma}$

$n = k$ nel caso dei gas
 alternati bisogna tener conto del titolo.

L'ingetto serve ad ottenere la massima velocità nella sezione terminale
 $\Rightarrow$ importante è la P e valle $\Rightarrow$ l'idea è vedere se si raggiunge la P^* ,
 che è funzione della P_{TOT} . $P_0^* = P_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Rightarrow$ molto si vede
 a legge base conv. a conv-div.

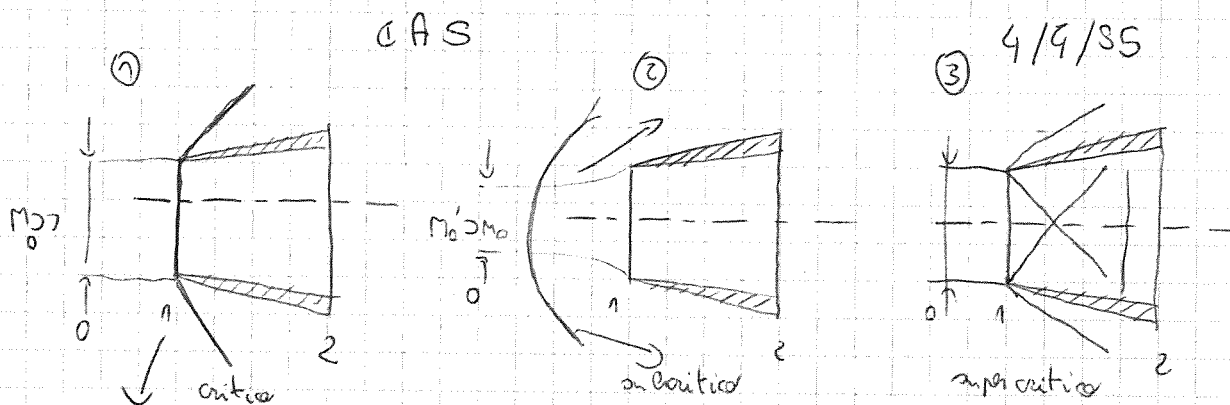
Se cedimento va da 0,54-0,55 $\Rightarrow$ molto alto (a esse rettilinea)
 a esse curvilinea 0,5-0,55.

Minimizzare l'altitudine nel tratto convergente ed evitare i distacchi
 di vena l'angolo è $8^\circ-10^\circ$ ($5^\circ-8^\circ$ meglio), per il tratto
 convergente l'angolo di apertura 45° (più l'altitudine influisce poco)

(CAVALLINI-SOVRANO).

PARCA 1 LEZIONE

(30/3/55)



Così c'è il massimo recupero di pressione (l'onda d'urto si forma
 proprio nella sezione d'ingresso).

Se il numero calico legge addensarsi i flotti si vede che da ① si passa
 a ② - la presenza di onde d'urto davanti al condotto d'uscita,
 la portata d'aria diminuisce. Se ③ si forma al diminuire della velocità
 $\Rightarrow$ lo si passa onde d'urto alligie + un'onda d'urto normale
 interna al condotto.

$$\frac{P_{TOT2}}{P_0} = \text{rapporto di diffusione} = \frac{P_{TOT2}}{P_1} \cdot \frac{P_1}{P_0}$$

dopo onde
d'urto

espressione dovuta
all'onda d'urto

$$\frac{P_{TOT2}}{P_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

perché ma
sufficiente
iscritta

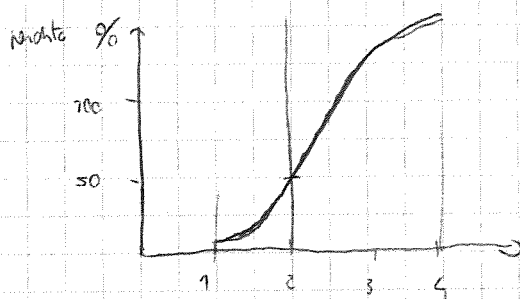
$$M_1^2 = \frac{M_0^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1} M_0^2 - 1} \quad (\text{solo di inter normale})$$

$$\frac{P_{Tot2}}{P_1} = \left[\frac{\frac{2k}{k-1} M_0^2 - 1}{\frac{2k}{k-1} M_0^2 - 1} + \eta_d \left(M_0^2 + \frac{2}{k-1} \right) \right]^{\frac{k}{k-1}}$$

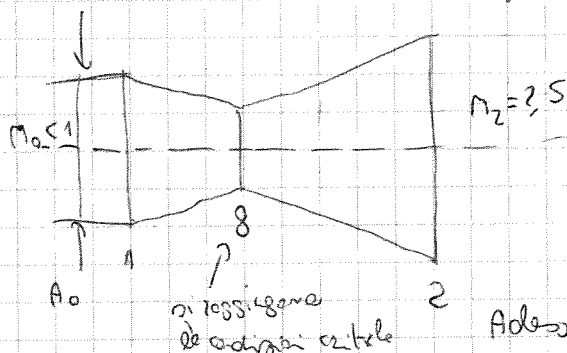
$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{2k}{k+1} M_0^2 - \frac{k-1}{k+1} = \frac{k+1}{k-1} \left[\frac{2k}{k-1} M_0^2 - 1 \right]$$

$$\Rightarrow \text{tracce } \frac{P_{Tot2}}{P_0} = h(k, M_0)$$

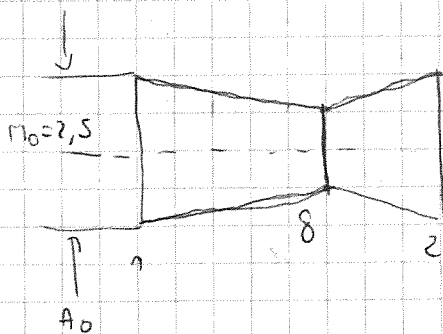
$M_0 < 1,85$ x peste calcolate (vedere disegno)



parte a caso che la compressione
ma anche isentropica



Adesso convergenza double flussione all'incanto



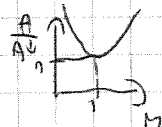
Non può avvenire x che x la presenza
del convergente-divergente accelerano
della onde d'urto.

$$\frac{A_1}{A_8} < \frac{A_2}{A_8} \quad \text{con } M < 1 \quad \text{Case di pella che allora si è trovato}$$

Se tutto è per governato da una instabilità in funzionamento.

Se ne ci fossero onde d'urto a $M_0 > 1$ convergente $\Rightarrow$ non più nella
solo area $M=1 \Rightarrow$ per convergente $\Rightarrow$ alto se recupero di P.

$$A_8 = A^* \Rightarrow \frac{A_0}{A_8} = \frac{A_1}{A^*}$$



$\Rightarrow$ ma c'è un'incognita delle linee di corrente $\Rightarrow$ l'area di ^{coltura} ~~coltura~~ è uguale
di ingresso $A_0 \equiv A_1 \Rightarrow G' = A_0 S_0 V_0 = A_1 M_0 \sqrt{k p_0 S_0}$

Adesso viene l'area in gola: la diminuisce $\Rightarrow \frac{A_1}{A_g} \uparrow$ cioè $\frac{A_1}{A_g} > \frac{A_1}{A_*}$

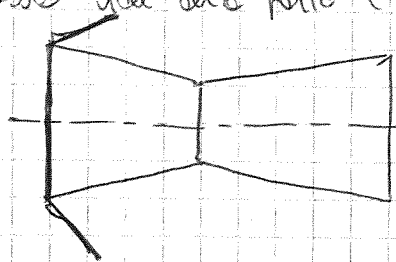
$\Rightarrow$ entropia dello scarto fluido $\Rightarrow$ la portata $G' = A_1 M_0 \sqrt{k p_0 S_0}$ è pari
massima della portata con d'attacco $\Rightarrow$ si deve creare un'onda d'urto normale
esterna al condotto di attacco 

$\Rightarrow$ diminuzione dell'area di coltura $\Rightarrow$ adeguamento della portata.

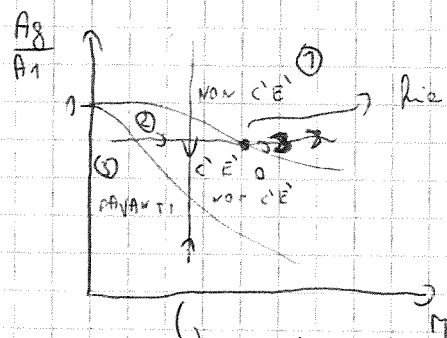
Se si ~~si~~ diminuisce ancora la sezione l'onda d'urto si sposta a
sinistra o si diffonde così ne basta.

Se invece si aumenta l'area in gola l'onda d'urto si sposta a destra o si diffonde.

Se si diminuisce ancora verso l'alta parte (alla fine del divergente)



Il valore dell'area in gola sarà $>$ del valore minimo richiesto(???)



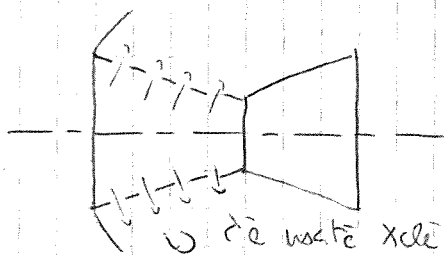
Ma se c'è un'onda d'urto davanti che però
a noi non serve e mette solo l'onda
d'urto si ha $M < 1 \Rightarrow$ galleria divergente
divergente e portata si massimizza.
 $\Rightarrow$ invece lavorare a $M < 1$ onda d'urto
regime di flusso
 $\Rightarrow$ lavorare bene nella
nozzle

in vede che
c'è un'onda d'urto si sposta a destra

Otto che lavorare bene nella zona ② (c'è la V_{max} massima)

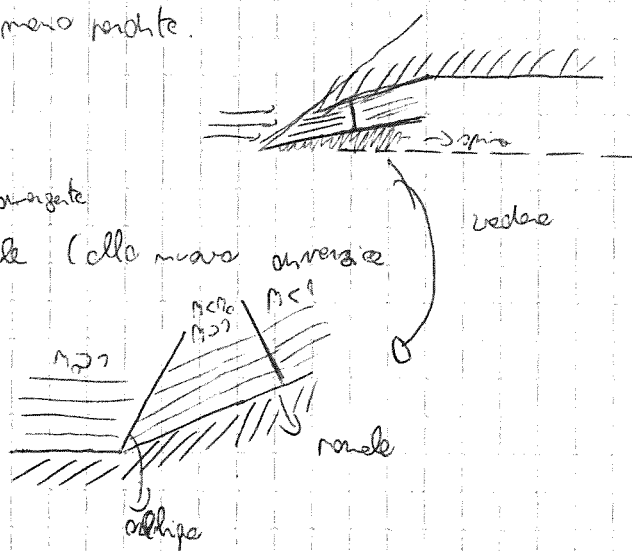
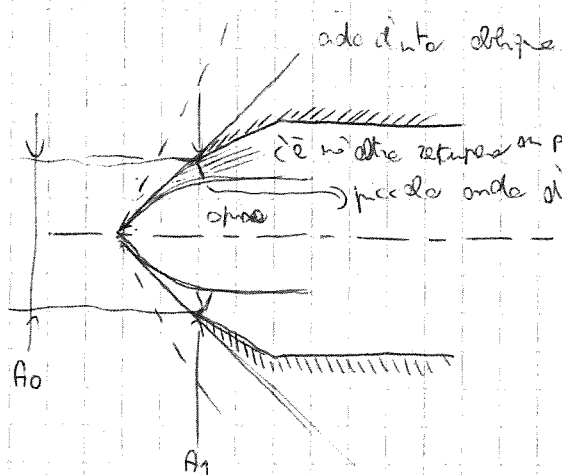
$\Rightarrow$ invece se non si vuole in ① cioè lavorare bene solo l'onda
d'urto dietro (a valle della) gola $\Rightarrow$ e poi diminuire la V
ed andare in ③. $\Rightarrow$ difficoltà di orientamento (all'ingresso sono
in ③ ma più tardi si serve a monte) $\Rightarrow$ DIFFICOLTÀ del
convergente-divergente che diffonde.

Si è cercato di fare convergenti perpendici x l'asse intorno l'angolo d'urto.



è usate x l'angolo d'urto $P \in \mathcal{D}$. $\Rightarrow$ l'angolo tende ad essere all'interno. Comunque non si è vista la possibilità $\Rightarrow$ non praticabile.

Allora si cerca di realizzare una serie di angoli d'urto obliqui + un angolo d'urto finale che è anche più piccolo e a meno pericoli.



mentre la serie si è adattata alle varie situazioni.

Quindi per ogni la serie hanno i angoli obliqui ma anche il resto della serie ha alcune altre angoli d'urto obliqui $\Rightarrow$ gradualmente si ha recupero di pressione. In tutto ciò il recupero è maggiore e le perdite sono minori.

Con la serie c'è anche una grande espressione x l'angolo d'urto $\Rightarrow$ l'angolo è molto + piccolo. Aumentando il Mach si vede l'angolo dell'angolo obliquo aumenta (pelle toltogestita) e parte della instabilità.

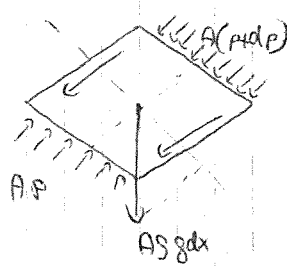
Fotocopia affumica e stato-umite.

Modello on d'attito: Fine col adesso l'attito si può trascurare nelle xci
il fluido sta poco tempo in posti adatti.

$$S \frac{v^2}{2} + \rho g z + v dp + \delta R + \delta L = 0$$

$\hookrightarrow$ corrente accelerata
 $\hookrightarrow$ corrente resistata

Otto che studia monodimensionalmente la forza per le medie sulle rese



C perimetro
A area

τ_0 c dx come la forza
d'attito

$$-A dp - \tau_0 c dx - \left[\rho A g dx \cos\left(4 - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$-A dp - \tau_0 c dx + \rho A g dx \cos\theta = \rho \int \frac{dv}{dt} / A \quad (\text{partite da zero})$$

$$-\frac{dp}{dx} - \frac{\tau_0 c}{A} = \rho \frac{dv}{dx} \quad -v dp - \tau_0 \frac{c}{A} dx - g dz = \frac{dv^2}{2}$$

$$\delta R = \frac{\tau_0}{A} \frac{c}{s} dx \quad de = 4 \frac{A}{c}$$

$$= \frac{4 \tau_0}{s} \frac{dx}{de} \rightarrow \text{coefficiente di attrito}$$

$$h = \frac{\tau_0}{\rho \frac{v^2}{2}}$$

$$\delta R = h \frac{dx}{de} \frac{v^2}{2}$$

fisiche

$$h = Re, Ma \left(\frac{g}{de} \right)$$

$\hookrightarrow$ coefficiente

$$h = \frac{64}{Re}$$

Con due zone formule si può trovare h.

$$h = 4 \frac{T_0}{3\sqrt{v^2}}$$

$$dR = \frac{v^2}{2} \frac{dx}{dx} R$$

↳ l'attente d'attente

↳ l'usage dissipative

Si ce sepe n n l'usage condottico

$$\begin{cases} h + \frac{v^2}{2} = h_0 = \text{cost} & - \text{Energie} \\ sv = \frac{g'}{A} = g = \text{cost} & - \text{Continuità} \end{cases}$$

$$h = h_0 - \frac{v^2}{2}$$

equazione in forma

$$s = s(h, \frac{v}{s})$$

$$dh + v^2 \frac{dv}{v} = 0$$

$$\frac{dv}{s} + \frac{ds}{s} = 0$$

$$TdS = dh - \frac{dp}{s}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{dh}{\frac{dv}{v}} = \frac{dh}{\frac{ds}{s}} = sT \frac{ds}{ds} + \frac{dp}{ds}$$

$$v^2 = \left(\frac{dp}{ds} \right)$$

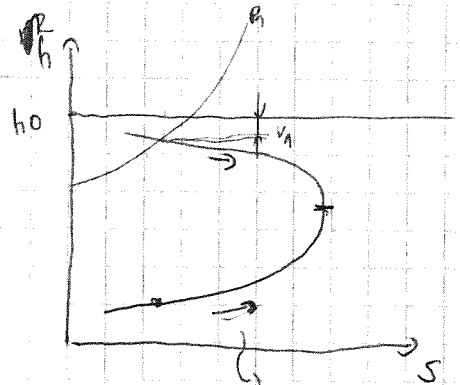
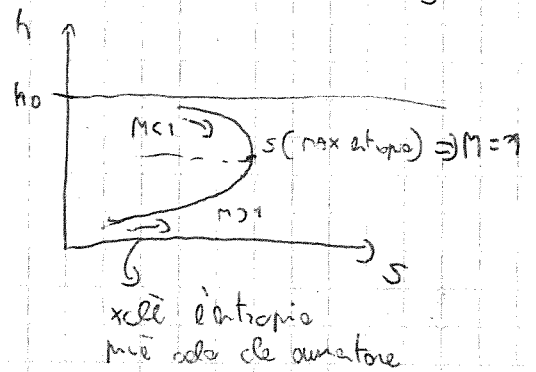
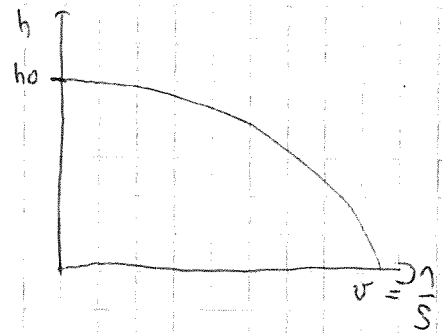
$$\begin{cases} \frac{dT}{T} + (k-1) \frac{m^2}{v} \frac{dv}{v} = 0 \\ \frac{dm}{m} = \frac{dv}{v} - \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \end{cases}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dT}{T} \frac{1}{(k-1)m^2}$$

$$-\frac{dT}{T} = 2 \frac{dm}{m} - 2 \frac{dv}{v}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dm}{m} \left[\frac{1}{(k-1)m^2} + 2 \frac{dv}{v} \left(\frac{1}{(k-1)m^2} \right) \right]$$

$$\frac{dv}{v} \left[\frac{(k-1)m^2 + 2}{(k-1)m^2} \right] = \frac{dm}{m} \left[\frac{1}{(k-1)m^2} \right]$$



in valle che m tende a diminuire
 $\Rightarrow$ valle che si sia impossibile
 di passare da M>1 a M<1 $\Rightarrow$ 2.
 ne passa è possibile $\Rightarrow$ discontinuità
 $\Rightarrow$ onda d'urto.

$$\frac{dv}{v} = \frac{dm}{m} \left[\frac{1}{\frac{(k-1)M^2}{2} + 1} \right]$$

se vuole x tutti i moti adiabatici.

$$\frac{dT}{T} = - \frac{(k-1)M^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \frac{dm}{m}$$

$$\frac{dv}{v} + \frac{ds}{s} = 0$$

$$\frac{P}{S} = RT$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} + \frac{ds}{S}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} = \left[\frac{1 + (k-1)M^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \right] \frac{dm}{m}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_0}{P_0} &= \frac{dP}{P} + \frac{kM^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \frac{dm}{m} \\ &= \left[\frac{M^2 - 1}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \right] \frac{dm}{m} \end{aligned}$$

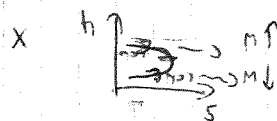
$$kM^2 \frac{dv}{v} + \frac{dP}{P} + h \frac{dx}{de} \frac{kM^2}{2} = 0$$

Energie

$$\rightarrow \frac{dm}{m} = \frac{kM^2 (1 + \frac{k-1}{2}M^2)}{2(1-M^2)} \left(h \frac{dx}{de} \rightarrow 0 \right) \quad (1)$$

ENERGIA

Si ritrova pelle che si aveva visto



	M	v	S	T	P	P ₀
M < 1	↑	↑	↓	↓	↓	↓
M > 1	↓	↓	↑	↑	↑	↓

non reversibile

X oggi allora $\Rightarrow$ ora ho una altezza massima tale che nella sezione

finale si abbia M=1.

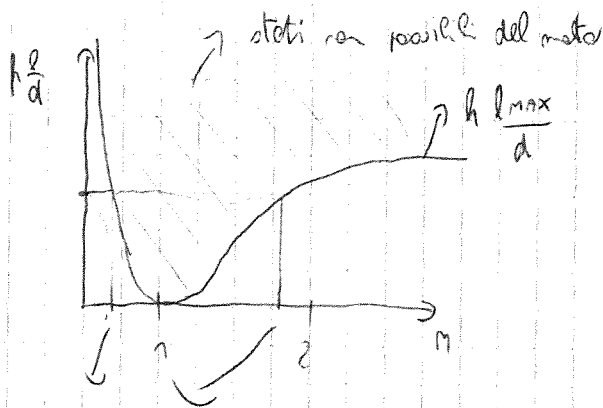
$$\int_0^{x_{max}} h \frac{dx}{d} = \int_M^1 \frac{2(1-M^2)}{kM^2(1 + \frac{k-1}{2}M^2)} \frac{dm}{m} \quad \text{e poi va integrato.}$$

Costa integrale la (1)

$$\frac{h_{MAX}}{d} = \frac{1}{k} \left[\frac{(1-M^2)}{M} + \frac{k+1}{2} h \frac{k+1M^2}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \right]$$

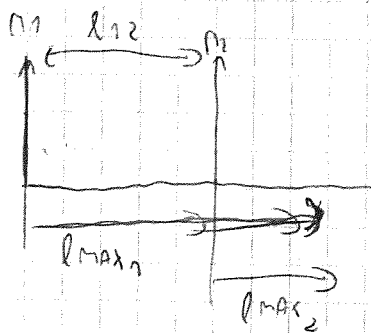
$$\bar{h} = \frac{1}{x_{MAX}} \int_0^{x_{MAX}} h dx$$

parametro critico d'obito



M_{max} per MCR e M_{min} x MDI e in quella è possibile partire

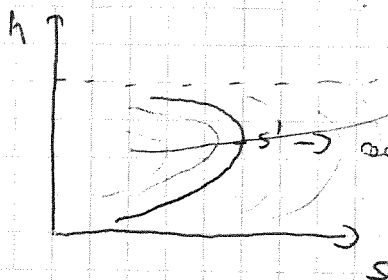
Se si ha le air $M \rightarrow \infty$ e $h = 0,01$ $\frac{h_{max}}{a} \approx 80 \Rightarrow$ si vede che al $M=1$ si raggiunge presto $\Rightarrow$ è stonato difficile fare MDI in un condotto (X in luogo allargato)



Però la differenza tra gli $l_{max1,2}$ tende a zero per $M_1 \rightarrow M_2$

CAS

11/4/88



area di MAX atipica (condizione critica $M=1$) si raggiunge come in numeri incompressibili

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\frac{k+1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2 V \sqrt{k R T_2}}{n_1 V \sqrt{k R T_1}} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{1 + \frac{k+1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k+1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\frac{S}{S^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{1 + \frac{k+1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right]^{\frac{n}{2}}$$

$$\frac{V}{V^*} = M \left[\frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k+1}{2} M^2} \right]^{\frac{n}{2}}$$

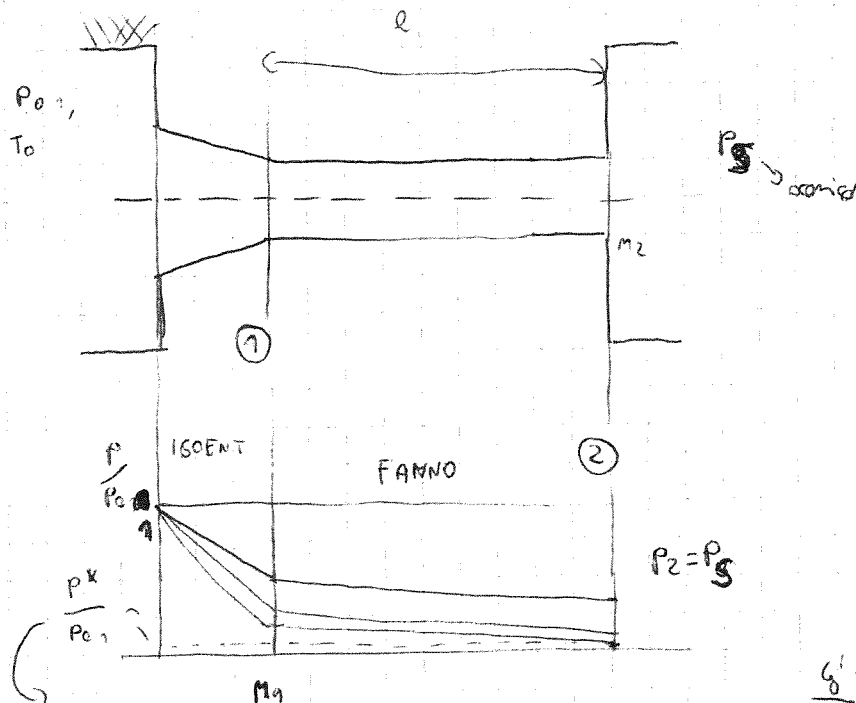
pr=er

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{\frac{k+1}{2}}{1 + \frac{k+1}{2} M^2} \right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{P_0}{P} \cdot \frac{P}{P^*} \cdot \frac{P_0^*}{P_0^*}$$

$$= \frac{2}{M} \left[\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

modo con stento

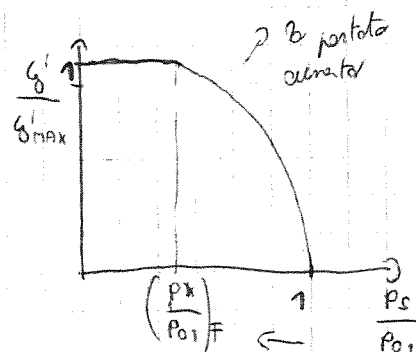


Adverse curve x in nella sezione di efflusso

$$M_2 = 1 \quad \text{ed} \quad M_1 = M_{MAX}$$

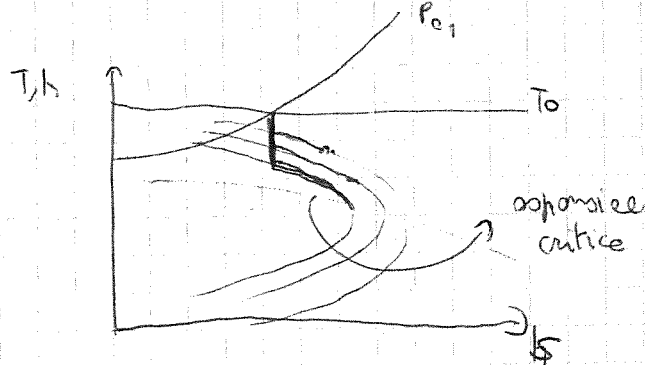
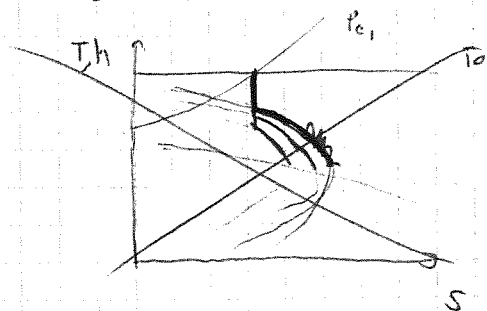
$$P_5 = P_2 = P^* \quad (\text{da Fanno})$$

$$G' = A M_1 \sqrt{\gamma P} \dots$$

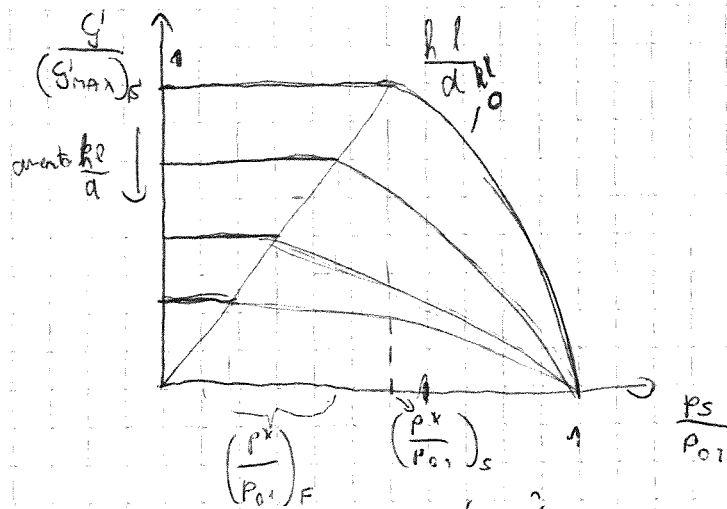


$$M_{MAX} \text{ è tale per cui } h \frac{dl}{dl} = \left(h \frac{dl_{MAX}}{dl} \right)_{M_{MAX}}$$

sim M_{MAX} ha eguale G'_{MAX} che però è inferiore a quella massima che si avrebbe senza attrito (se tutta la sezione è attrito).

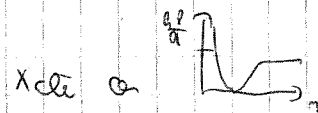


Anche se il CP aumenta anche oltre p^* le perdite però non
diventa oltre la G'_{max}



$$\left(\frac{p^*}{p_{01}}\right)_F = \frac{p_1}{p_{01}} \left(\frac{p^*}{p_1}\right)_F = M_{max} \frac{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_{max}^2\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}}$$

$\Rightarrow$ avviene a estremo tutta la vena che

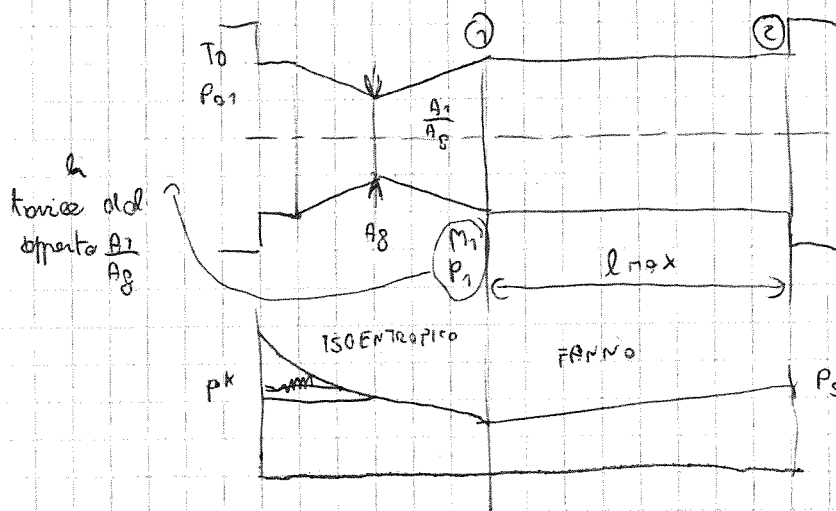


avviene a M_{max} $\times$ $pg \frac{h l_{max}}{a}$

$$h \frac{l}{a} = \left(\frac{h l}{a}\right)_{n1} - \left(h \frac{l_{max}}{a}\right)_{n2}$$

Questo se si conosce $h l_{max}$

Adesso bisogna vedere se il moto all'uscita del tubo a sezione costante
è supersonico. 3 porte possono variare la lunghezza del condotto.



$$\frac{h l_{max}}{a} = \frac{1}{k} \int \frac{1-M^2}{M^2} + \frac{k+1}{2} a \left(\frac{\frac{k+1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}\right)$$

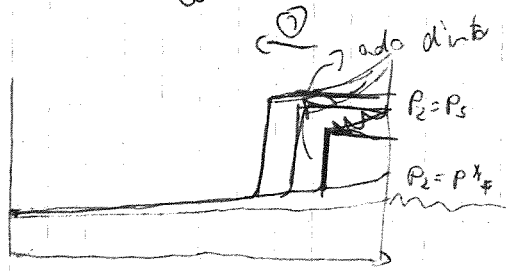
$$M_2 = 1$$

tutto posto x l_{max}

Se l_{max} è inferiore

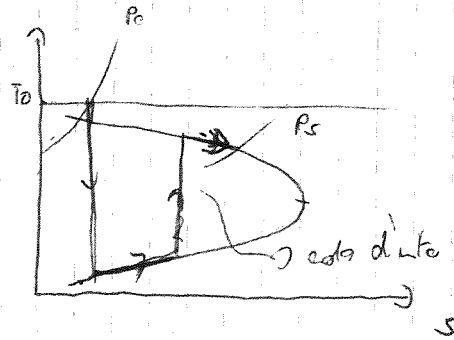
se $p_s < (p^*)_F$ ma anche mette, al limite
ci sarà un adeguato stato al condotto.

$P_s > P_F^*$ si formerà un'onda d'urto tale da portare il fondo ad una pressione maggiore in maniera da poter uscire e non no $P_2 = P_s$



① l'onda d'urto si sposta sempre verso l'interno all'aumentare della P_s

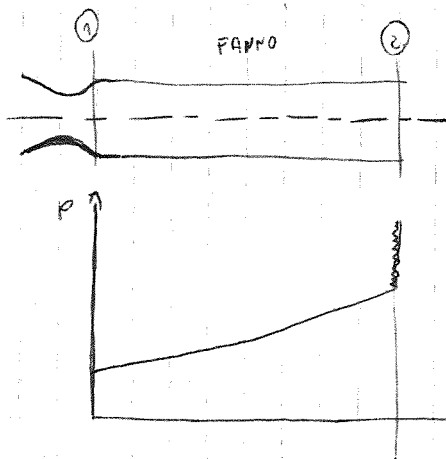
$\Rightarrow x \propto l_{max}$ o $M=1$ o $M<1$



CAS

12/4/85

Deflusso e velocità supersonica all'ingresso



$M_1 > 1$

$$\frac{P_b}{P_0} =$$

Che deve essere la pressione finale affinché $M_2 > 1$

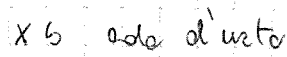
$$\frac{h}{d} = \left(\frac{h_{max}}{d} \right)_{M_1} - \left(\frac{h_{max}}{d} \right)_{M_2}$$

Se la P è minore in parte P diminuisce tanto

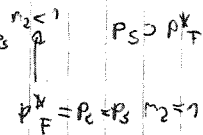
ma viceversa (P_{b2})

Se pressione critica sarà celle x in l'onda d'urto sarà proprio nelle sezione terminale.

Se la $P > P_{b2}$ l'onda d'urto si sposterà verso l'interno

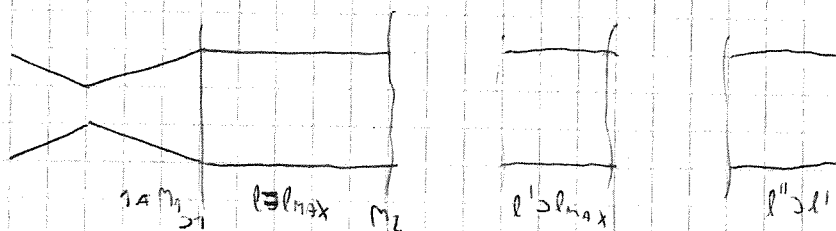
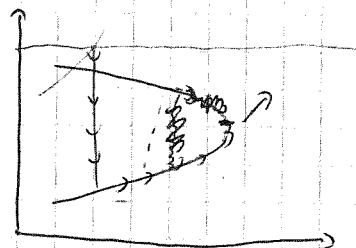


curva lichte

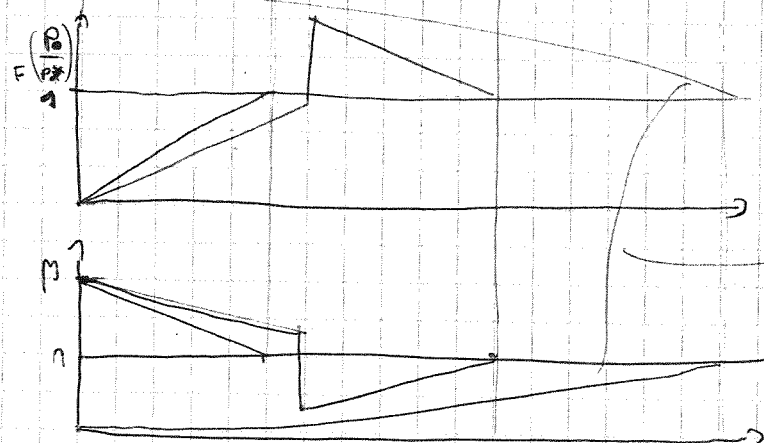


a) bene in modo di vita la
 c) porzione in piedi delle P_3
 g) voce a M_2 c)

Se $P_3 \in P_F^k$ c'è solo d'intorno
si colloca in maniera tale che $M_2 = 1$
Altrimenti $P_3 \in P_F^k$ $M_2 = 1 \Rightarrow$ i.e. flusso
ma si collega e porta minor P.



$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}$



Til coe
critica nel
gelle l'ada
d'ita e propa
in ①

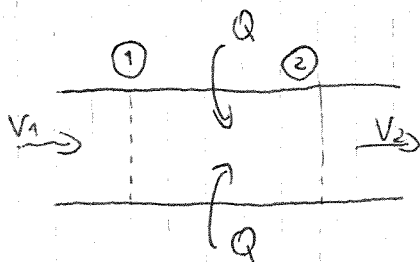
1. quanto essere la velocità l'ade d'interazione nel convergere divergere.
 2. FANNO subsonico. Se in posto essere calare la portata => diminuire
 (si ingelano)

CAS

21/4/85

Moto diottico o di Rayleigh: reversibile (no attinta) e regime permanente
 in un condotto a sezione costante, a densità costante con l'esterno.

$$\Delta U (\text{energia potenziale}) = 0$$



3. Se gas è come pello => no variazze
 di CP => il processo di compressione (condottivo)
 si può vedere che una valigia di calore con
 l'esterno => moto di Rayleigh. S'attinta è

trasmissione del tutto (nella C.C.) è molto breve.

pdfv

$$\frac{dp}{\rho} + v dv = 0$$

$$\frac{dU}{v} = \frac{dv}{v} \quad \text{per } x \text{ att.} = \text{st.}$$

$$dp + \frac{v^2}{r} \frac{dU}{v} = 0$$

$$\int dp + \left(\frac{v}{r} \right)^2 dv = 0$$

$$G' = \rho VA = \frac{VA}{v}$$

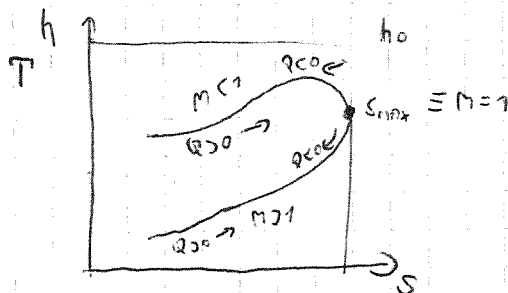
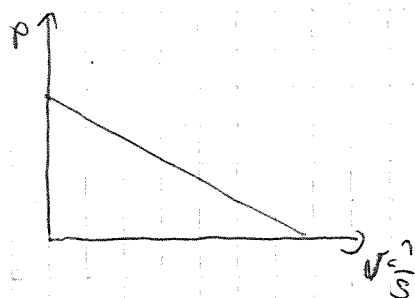
$$\boxed{p + \left(\frac{G'}{A} \right)^2 v = \text{st} \quad p + \frac{G'^2}{\rho} = \text{st}}$$

$$p + \frac{v}{r} A = \text{st}$$

$$p + \frac{G' v}{A} = \text{st}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S} \right) = v^2$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S} \right)_{S=\text{st}} = v^2$$



$$\delta Q = T ds$$

$$\delta Q = dh + \frac{dV^2}{2} = dh_0$$

$$P_1 + \rho_1 V_1^2 = P_2 + \rho_2 V_2^2$$

$$a = \sqrt{kRT}$$

$$M = \frac{V}{\sqrt{\frac{kP}{\rho}}}$$

$$\rho V^2 = M^2 k P$$

$$\rho_1 + M_1^2 k P_1 = \rho_2 + M_2^2 k P_2$$

$$\rho_1 + M_1^2 k = \frac{P_2}{P_1} (\rho_2 + M_2^2 k)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{RT_2}{RT_1}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{V_2}{V_1} \times \text{area}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_1 + M_1^2 k}{\rho_2 + M_2^2 k}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{S_1}{S_2}$$

$$= \frac{P_2}{P_1} \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{M_2 \sqrt{kRT_2}}{M_1 \sqrt{kRT_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$



$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left(\frac{\rho_1 + M_1^2 k}{\rho_2 + M_2^2 k} \right)^2 \left(\frac{\rho_1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{\rho_2 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^2$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left(\frac{\rho_1 + M_1^2 k}{\rho_2 + M_2^2 k} \right) \left(\frac{\rho_1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{\rho_2 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 \left(\frac{\rho_1 + M_1^2 k}{\rho_2 + M_2^2 k} \right) \left(\frac{\rho_1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{\rho_2 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{S_2 - S_1}{R} = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} - \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$$

$$= \ln \left[\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \right] = \ln \left[\left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{\frac{2k}{k-1}} \left(\frac{\rho_1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{\rho_2 + \frac{k-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \right]$$

3-brancha a distanței i valori de pi ținee pede $S = \max$

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1+k}{1+kM^2}$$

$$\frac{T}{T^*} = M^2 \left(\frac{k+1}{1+kM^2} \right)^2$$

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(k+1)M^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)}{(1+kM^2)^2 \left(\frac{k+1}{2} \right)}$$

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \left(\frac{1+k}{1+kM^2} \right)^{\frac{k+1}{2}}$$

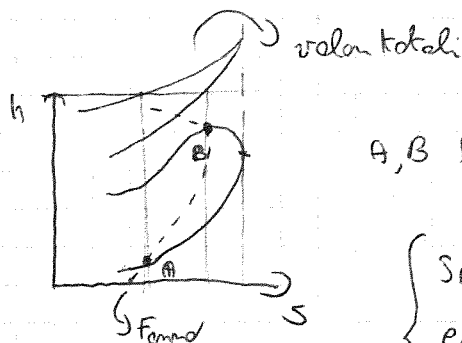
$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{k+1}{1+kM^2} \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{\frac{k+1}{2}} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{V^*}{V} = \frac{1 + kM^2}{(k+1)n^2}$$

$$\frac{S-S^*}{R} = \ln \left[n^{\frac{2k}{k-1}} \left(\frac{1+k}{1+kM^2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \right]$$

CAS

26/4/85

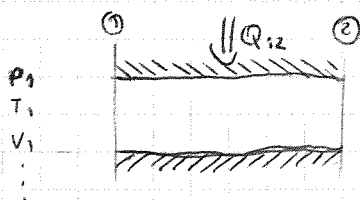


A, B have entalpie totale uguale

$$\begin{cases} S_A V_A = S_B V_B \\ P_A + S_A V_A^2 = P_B + S_B V_B^2 \\ h_A + \frac{V_A^2}{2} = h_B + \frac{V_B^2}{2} \end{cases}$$

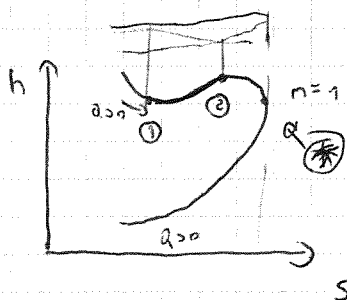
Sei le stesse per ogni caso di flusso per trovare le onde d'urto normale. Se non felle che soddisfano alle equazioni in forma.

⇒ le equazioni che ora hanno un'onda d'urto normale si possono anche determinare trovando le linee di Fanno e di Rayleigh: le intersezioni sono i punti prima e dopo dell'onda d'urto.



⇒ date le condizioni iniziali all'ingresso la linea corrispondente

Si deve determinare le condizioni dopo le onde d'urto



$$\frac{T_{01}}{T_0^*} = \frac{2(k+1)n^2(1+\frac{k-1}{2}n^2)}{(1+kM^2)^2}$$

$$\Rightarrow T_0^*$$

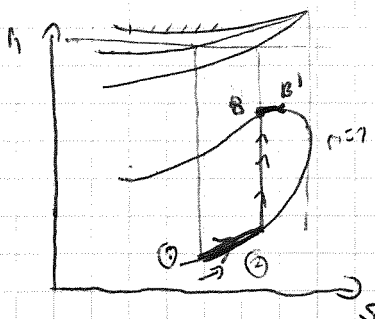
$$Q_{12} = c_p(T_{02} - T_{01}) \Rightarrow T_{02}$$

$$Q_{12} > 0$$

fonte sul fluido

$$\begin{cases} T_{02} \leq T_0^* \\ T_{02} > T_0^* \end{cases}$$

Se il deflusso è subsonico lo stato finale si trova sul lato del grafico (Se il moto è subsonico)



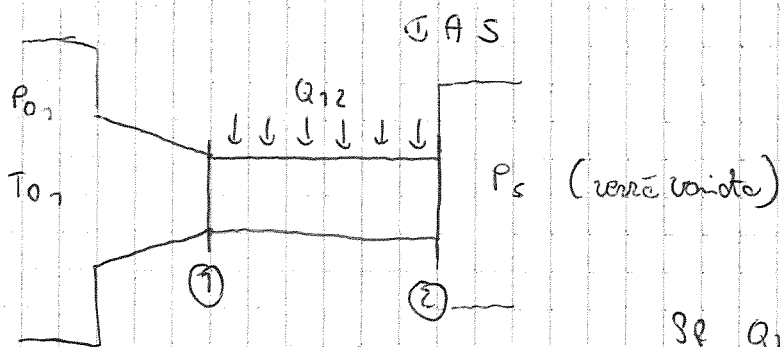
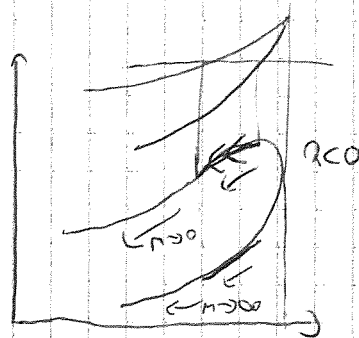
Se il moto è supersonico non segue nel deflusso il moto iniezione (ma se rallentato) ma si forma un'onda d'urto che porta il flusso a subsonico (e causa delle oscillazioni di valle).

Se $T_{02} > T_0^*$ la cosa è impossibile cioè il fluido non riesce ad assorbire tutto il ~~potere~~ calore ma solo una parte.

$$\left(\frac{Q_{max}}{C_p T_1} \right)_{m_1} = \left(\frac{T_0^*}{T_{01}} \right)_{m_1} - 1$$

Questo ci serve a vedere se il moto è possibile.

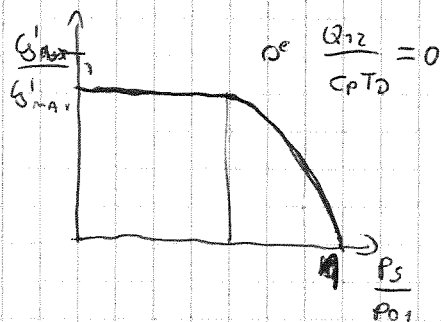
Se la portata in calore è minore invece che 3 maggiore $\Rightarrow$ il deflusso sarà all'opposto.



28/4/85

Cosa succede al valore di ΔP ?

Se $Q_{12} = 0$ il deflusso è direttamente isentropico e non meno che ΔP aumenterà la portata, $P_2 \equiv P_5$; il numero di Mach nella sezione Q_{12} $M_2 = 1 \times \frac{P_5}{P_{01}} = \left(\frac{P^*}{P_{01}} \right)_s$ (qui si trova solo la portata di massa MAX)



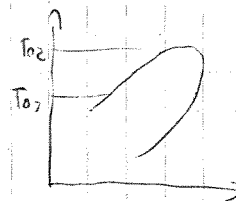
30 $\Rightarrow$ dove $\frac{Q_{12}}{c_p T_{01}} \neq 0$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{Q_{12}}{c_p T_{01}} + 1 = h(M_1, M_2)$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{M_2^2 (1 + k M_1^2)^2 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_2^2\right)}{M_1^2 (1 + k M_2^2) \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2\right)}$$

$T_{02} > T_{01} \quad \text{allora} \quad Q_{12} > 0$

$\Rightarrow M_2 > M_1$



$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{\left(\frac{T_{02}}{T_{0*}}\right)_{M_2}}{\left(\frac{T_{01}}{T_{0*}}\right)_{M_1}} > 1$$

M_1 e M_2 dipendono anche dalla P_s cioè da

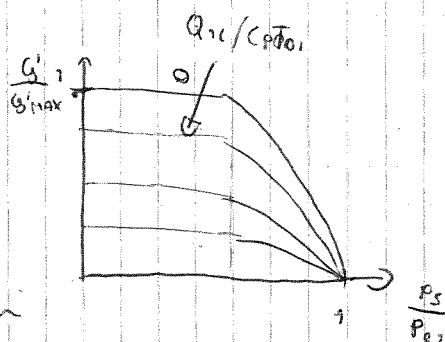
$$\frac{P_s}{P_{01}} = \frac{P_2}{P_{01}} \quad P_s = P_2$$

$$\frac{P_2}{P_{01}} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)_R \frac{P_1}{P_{01}} = h(M_1, M_2)$$

$\Rightarrow$ per ogni valore di M_2 si determina il valore di M_1 $\Rightarrow$ si determina anche $g' = h(M_1)$

$$\frac{g'}{(g'_{max})_s}$$

$M_2 = 0 \rightarrow 1$

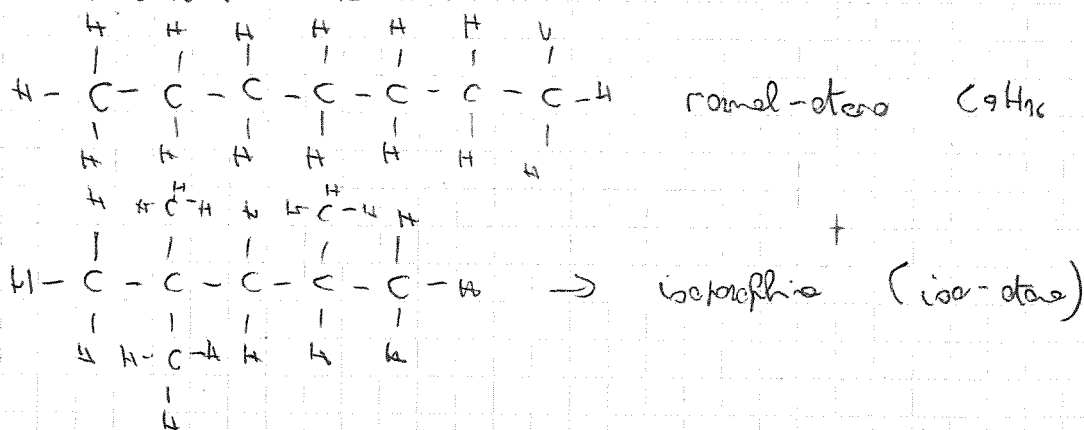


fissato la geometria del condotto e le condizioni iniziali, fissato Q_{12} nel decrescere della P_s e M_2 crescere

da $0 \rightarrow 1$ corrispondere M_1 crescere da $0 \rightarrow M_{1,max}$ che dipende dalle condizioni iniziali, g' crescerà da 0 a g'_{max} , $M_{1,max}$ si avrà quando $M_2 = 1$

$$\frac{T_0}{T_0^*}$$

COMBUSTIONE



SS/3

è la molecola + resistenza è alta alla detonazione.
fine, miscela

$$\frac{\text{massa aere}}{\text{massa combustibile}} = \frac{A}{F} \uparrow \text{ in inglese}$$

di rendimento del combustibile, motore, nel ciclo Otto $\alpha = 18 \div 18$

Nel ciclo Diesel $\alpha = 18 \div 70$. di rendimento pure del di tutto della

composizioni del combustibile; parte composizioni verrà studiato vedendo

in numero di atomi oppure la massa in carbonio, ossigeno, idrogeno

con $C \left[\frac{\text{kgC}}{\text{kg combust.}} \right]$; $H \left[\frac{\text{kgH}}{\text{kg combust.}} \right]$; $O \left[\frac{\text{kgO}}{\text{kg combust.}} \right]$. $\Rightarrow$ formula per trovare da me

di altro. $U_{CB} = U_C \cdot m + U_H \cdot m + U_O \cdot z$

UAS

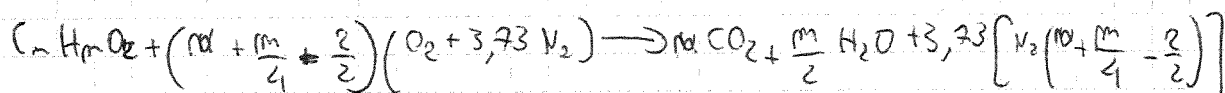
12/5/95



$\uparrow$ tutte le trasformazioni intermedie non si calcolano

28,16 N_2 78% 373 moli

32 O_2 21%



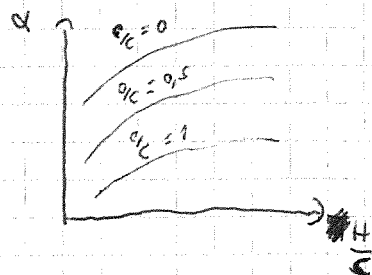
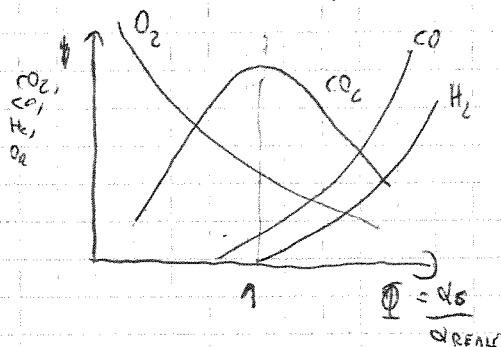
$\Rightarrow$ si riesce a trovare l'esatta portata di ossigeno (stechiometrica)

$$\alpha = \frac{m_{O_2}}{m_{O_2, \text{stechiometrica}}} = \frac{\left(m + \frac{m}{4} - \frac{z}{2} \right) (32 + 3,73 \cdot 28,16)}{12,011m + 1,008m + 16z} \rightarrow U_{CB}$$

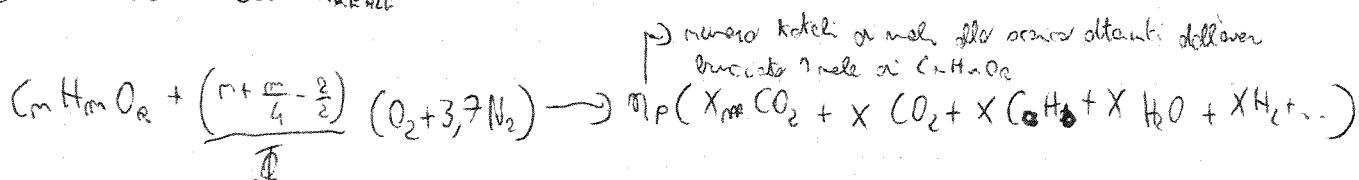
stechiometrica

UAS

Anche la vera dose d'aria potrà essere diversa da α .



Attraverso i dati di prodotti della combustione (misurati alla sonde) si riesce a risalire all' α_{REAL}

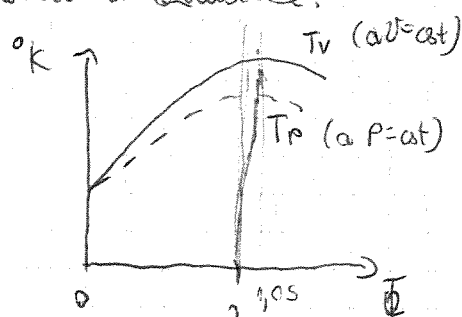


$\Rightarrow$ riesce a trovare le pressioni molari delle sostanze alla sonde.

$$H_i = H_o - 2,5 (U + S H)$$

$\nearrow \frac{k_B H_o}{k_B cal.}$
 $\searrow$ calore totale a sonde
 $\swarrow$ calore coloratore inferiore
 $\searrow$ calore coloratore superiore
 $\searrow \frac{k_B H_2}{k_B cal.}$
 $\searrow \frac{P_{H_2O}}{P_{H_2}}$

Dato una miscela e una certa densità si definisce temperatura calorifica a combustione nella T della quale tutta l'energia ricavata serve ad innalzare la temperatura a combustione.



$\Rightarrow$ miscela leggera ricca $\Rightarrow$ ne serve meno di O_2
 $\Rightarrow$ un po' meno calore specifico $\Rightarrow$ serve un po' di più T .

• L'equazione (7) (lineare de d e 9g non dipendono dalla temperatura), può essere risolta con diversi algoritmi. (E' un sistema di equazioni)

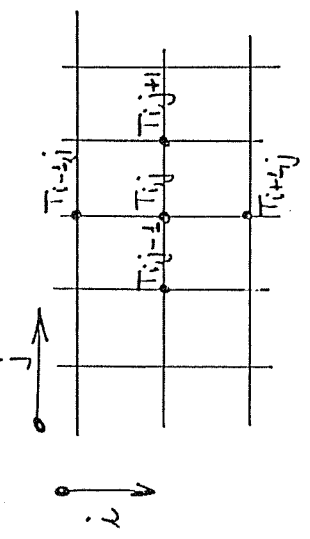
L'equazione (7) deve venir scritta per ogni nodo, interno ed esterno, con le opportune condizioni al contorno (v. avanti).

• La risoluzione del sistema di equazioni (7) può avvenire tramite:

1. Metodi diretti (es. algoritmo di Gauss).
 Vantaggi: il numero di operazioni è predeterminato.
 Svantaggi: Elevata memoria (a meno di ware artific.).
 Errori di round-off (magliature fini e ridotta lunghezza di parola).

2. Metodi iterativi.
CI SI AVVICINA ALLA SOLUZIONE REALE, CERCANDO A OGNI CICLO, CI SI PUO' FORMARE QUANTO SI E' NECESSARIO UNA PRECISIONE SUFFICIENTE
 Vantaggi: poca memoria; meno sensibili alla precisione di macchina.
 Svantaggi: Numero di operazioni non predeterminato (magliature fini).

• Indicizzazione:



• METODO DI JACOBI.

(2 matrici)

• Supponendo siano note le temperature nodali alla n-esima iterazione, le nuove temperature alla (n+1)-esima iterazione vengono calcolate come segue:
(n+1): numero di iterazione

$$T_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4} (T_{i,j+1}^{(n)} + T_{i,j-1}^{(n)} + T_{i+1,j}^{(n)} + T_{i-1,j}^{(n)}) + \frac{q \cdot L^2}{4\lambda} \quad (8)$$

TEMPERATURE INIZIALI A OGNI

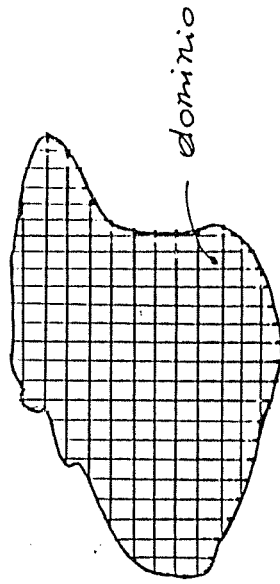
DESS: LA CONVERGENZA E' PIU' VELOCE

• Le iterazioni vanno ripetute fino al valore di convergenza desiderato. (Per la definizione di convergenza v. avanti).

$$T_{i,j} = \frac{1}{4} [T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + T_{i+1,j} + T_{i-1,j}] + \frac{q \cdot L^2}{4\lambda}$$

- Sovrapponiamo al dominio di nostro interesse una "griglia" (o maglia) di calcolo. (Per semplificare la trattazione ^{QUADRANGOLI} diffondiamo a poco costante).

- Ci accontentiamo poi di determinare i valori delle temperature ai nodi. (Problema di f. → Problema algebrico).

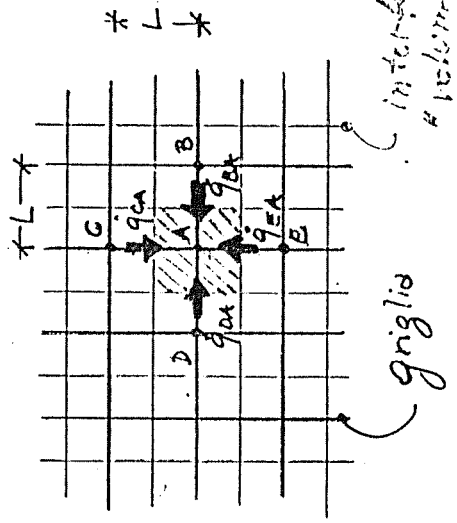


- Trascurando, per ora, ciò che avviene in prossimità del contorno, consideriamo un sottom dominio interno.

3.

IN FORMA DI VETTORE
E 3D VEDI AL FINE

CONSERVARE:
POSITIVA L'ENERGIA
EMISSIONE



OSS: IL RETICOLO DEVE
ESSERE ABBASTANZA
FITTO DA POTER
CONSIDERARE LA
TEMPERATURA COSTANTE
IN UNA CELLA

q: FLUSSE PER UNITA'
DI SUPERFICIE
SI SONO INDICATE
LE COMPONENTI DEL
FLUSSE TERMICO ⊥
ALLA FACCIA, LE
NON INTERESSANO

$[q] = \left[\frac{W}{m^2} \right]$

- Bilancio termico per il volume A:

$$(\dot{q}_{BA} + \dot{q}_{CA} + \dot{q}_{PA} + \dot{q}_{EA}) \cdot L + \dot{q}_g \cdot L^2 = 0 \quad (4)$$

- Dalla legge di FOURIER:

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\text{grad}} T \quad (5)$$

si può scrivere: (APPROSSIMANDO)

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{q}_{BA} \approx -\lambda \frac{T_A - T_B}{L} & ; \quad \dot{q}_{CA} \approx -\lambda \frac{T_A - T_C}{L} \\ \dot{q}_{PA} \approx -\lambda \frac{T_A - T_D}{L} & ; \quad \dot{q}_{EA} \approx -\lambda \frac{T_A - T_E}{L} \end{cases}$$

- Sostituendo le (6) nella (4):

$$T_B + T_C + T_D + T_E - 4T_A = -\frac{\dot{q}_g L^2}{\lambda} \quad (7)$$

AGGIUNGENDO
SEMPLICE SE $\dot{q}_g = 0$

METODI NUMERICI IN CONDUZIONE

EQUAZIONE DI FOURIER ($\lambda = \text{cost.}$)

λ : COEFFICIENTE DI CONDUZIONE TERMICA
VALORE DI COSTANTE
 GENERATO DALL'UNITA' DI CALORE
 PER UNITA' DI TEMPO [W/m²]

$$\lambda \nabla^2 T + qg = \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1) \quad (*)$$

In coordinate cartesiane ortogonali:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\rho c} qg \quad (2)$$

NOTA: SE SUFFICIENTE
 A COSTANTE

Vedremo come risolvere la (2) in due casi semplici:

- CONDUZIONE STAZIONARIA BIDIMENSIONALE A PROPRIETA' COSTANTI
- CONDUZIONE NON-STAZIONARIA MONODIMENSIONALE A PROPRIETA' COSTANTI

(*) LA (1) PUO' ESSERE RICAVATA DALL'EQUAZIONE DELL'ENERGIA PER FLUIDI IN MOTO, PONENDO $\vec{u} = 0$,

$$\lambda \nabla^2 T + qg = \rho c \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

A. CONDUZIONE STAZIONARIA BIDIMENSIONALE.

DERIVATE RISP. A x, y NULLE

L'equazione (2) gia' vista si semplifica nella:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = - \frac{qg}{\lambda} \quad (3)$$

Tale equazione e' detta "di Poisson" (di "LAPLACE" se $qg \equiv 0$).
ES: ELETTRICITA' SOLE

Delle varie metodologie di soluzione della (3) (es. Elementi finiti, Differenze Finite, Metodi Spettrali ecc.), noi considereremo solo il metodo dei VOLUMI FINITI (o "Volumi di Controllo").

A differenza dell'approccio tradizionale alle differenze finite (dallo sviluppo in serie di Taylor), tale metodo presenta due vantaggi:

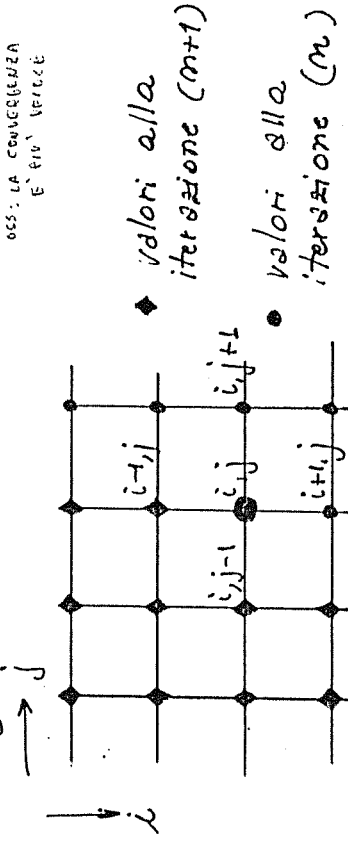
- Schema "perfettamente conservativo".
PERCHÉ IL VALORE DEL PARAMETRO CHE ESCE DA UN VOLUME È ESATTO A INGRESSO NEL SUCCESSIVO VOLUME USATO.
- Non richiede, in generale, la conoscenza delle equazioni differenziali.

• METODO DI GAUSS-SEIDEL (1 PASSAGE)

- Converge più rapidamente del metodo di Jacobi, poiché utilizza nuovi valori di tentativo non appena essi si rendono disponibili (c'è più IMPLICITO).

- Supponendo di procedere in ordine "lessicografico" (per colonne):

OSS: LA CONVERGENZA È PIÙ VELOCE



♦ valori alla iterazione (n+1)

• valori alla iterazione (n)

- Sfruttando "subito" i valori già disponibili, la (8) diventa:

$$T_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4} \left(T_{i,j+1}^{(n)} + T_{i-1,j}^{(n+1)} + T_{i,j-1}^{(n)} + T_{i+1,j}^{(n)} \right) + \frac{q_0 L^2}{4d} \quad (9)$$

• S.O.R. (Successive Over-Relaxation)

Consente di incrementare ulteriormente la velocità di convergenza del metodo di Gauss-Seidel:

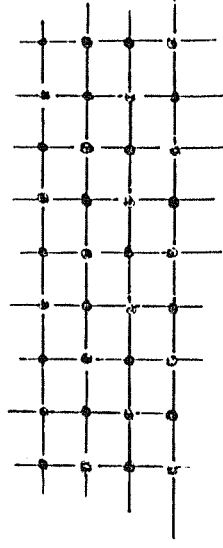
$$T_{i,j}^{(n+1)} = T_{i,j}^{(n)} + \alpha \left\{ \frac{1}{4} (T_{i,j+1}^{(n)} + T_{i-1,j}^{(n+1)} + T_{i,j-1}^{(n)} + T_{i+1,j}^{(n)} + \frac{q_0 L^2}{d}) - T_{i,j}^{(n)} \right\} \quad (10)$$

($\alpha \cong 1.2$)

IL COEFFICIENTE $\alpha \cong 1.7 \div 1.8$ MASSIMA PER LA CONVERGENZA

• ALCUNE OSSERVAZIONI

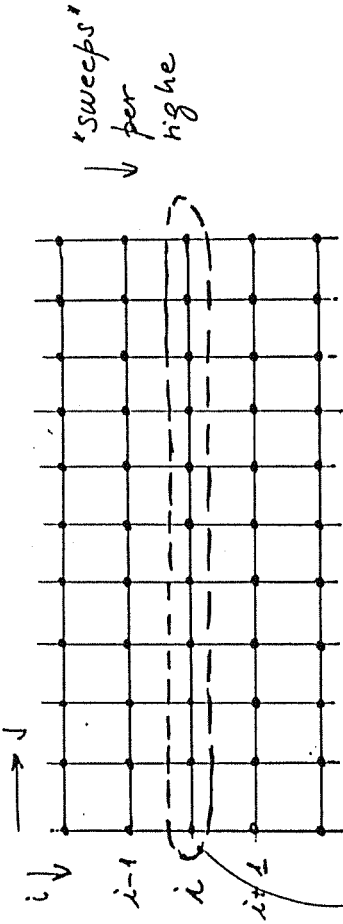
- S.O.R. è più efficiente (minor numero di iterazioni) ("sweeps").
- Il metodo di JACOBI, per contro, è facilmente "vettorizzabile" (es. CRAY, IBM 3090-VF, CONVEX etc.).
- S.O.R. può essere "vettorizzato" ricorrendo ad alcuni artifici, es. "red-black ordering": (Varianti: XSOR, ZEBRA-XSOR etc.)



JUMP THIS OVER!

- S.L.O.R. (Successive line Over-Relaxation).

- Calcola simultaneamente (aggiorna) tutte le variabili su una linea (riga o colonna).



applica SOR, poi procede alla riga successiva

- Tutte le variabili alle righe $i=1, 2, \dots, i-1$ sono già state aggiornate.
- Risolviamo l'equazione (7) già vista, esplicitando gli indici e mettendo in parentesi le variabili che non si trovano sulla riga i :

$$-\frac{1}{4} \frac{(m+1)}{T_{i,j-1}} + \frac{(m+1)}{T_{i,j}} - \frac{1}{4} T_{i,j+1} - \frac{1}{4} [T_{i-2,j} + T_{i+2,j}^{(m)}] = \frac{9\delta L^2}{1} \quad (11)$$

- Per migliorare la convergenza, possiamo pensare di sovrastimare $T_{i+2,j}^{(m)}$, operando la seguente approssimazione:

$$(T_{i+2,j})_{\text{APPR.}} = T_{i+2,j}^{(m)} + (\theta-1) [T_{i+2,j}^{(m+1)} - T_{i+2,j}^{(m)}] \quad (12)$$

$$\approx T_{i+2,j}^{(m)} + (\theta-1) [T_{i,j}^{(m+1)} - T_{i,j}^{(m)}]$$

- Sostituendo la (12) nella (11):

$$-\frac{1}{4} T_{i,j-1}^{(n+1)} + \frac{(m+1)}{T_{i,j}} \left(1 - \frac{1}{4} \theta + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} T_{i,j+1}^{(m+1)} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{4} T_{i+1,j}^{(m)} - \frac{1}{4} (\theta-1) T_{i,j}^{(m)} + \frac{1}{4} T_{i-1,j}^{(m+1)} + \frac{9\delta L^2}{1} \right\} \quad (13)$$

- Sapendo la (13), per ogni nodo e riga i , si ottiene un "sistema tridiagonale a Banda", facilmente risolvibile (v. avanti).

OSSERVAZIONI: è conveniente alternare gli sweeps per righe / colonne.

Difficilissimo da vettorizzare (es. Riduzione Ciclica per elevatissimo numero nodi).

Facilmente "parallelizzabile".

CONDIZIONI AL CONTERNO

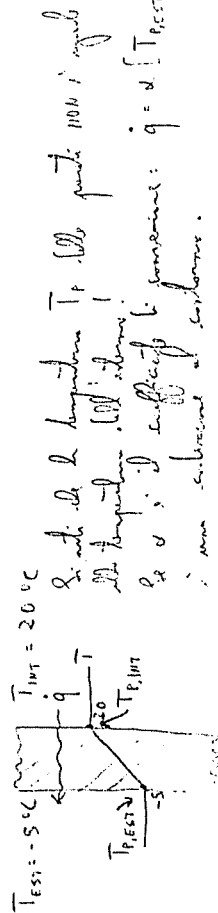
- Le equazioni (8), (9), (10) e (13) sono valide solo per i nodi interni al dominio.
- Per i nodi sul contorno (al fine di chiudere il bilancio # incognite = # equazioni) si procede a seconda del tipo di condizioni al contorno.

1. Temperatura prefissata.

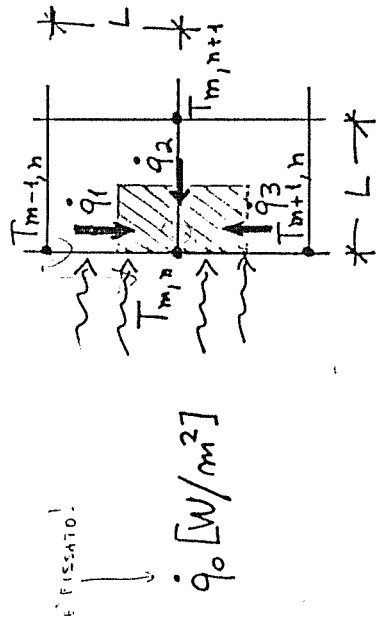
Se f_0 è la temperatura prefissata al nodo (m, n) , l'equazione per il nodo (m, n) diventa:

$$T_{m,n} = f_0 \quad (14)$$

e similmente per tutti gli altri nodi sul contorno per i quali è fissato il valore della temperatura.



2. Flusso termico imposto.



- Scrivendo nuovamente l'equazione di bilancio termico per il volume di figura (Semi-volume):

$$\dot{q}_0 L + \dot{q}_1 \frac{L}{2} + \dot{q}_2 L + \dot{q}_3 \frac{L}{2} + \dot{q}_g \frac{L^2}{2} = 0 \quad (15)$$

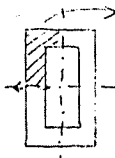
esprimendo nuovamente:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 \approx -1 \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{L}; \\ \dot{q}_2 \approx -1 \frac{T_{m,n} - T_{m+1,n}}{L}; \\ \dot{q}_3 \approx -1 \frac{T_{m,n} - T_{m+1,n}}{L} \end{cases} \quad (16)$$

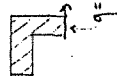
OSS: Si sommo la lunghezza nei calcoli di q .

- Sostituendo le (16) in (15):

$$T_{m,n} = \frac{1}{4} (T_{m-1,n} + 2T_{m,n+1} + T_{m+1,n} + \frac{\dot{q} L^2}{\lambda} + \frac{2\dot{q}_0 L}{\lambda}) \quad (17)$$

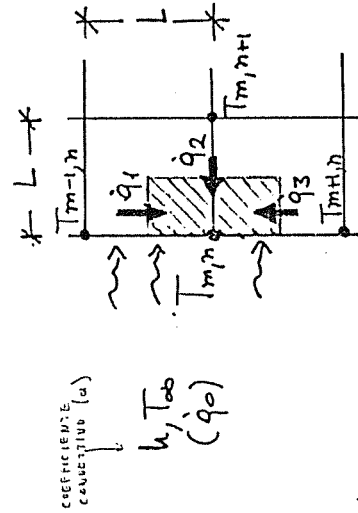


- OSSERVAZIONE: la condizione al contorno di simmetria o di adiabaticità (isolamento termico) e' un caso particolare dello (17) con $\dot{q}_0 = 0$.



3. Condizione al contorno convettiva.

- Consideriamo, per semplicità, una geometria simile alla precedente:



- Valgono ancora le (16).

- In questo caso $\dot{q}_0$ non e' costante, ma e' funzione di $T_{m,n}$:

$$\dot{q}_0 = h \cdot L \cdot (T_\infty - T_{m,n}) \quad (18)$$

dove T_∞ e' la temperatura del fluido a sufficiente distanza dalla parete (in accordo alla definizione di h).

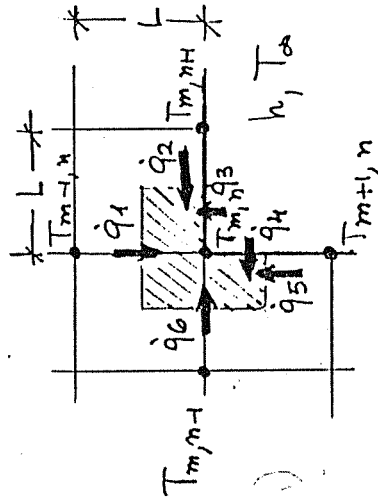
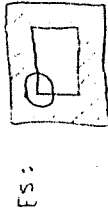
- Riscrivendo l'equazione di bilancio dell'energia, e considerando le (16) e la (18), si ottiene:

$$T_{m,n} = \frac{\lambda}{4\lambda + 2hL} (T_{m-1,n} + 2T_{m,n+1} + T_{m+1,n} + \frac{\dot{q} L^2}{\lambda} + \frac{2hL}{\lambda} T_\infty) \quad (19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{h(T_\infty - T_{m,n})}{\lambda}$$

- ALCUNI CASI PARTICOLARI.

4. Condizione al contorno convettiva per un angolo interno.



- Vediamo, per esercizio, tutti i passaggi scrivendo l'equazione di bilancio dell'energia:

$$\dot{q}_1 L + \dot{q}_2 \frac{L}{2} + \dot{q}_3 \frac{L}{2} + \dot{q}_4 \frac{L}{2} + \dot{q}_5 \frac{L}{2} + \dot{q}_6 L + \dot{q}_8 \frac{3}{4} L^2 = 0 \quad (20)$$

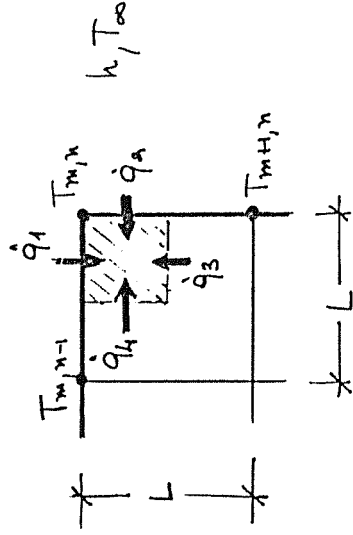
Inoltre:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -1 \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{L}; & \dot{q}_2 &= -1 \frac{T_{m,n} - T_{m,n+1}}{L} \\ \dot{q}_3 &= -h (T_{m,n} - T_{\infty}); & \dot{q}_4 &= -h (T_{m,n} - T_{\infty}) \\ \dot{q}_5 &= -1 \frac{T_{m,n} - T_{m,n+1}}{L}; & \dot{q}_6 &= -1 \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{L} \end{aligned} \quad (21)$$

- Sostituendo le (21) nella (20), si ottiene:

$$T_{m,n} = \frac{1}{6\lambda + 2hL} (2T_{m,n-1} + 2T_{m,n+1} + T_{m,n+1} + T_{m,n+1} + \frac{2hL}{\lambda} T_{\infty} + \frac{\dot{q}_8}{\lambda} \cdot \frac{3}{2} L^2) \quad (22)$$

5. Condizione al contorno convettiva per un angolo esterno.

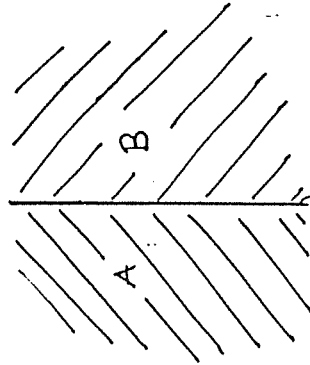


- Procedendo come già visto per gli altri casi, si ottiene:

$$T_{m,n} = \frac{1}{2hL + 2\lambda} (T_{m,n-1} + T_{m,n+1} + \frac{2hL}{\lambda} T_{\infty} + \frac{\dot{q}_8}{\lambda} \cdot \frac{L^2}{2}) \quad (23)$$

- CASO DI BRUSCHE VARIAZIONI DELLA CONDUCEBILITA' TERMICA,

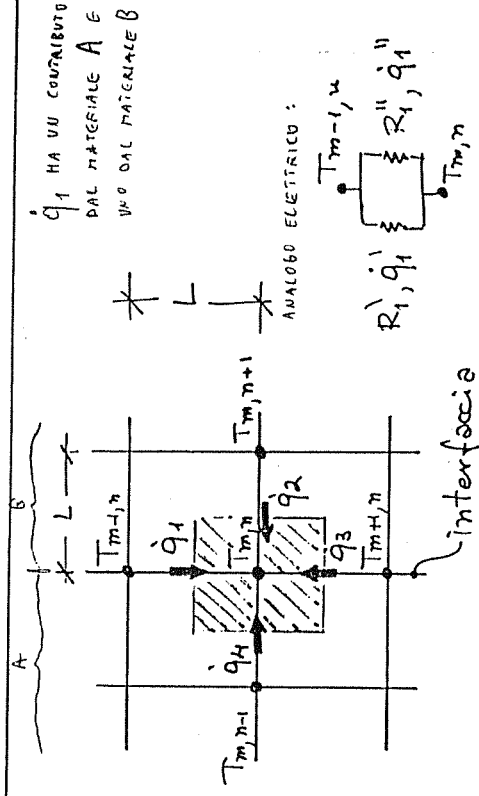
- Il caso di brusche variazioni della conducibilità termica è molto comune.
- Consideriamo, per esempio, due materiali A e B aventi conducibilità λ_A e λ_B :



Interfaccia

(ne trascuriamo la resistenza termica) CONTATTO PERFETTO TRA I MATERIALI

- Procediamo come al solito, supponendo che il nodo si trovi proprio sull'interfaccia. (LA TEMPERATURA DEVE ESSERE UGUALE SULL'INTERFACCIA)



- Bilancio dell'energia:

$$\dot{q}_1 L + \dot{q}_2 L + \dot{q}_3 L + \dot{q}_4 L = 0 \quad (24)$$

- Si può fare un'ipotesi di scomposizione $\dot{q}_1$ e $\dot{q}_3$ nel seguente modo:

$$\dot{q}_1 = \frac{\dot{q}_1' + \dot{q}_1''}{2} ; \quad \dot{q}_3 = \frac{\dot{q}_3' + \dot{q}_3''}{2} \quad (25)$$

con:

$$\begin{cases} \dot{q}_1' = - \lambda_A \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{L} \\ \dot{q}_1'' = - \lambda_B \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{L} \end{cases} \quad (26)$$

ed analoghe relazioni per $\dot{q}_3'$ e $\dot{q}_3''$.

- Sviluppando si ricava:

(L'ESPRESSIONE GARANTISCE LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA: $\dot{q}_{in} = \dot{q}_{out}$)

$$T_{m,n} = \frac{1}{4} (T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + \frac{2\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \cdot T_{m,n+1} + \frac{2\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} T_{m,n-1} + \frac{2\dot{q}_g L^2}{\lambda_A + \lambda_B}) \quad (27)$$

- Verifichiamo la validità della (27) per due casi limite già visti.

A) $\lambda_A \equiv \lambda_B \equiv \lambda$

Si ricava l'espressione standard:

$$T_{m,n} = \frac{1}{4} (T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + \frac{\dot{q}_g L^2}{\lambda}) \quad (28)$$

B) $\lambda_A \gg \lambda_B$ (materiale B termoisolante)

Si ricava:

$$T_{m,n} = \frac{1}{4} (T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + 2T_{m,n-1} + \frac{2\dot{q}_g L^2}{\lambda_A}) \quad (29)$$

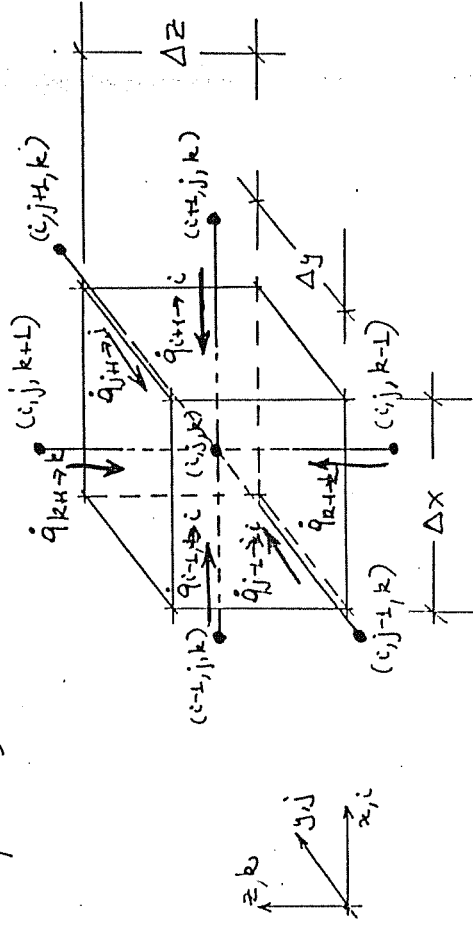
Ponendo $\dot{q}_g \equiv 0$ tale relazione coincide con la (17) per $\dot{q}_0 \equiv 0$, cioè condizione di adiabaticità.

A1 CONDUZIONE STAZIONARIA TRIDIMENSIONALE [CENNI]

- L'equazione (2) si semplifica nella:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = - \frac{\dot{q}_g}{\lambda} \quad (A1.1)$$

- Sovrapposizione, al dominio di interesse, una "griglia" di calcolo tridimensionale.
- Per semplicità di trattazione, supponiamo la griglia a passo costante in tutte le 3 direzioni: $L = \Delta x = \Delta y = \Delta z$.
- Consideriamo un "sottodomínio" (cella o volume finito) interno:



- Bilancio termico per il volume elementare:

$$\sum_{l=1}^6 \dot{q}_{l \rightarrow i,j,k} L^2 + \dot{q}_g L^3 = 0 \quad (A1.2)$$

- Esplicitando i flussi termici:

$$\dot{q}_{i \rightarrow i} = -\lambda \frac{T_{ijk} - T_{i+1,j,k}}{L}; \quad \dot{q}_{i-1 \rightarrow i} = -\lambda \frac{T_{ijk} - T_{i-1,j,k}}{L};$$

$$\dot{q}_{j \rightarrow j} = -\lambda \frac{T_{ijk} - T_{i,j+1,k}}{L}; \quad \dot{q}_{j-1 \rightarrow j} = -\lambda \frac{T_{ijk} - T_{i,j-1,k}}{L};$$

$$\dot{q}_{k \rightarrow k} = -\lambda \frac{T_{ijk} - T_{i,j,k+1}}{L}; \quad \dot{q}_{k-1 \rightarrow k} = -\lambda \frac{T_{ijk} - T_{i,j,k-1}}{L};$$

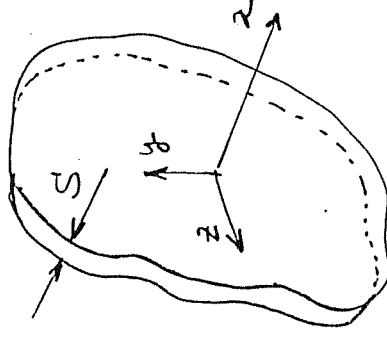
- Si ottiene la seguente relazione:

$$T_{i+1,j,k} + T_{i-1,j,k} + T_{i,j+1,k} + T_{i,j-1,k} + T_{i,j,k+1} + T_{i,j,k-1} - 6 T_{i,j,k} + \frac{q_p}{\lambda} L^3 = 0 \quad (A1.3)$$

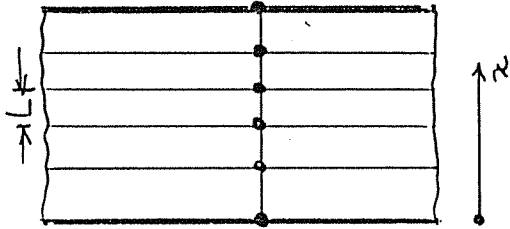
- La (A1.3) può essere risolta facendo uso di uno dei metodi iterativi già visti.
- Alternativamente, per domini "semplici" (rettangolari), facendo ricorso a "solvers" diretti dedicati (es. package FISHPACK).

B. CONDUZIONE NON-STAZIONARIA MONODIMENSIONALE, -

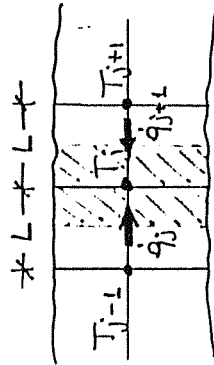
- E' il caso tipico di una piastra "infinita" (cioe' dimensioni lungo 2 assi cartesiani molto maggiori di quella lungo il terzo), soggetta a diverse condizioni al contorno e con l'eventuale presenza di generazione interna di calore.



- Consideriamo una qualunque sezione parallela all'asse x, a cui associamo una "griglia" unidimensionale a passo costante.



- Consideriamo ora un nodo interno assieme a quelli immediatamente vicini.



- Scrivendo il bilancio termico, si deve tenere presente che il problema è non-stazionario; esprimiamo perciò tale bilancio per un intervallo di tempo $(t, t + \Delta t)$:

non variando l'intervallo Δt

$$\Delta t \cdot \dot{q}_j + \Delta t \cdot \dot{q}_{j+1} + \Delta t \cdot \dot{q}_g \cdot L = \rho \cdot c \cdot L \cdot (T_j|_{t+\Delta t} - T_j|_t) \quad (30)$$

$$\dot{q} \cdot L = \rho \cdot c \cdot L^2 \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$q \Delta T = \rho c L \Delta T$$

- Si tratta ora di valutare concretamente i flussi $\dot{q}_j$ e $\dot{q}_{j+1}$.

- Potremmo pensare di valutare ambedue all'istante t :

$$(31) \quad \dot{q}_j^A = -\lambda \frac{T_j - T_{j-1}}{L} \Big|_t$$

- Oppure all'istante $(t + \Delta t)$:

$$(32) \quad \dot{q}_j^B = -\lambda \frac{T_j - T_{j-1}}{L} \Big|_{t+\Delta t}$$

(Analoghe relazioni per $\dot{q}_{j+1}$)

- Nel caso più generale possiamo pensare di utilizzare una "media pesata" delle due alternative, tramite un parametro θ :

$$0 \leq \theta \leq 1$$

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \theta \dot{q}_j^B + (1-\theta) \dot{q}_j^A \\ \dot{q}_{j+1} = \theta \dot{q}_{j+1}^B + (1-\theta) \dot{q}_{j+1}^A \end{cases} \quad (33)$$

$$T_e = \frac{\alpha L}{\sigma T^2}$$

23

2.

• La discretizzazione (griglia) va introdotta anche nel dominio del tempo.

• A tal fine, introduciamo un nuovo pedice p per indicare il tempo:

$$t = p \cdot \Delta t \quad (34)$$

• Con tale notazione:

$$\dot{q}_j^A = -1 \frac{T_{ji} - T_{ji-1}}{L}; \quad \dot{q}_j^B = -1 \frac{T_{ji} - T_{ji+1}}{L}$$

$$(35) \quad \dot{q}_{j+1}^A = -1 \frac{T_{ji} - T_{ji+1}}{L}; \quad \dot{q}_{j+1}^B = -1 \frac{T_{ji+1} - T_{ji+2}}{L}$$

• Esplicitando nella (30) ed introducendo le seguenti definizioni:

$$\frac{p \cdot c}{\lambda} = \frac{1}{\alpha^2} \quad (36)$$

$$\frac{L^2}{\alpha^2 \cdot \Delta t} = \frac{1}{F_0} \quad (37)$$

$\alpha = \alpha^2 = \text{DIFFUSIVITA' TERMICA (proprietà materiale)}$

$F_0 = \text{No. di FOURIER (tempo adimensionale)}$
 $\rightarrow$ non è sufficiente a valutare le proprietà materiali, ma solo alla gestione considerate.

$$\begin{aligned} & \partial \cdot T_{p+1,j-1} + \left(-2\partial - \frac{1}{F_0}\right) T_{p+1,j} + \partial \cdot T_{p+1,j+1} = \quad (38) \\ & = -\frac{\partial^2}{\lambda} L^2 + (\partial - 1) (T_{p,j-1} - T_{p,j}) + (\partial - 1) (T_{p,j+1} - T_{p,j}) - \frac{1}{F_0} T_{p,j} \end{aligned}$$

• Vediamo 3 casi particolari.

A) $\partial = 0$ - METODO ESPPLICITO. $\dot{q}_i^A = -1 \frac{T_i^A - T_{i-1}^A}{L}$

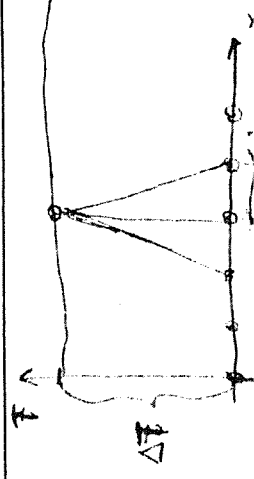
• La (38) diventa:

$$T_{p+1,j} = F_0 (T_{p,j-1} + T_{p,j+1} + \frac{\partial^2}{\lambda} L^2) + T_{p,j} (1 - 2F_0) \rightarrow \text{se } (1 - 2F_0) < 0 \quad (39)$$

CRITERIO DI STABILITÀ! $\Rightarrow$ valore critico di F_0 prime. $\Rightarrow$ il valore p è più piccolo del p_{crit} nel tipo di ∂ scelto.

Il coefficiente relativo al valore della temperatura del nodo in esame al precedente istante dev'essere maggiore o uguale a 0.

$$(1 - 2F_0) \geq 0 \Rightarrow \boxed{F_0 \leq \frac{1}{2}} \quad (40)$$



- NOTA: la (40) vale solo per i nodi interni al dominio; si ricaveranno relazioni diverse per i nodi nel contorno (v. avanti). Per il problema si rilegna' il numero dei 3:

$$F_0 \leq \min(L_{SN}, L_{DS}, 1/2) \quad (41)$$

- VANTAGGI:
- Non richiede la soluzione di un sistema di equazioni algebriche ad ogni passo temporale.
 - Conveniente per "fenomeni di breve durata", cioè tali che l'accesa densità temporale del fenomeno richieda un intervallo di tempo minore del limite di stabilità.
 - Facilmente vettorizzabile.

- SVANTAGGI:
- Limite su Δt per ragioni di stabilità numerica.
 - Non conveniente per l'analisi di fenomeni di "lunga durata" (v. sopra).

B) $\theta = 1$ - METODO IMPLICITO.

- La (38) diventa:

$$\begin{aligned} (-F_0) T_{p+1,j-1} + (1+2F_0) T_{p+1,j} + (-F_0) T_{p+1,j+1} = \\ = \frac{98}{\lambda} L^2 F_0 + T_{p,j} \end{aligned} \quad (42)$$

- La nuova temperatura del nodo j ($T_{p+1,j}$) dipende dalle nuove temperature dei nodi vicini, in generale (a parte il contorno con temperatura prefissata) incognite.
- Si ottiene un sistema di equazioni triangolare a banda, da risolvere ad ogni passo temporale.

- VANTAGGI:
- Incondizionatamente stabile per $\forall \Delta t$ (F_0).
 - Conveniente per fenomeni di "durata elevata".

- SVANTAGGI:
- Richiede la soluzione di un sistema di equazioni ad ogni passo temporale.
 - Difficilmente vettorizzabile.

c) $\theta = \frac{1}{2}$ - METODO IMPLICITO - ALGORITHM DI CRANK-NICHOLSON.

• La (38) diventa:

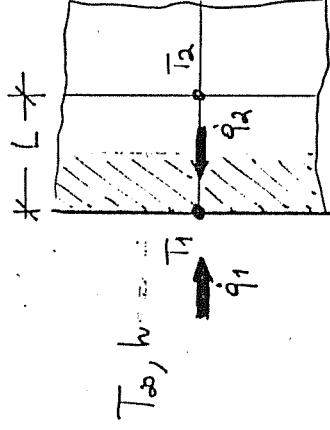
$$(-T_0)T_{p+1,j-1} + (2+2T_0)T_{p+1,j} + (-T_0)T_{p+1,j+1} = \\ = T_0 \left\{ T_{p,j-1} + T_{p,j+1} + \frac{q_1^2}{1} \cdot 2L^2 \right\} + (2-2T_0) \cdot T_{p,j} \quad (43)$$

• Vantaggi e svantaggi analoghi al caso B), con le seguenti differenze:

- Maggiore accuratezza a parità di $T_0 (\Delta t)$
- Richiede un maggiore numero di operazioni aritmetiche per la valutazione del termine noto.

CONDIZIONI AL CONTORNO.

- L'applicazione delle condizioni al contorno è analoga a quanto visto nel caso stazionario.
- Vediamo, ad esempio, di influenzare la condizione al contorno convettiva per il metodo implicito ($\theta = 1$).



• Bilancio dell'energia per il nodo 1:

$$\Delta t \cdot \dot{q}_1 + \Delta t \cdot \dot{q}_2 + \Delta t \cdot \dot{q}_2 \frac{L}{2} = \\ = \rho c \frac{L}{2} (T_1|_{t+\Delta t} - T_1|_t) \quad (44)$$

dove:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{q}_1 &= -h (T_{p+1,1} - T_\infty) \\ \dot{q}_2 &= -1 \frac{T_{p+1,2} - T_\infty}{L} \end{aligned} \right. \quad (\theta=1) \quad (45)$$

- Sfruttando, e definendo:

$$Bi = \text{No. di Biot} = \frac{hL}{\lambda} \quad (46)$$

(Bi è il rapporto fra il salto termico nella lamina di spessore L e la differenza di temperatura fra la superficie del solido ed il fluido).

- Si ottiene:

$$\begin{aligned} & (2Bi \cdot Fo + 1) T_{p+1,1} + (-2Fo) T_{p+1,2} = \\ & = Fo \left(\frac{q_2}{\lambda} L^2 + 2Bi \cdot T_{\infty} \right) + T_{p,1} \end{aligned} \quad (47) \quad (*)$$

- Ad analoghe espressioni si perviene per gli altri valori di i .
- Procedimento analogo per le altre condizioni al contorno.
- Per il caso $T_1 = \text{fissato}$, in via generale, "l'equazione" per il nodo 1:

$$(1) T_{p+1,1} + (0) T_{p+1,2} = T_{fiss.} \quad (48)$$

CENNI SULLA SOLUZIONE DEL SISTEMA DI EQUAZIONI. -

- Qualunque eliminazione di Gauss (non rende alcun pivoting: dominanza diagonale).
- SISTEMI TRIDIAGONALI A BANDA.

$$[A] \cdot \{T\} = \{C\} \quad (49)$$

$\{T\}$ = vettore incognite

$\{C\}$ = vettore termini noti

$[A]$ = matrice coefficienti

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \phi & \phi & \dots & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \phi & \phi & \dots & \dots \\ \phi & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \phi & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Sono $\neq \phi$ solo la diagonale principale e le due diagonali adiacenti.

• ALGORITMO DI THOMAS -

- L'equazione generale per il nodo interno:

$$(50) \quad a_j T_{j-1} + b_j T_j + c_j T_{j+1} = f_j \quad (j=2, \dots, n-1)$$

e le equazioni per i nodi ai contorni saranno del tipo:

$$\begin{cases} b_1 T_1 + c_1 T_2 = f_1 \\ a_n T_{n-1} + b_n T_n = f_n \end{cases} \quad (51)$$

- Ipotesizziamo l'esistenza di una relazione ricorsiva del tipo:

$$T_{j+1} = \alpha_{j+1} T_j + \beta_{j+1} \quad (52)$$

sarà pure:

$$T_j = \alpha_j T_{j-1} + \beta_j \quad (53)$$

da cui: $T_{j-1} = \frac{1}{\alpha_j} T_j - \frac{\beta_j}{\alpha_j} \quad (54)$

- Sostituiamo la (52) e (54) nella (50).

$$T_j \left(\frac{a_j}{\alpha_j} + b_j + c_j \alpha_{j+1} \right) + (-a_j \frac{\beta_j}{\alpha_j} + c_j \beta_{j+1} - f_j) = 0 \quad (55)$$

- Poiché la (55) deve valere per $\forall T_j$, ambedue i termini devono essere nulli:

$$\begin{cases} \frac{a_j}{\alpha_j} + b_j + c_j \alpha_{j+1} = 0 \\ -a_j \frac{\beta_j}{\alpha_j} + c_j \beta_{j+1} - f_j = 0 \end{cases} \quad (56)$$

da cui otteniamo delle formule ricorsive per calcolare α_j e β_j :

$$\begin{cases} \alpha_j = - \frac{a_j}{b_j + c_j \alpha_{j+1}} \\ \beta_j = \alpha_j \frac{c_j \beta_{j+1} - f_j}{a_j} = - \frac{c_j \beta_{j+1} - f_j}{b_j + c_j \alpha_{j+1}} \end{cases} \quad (57)$$

- In particolare, al nodo n :

$$b_n T_n + a_n T_{n-1} = f_n \Rightarrow T_n = - \frac{a_n}{b_n} T_{n-1} + \frac{f_n}{b_n}$$

che, confrontata con la (52):

$$\alpha_n = - \frac{a_n}{b_n} ; \quad \beta_n = \frac{f_n}{b_n} \quad (58)$$

• Algoritmo:

- ① Con le (58) calcolo α_n e β_n
- ② Con le (57) calcolo α_j, β_j
per $j = n-1, n-2, \dots, 1$.
- ③ Poiché $\alpha_1 \equiv \phi \Rightarrow \alpha_1 = \phi$ e
quindi:

$$T_1 = \beta_1$$

- ④ Con le (52) calcolo T_j ,
per $j = 2, 3, \dots, n$.

- Routine molto semplice ed efficiente.
(Sorgenti FORTRAN e C
disponibili).

CRAY X-MP/14 CDC UTS:

TRID $\Rightarrow$ Specifica per l'architettura
CRAY X-MP.

Algoritmo: Combinazione di
"Burn-at-both-ends" e Riduzione
Ciclica di ordine 3, con $N_{\text{outoff}} = 40$.

SUBROUTINE TDMA(AA,BB,CC,DD,XX,MST,MEN)

Solve a tridiagonal system of equations
with Thomas Algorithm (no Pivoting neither
Cyclic Reduction).

U S A G E :

INPUT:

AA = Main diagonal coefficient array
BB = Upper diagonal coefficient array
CC = Lower diagonal coefficient array
DD = R.H.S. array
XX = Solution array
MST = Subscript of first equation (node)
MEN = Subscript of last equation (node)

OUTPUT:

XX = Solution array

PARAMETER (MAXNODE = 20)
DIMENSION AA(*),BB(*),CC(*),DD(*),
 XX(*),P(MAXNODE),Q(MAXNODE)

P(MST) = - BB(MST)/AA(MST)
Q(MST) = DD(MST)/AA(MST)

DO 10 I = MST+1, MEN
 API = AA(I)+CC(I)*P(I-1)
 P(I) = -BB(I)/API
 Q(I) = (DD(I)-CC(I)*Q(I-1))/API
10 CONTINUE

XX(MEN) = Q(MEN)

DO 20 J = MEN-1, MST, -1
 XX(J) = P(J)*XX(J+1)+Q(J)
20 CONTINUE

RETURN
END

```

/* tridi_sol()
-----
Solve a tridiagonal system of equations with
Thomas Algorithm
-----
U S A G E :
-----
aa = address of first coefficient
of main diagonal
bb = address of first coefficient
of upper diagonal
cc = address of first coefficient
of lower diagonal
dd = address of first value of
R.H.S.
xx = address of first value of
solution vector
n_node = (integer) number of nodes (unknowns)
-----
*/
void tridi_sol(aa, bb, cc, dd, xx, n_node)
double *aa, *bb, *cc, *dd, *xx;
int n_node;
{
    double temp_var1; /* Temporary variable */

    int i = 1; /* Index */

    double p[MAXNODE], q[MAXNODE]; /* Scratch arrays */

    double *ptr = &p[0], *qtr = &q[0]; /* Pointers */

    /* Triangularization
    */
    /* Compute value of scratch */
    *ptr = - *bb / *aa; /* arrays at first node */
    *qtr = *dd / *aa;

    while (i++ < n_node)
    {
        temp_var1 = *(++aa) + (*(++cc) * *ptr);
        *(++ptr) = - *(++bb) / temp_var1;
        *(qtr+1) = (*(++dd) - (*cc * *qtr)) / temp_var1;
        qtr++;
    }

    /* Back-substitution
    */
    /* set xx pointer to the address of last node */
    xx += n_node-1; /* set the value pointed by xx */
    *xx = *qtr; /* set the index value to (LAST-1) node */
    i -= 2;

    while (i-- >= 0)
    {
        *xx-- = (*(--ptr) * *xx) + (*(--qtr));
        *xx--;
    }
}

```

CENNI SUI CRITERI DI CONVERGENZA (2D).

Vediamo alcune alternative.

$$\textcircled{1} \quad T_{i,j} : \left| \frac{T_{i,j}^{(k+1)} - T_{i,j}^{(k)}}{T_{i,j}^{(k)}} \right| \leq \varepsilon$$

PRO: E' normalizzato rispetto al
Valore di T.

CONTRO: Rapido da calcolare.

CONTR: Non applicabile per $T_{i,j} \sim \phi$.

$$\textcircled{2} \quad T_{i,j} : |T_{i,j}^{(k+1)} - T_{i,j}^{(k)}| \leq \varepsilon$$

PRO: Rapido da calcolare.

CONTRO: Non "normalizzato" - che valore
dare dare a ε ?

$\textcircled{3}$ Norma Euclidea del Residuo:

$$\|R\|^0 = \left[\sum_{i,j} \left\{ \frac{1}{4} (T_{i,j+1}^{(0)} + T_{i-1,j}^{(0)} + T_{i,j}^{(0)} + T_{i,j-1}^{(0)}) + \frac{9g^2 L^2}{4} \frac{(c_0)^2}{T_{i,j}^{(0)}} \right\}^2 \right]$$

$\|R\|^0$ = "residuo" iniziale

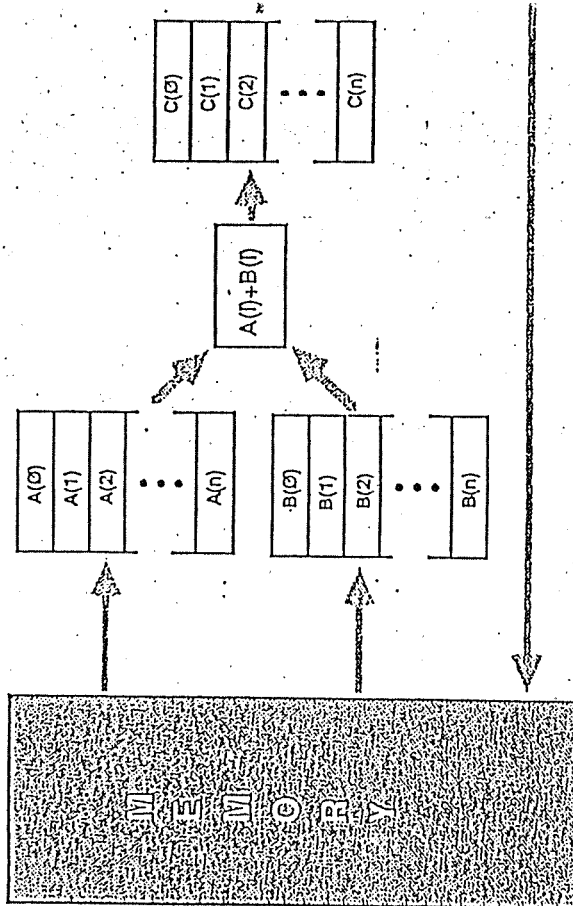
$$\|R\|^k = \left[\sum_{i,j} \left\{ \frac{1}{4} (T_{i,j+1}^{(k)} + T_{i-1,j}^{(k)} + T_{i,j}^{(k)} + T_{i,j-1}^{(k)}) + \frac{9g^2 L^2}{4} \frac{(c_k)^2}{T_{i,j}^{(k)}} \right\}^2 \right]$$

• Convergenza per $\|R\|^k \leq f \|R\|^0$

PRO: Normalizzato; valido a valore $T_{i,j}$.

CONTRO: Notevole sforzo computazionale.

Vector Processing



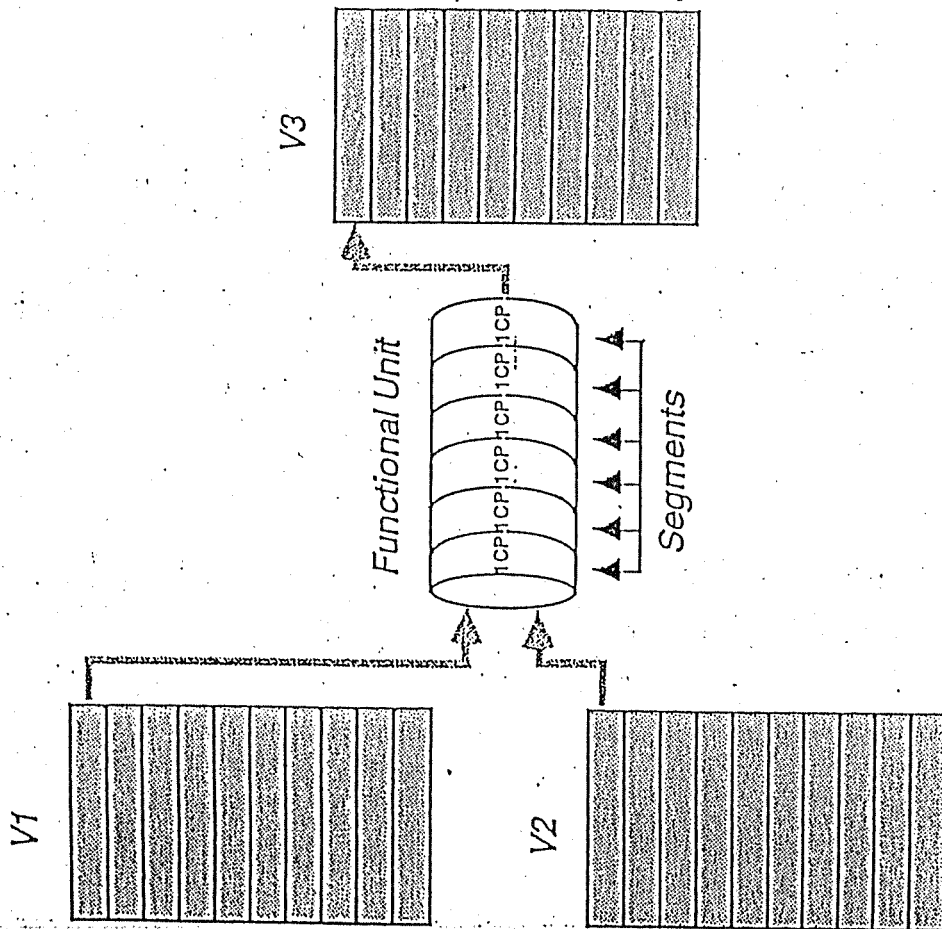
Cray Assembler Language (CAL) example:

(Note that more instructions are required in order to set up the vectors.)

A7	64	Store the value 64 in A7
VL	A7	Make the vector length 64
A0	VECTOR1	Put the address of VECTOR1 in A0
V1	,A0,1	Copy the 64 elements at A0 to V1
A0	VECTOR2	Put the address of VECTOR2 in A0
V2	,A0,1	Copy the 64 elements at A0 to V2
V3	V1+V2	Add V1 to V2 and store result in V3
A0	VECTOR3	Put the address of VECTOR3 in A0
,A0,1	V3	Copy the 64 elements in V3 to the address stored in A0

Pipelining

37

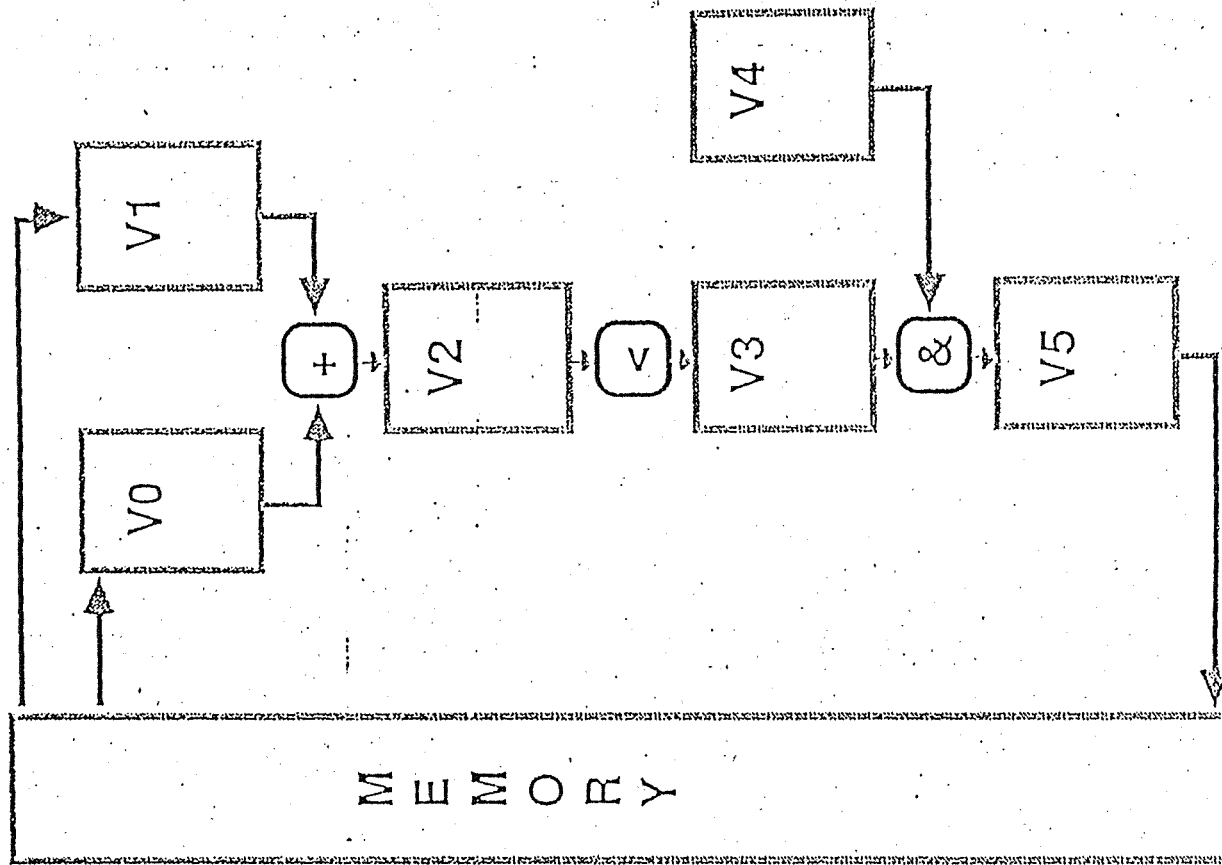


September 4, 1987

2 - 9

Chaining on the X-MP

38



September 4, 1987

2 - 11