

Capitolo 1

Introduzione

Scopo del capitolo

Scopo del capitolo è di richiamare le nozioni di base della termo-fluidodinamica e di porle in una forma classicamente adatta alla trattazione della Fluidodinamica Comprimibile quasi-unidimensionale.

L'enfasi è posta sulla descrizione del fluido, con le relative equazioni termodinamiche, e sull'accoppiamento di queste con le equazioni classiche della Fluidodinamica.

Dopo aver definito le equazioni di interesse, nelle varie forme, saranno descritti gli stati termo-fluidodinamici di riferimento (per la ovvia descrizione adimensionale dei parametri del moto), la stima – a priori – dell'entità della comprimibilità del regime di moto e le caratteristiche dei moti adiabatico-isentropici.

Indice del capitolo

Paragrafo/sottoparagrafo	pag.
1.1 Compressibilità/Comprimibilità	2
1.2 Velocità delle piccole perturbazioni	4
1.3 Propagazione dei disturbi di pressione	5
1.4 Effetti sui campi di moto	7
1.5 Criteri di comprimibilità (*)	8
1.6 Le equazioni della gasdinamica	10
1.6.1 Equazioni di stato	10
1.6.2 Definizione del numero di Mach	11
1.6.3 Pressione dinamica	11
1.6.4 Funzione Impulso totale	11
1.6.5 Equazioni di bilancio	12
1.6.5.1 Continuità:	12
1.6.5.2 Quantità di Moto	13
1.6.5.3 Energia	13
1.6.5.4 Entropia	14
1.7 Stati di riferimento	14
1.8 Stati Isentropici (Flussi adiabatici/isentropici)	16
1.8.1 Relazioni tra variazioni Area/Velocità	19
1.8.2 Correzioni di compressibilità	21
1.9 Ausili per Calcoli (tabelle virtuali)	22
1.10 Check-Out	24

1.1 COMPRESSIBILITÀ/COMPRIMIBILITÀ

Abbiamo già visto, nel corso di Fluidodinamica, che la **compressibilità** ovvero la **comprimibilità** (ormai entrambi i termini sono accettati dal De Mauro) è una proprietà termodinamica del mezzo, misurabile tramite il coefficiente di compressibilità (isentropico) definito come:

$$k_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s \quad (1.1)$$

La **compressibilità** è quindi una **proprietà del fluido**; tutti i mezzi (fluidi e solidi) sono variamente compressibili e l'entità della compressibilità dipende dal modello termodinamico che li descrive e dalle condizioni termodinamiche in cui versano.

Ad esempio per un gas descritto dal modello di gas piuccheperfetto, il coefficiente di compressibilità k_s è funzione della pressione e varia puntualmente con l'inverso del valore da questa assunto.

Ma per considerare comprimibile un campo di moto occorre che gli effetti della compressibilità siano significativi se comparati ad un altro effetto fondamentale.

Ne consegue che **la comprimibilità del moto deve essere misurata da un numero adimensionale** che, come noto, è dato dal **numero di Mach**.

Una rozza dimostrazione può essere tratta dal considerare per moti isentropici il rapporto tra la causa fluidodinamica della variazione di pressione (proporzionale al quadrato di velocità, vedi Bernoulli) e l'effetto derivante dalla risposta termodinamica (coefficiente di compressibilità) si ritrova:

$$\frac{(\Delta p)_{\text{fluid}}}{(\Delta p)_{\text{term}}} \approx \frac{\frac{1}{2} \rho V^2}{\frac{\Delta p}{\rho k_s}} = \frac{\frac{1}{2} \rho V^2}{\Delta p} \frac{1}{a^2} \propto \left(\frac{V}{a} \right)^2 = M^2 \quad (1.2)$$

$$\text{Memo: } a^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = \frac{\rho}{k_s}$$

Ovvia quindi la distinzione tra compressibilità del fluido (parametro termodinamico) e la comprimibilità di un campo di moto (caratteristica termo-fluido-dinamica).

Se la comprimibilità è significativa (vedremo che questo avverrà allorché $M^2 > 0.1 \rightarrow M > 0.3$) ad una variazione infinitesima di pressione dp corrisponderà una variazione di densità data da:

$$dp = \rho k_s dp \quad (1.3)$$

Le variazioni di densità, in flussi comprimibili, sono quindi così collegabili alle variazioni di pressioni.

Per poter meglio apprezzare le conseguenze di questa osservazione, che appare molto semplice, è opportuno richiamare il cosiddetto **teorema di Bernoulli generalizzato**, che discende direttamente dal teorema di Crocco, sotto le ipotesi di flusso stazionario, omoentalpico:

$$\boxed{h + \frac{1}{2} V^2 = H = \text{costante}} \quad (1.4)$$

Ricordando [consulta eventualmente l'Appendice A se hai bisogno di qualche ripasso di Termodinamica] la definizione dell'entalpia termodinamica: $h \equiv u + p v$ (stavolta la pressione è una variabile termodinamica) e considerando un gas p.c.p. :

$$R = c_p - c_v, \quad \gamma = c_p / c_v, \quad h = c_p T, \quad p = \rho R T, \quad a^2 = \gamma R T \quad (1.5)$$

Ne discende che per un **moto comprimibile** il teorema di Crocco prende la forma:

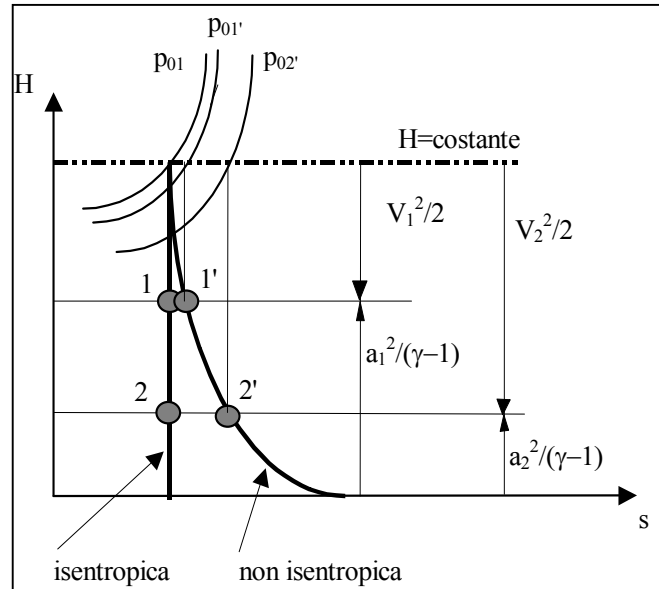
$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 = H \quad , \quad \frac{1}{\gamma-1} a^2 + \frac{1}{2} V^2 = H \quad (1.6)$$

Nei moti comprimibili ogni particella subisce una trasformazione termo-fluidodinamica in cui ad ogni valore (ed ogni variazione) della velocità "V" è connesso un valore (ed una variazione) della velocità del suono "a" e conseguentemente di tutte le altre variabili termodinamiche "p, ρ, s, T".

Questa trasformazione può essere rappresentata in un piano termodinamico di Mollier "esteso": $H=h+V^2/2$, s.

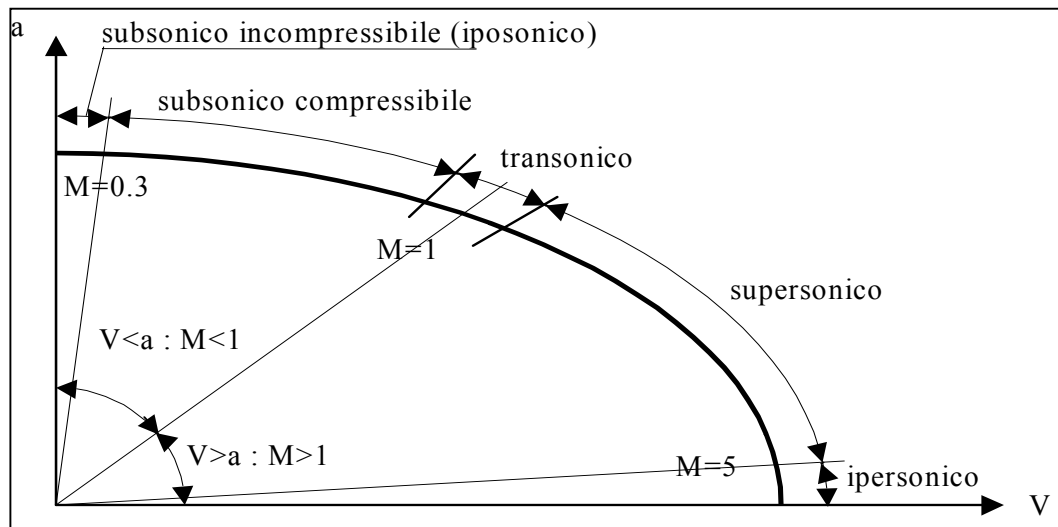
In questo piano due stati termofluidodinamici "1" e "2" devono giacere su una certa curva (isentropica o non isentropica) ma sottostare al vincolo energetico del teorema di Crocco:

vincolo, tra la velocità del fluido e la velocità del suono, che deve valere in ogni punto del campo di moto.



E' interessante raffigurare questo vincolo nel piano V,a.

In questo piano (ovviamente ciò vale soltanto per i campi stazionari ed adiabatici), il vincolo rappresenta



l'equazione di un'ellisse, e la pendenza delle rette che si emanano dall'origine è pari all'inverso del numero di Mach : $M = V / a$.

Il diagramma può essere utile per illustrare una "**classificazione termo-fluidodinamica**" dei vari regimi di moto.

Analizzando questo diagramma possiamo ritrovare le seguenti tipicità (di tipo termodinamico) per i vari regimi di moto classificati.

Nota bene: i limiti numerici per il numero di Mach sono semplicemente indicativi.

- **Moto incompressibile ($0 < M < 0.3$):** La velocità è molto piccola rispetto a quella del suono; la velocità del suono è praticamente costante; il numero di Mach varia essenzialmente con "V".

- **Moto subsonico comprimibile ($0.3 < M < 0.8 \approx M_{\text{critico}}$):** La velocità del fluido è minore di quella del suono, ma i loro valori sono comparabili; le variazioni del numero di Mach dipendono principalmente da "V" e secondariamente da "a".
- **Moto transonico ($M_{\text{critico}} \approx 0.8 < M < 1.4$):** La differenza "V-a" è in valore assoluto molto più piccola sia di "V" che di "a"; le variazioni di "V" e di "a" sono comparabili; il numero di Mach è prossimo all'unità.
- **Moto supersonico ($1.4 < M < 5$):** La velocità del fluido è maggiore di quella del suono; le variazioni del numero di Mach dipendono sia da "a" che da "V".
- **Moto ipersonico ($5 < M < \infty$):** La velocità del fluido è di molto maggiore di quella del suono; le variazioni della "V" sono piccole per cui le variazioni del numero di Mach dipendono quasi esclusivamente da variazioni di "a".



Esercizio 1.1

Classifica il Moto (sub – trans – super - iper sonico) di un aereo che sta volando ad una quota di 6000 m a velocità di 30 m/s, 300 m/s 1000 m/s.

1.2 VELOCITÀ DELLE PICCOLE PERTURBAZIONI

Nel corso di Fluidodinamica abbiamo dato ad una derivata termodinamica, che aveva le dimensioni del quadrato di una velocità, la definizione di **velocità del suono laplaciana** (ad entropia costante A.23):

$$a_L^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (1.7)$$

Siamo ora al punto di dover dimostrare che questa velocità caratteristica termodinamica corrisponde invero alla velocità con cui un piccolo disturbo (tra cui il suono, che è un disturbo (onda) di pressione) si propaga nel fluido circostante.

In realtà un piccolo disturbo, in un mezzo continuo ed isotropo, si propaga isotropicamente in tutte le direzioni, per cui occorrerebbe ricorrere ad uno schema in coordinate sferiche. Purtroppo le stesse conclusioni si possono ricavare da un semplice schema monodimensionale piano (in quanto ad una distanza molto grande dall'origine il fronte sferico diventa praticamente piano e la coordinata radiale si approssima bene ad una coordinata piana).

Consideriamo un disturbo (ad es. un fronte di un' onda acustica) che si propaga in un mezzo stagnante con una velocità "c" (da destra verso sinistra) costante rispetto ad un sistema inerziale.

Per semplificare l'analisi, immaginiamo un sistema di riferimento fisso rispetto all'onda di disturbo. In tale caso dobbiamo imporre a tutto il sistema una velocità pari e contraria alla velocità dell'onda "c".

Essendo il disturbo molto piccolo, le proprietà del fluido saranno perturbate in modo infinitesimale dal fronte d'onda.

Trascurando tutti gli effetti dissipativi possiamo applicare le leggi di conservazione in termini differenziali:

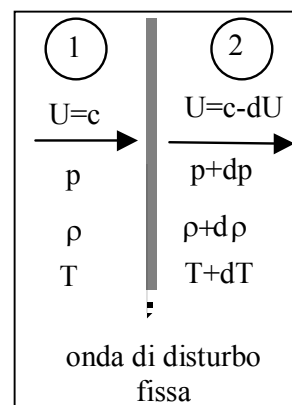
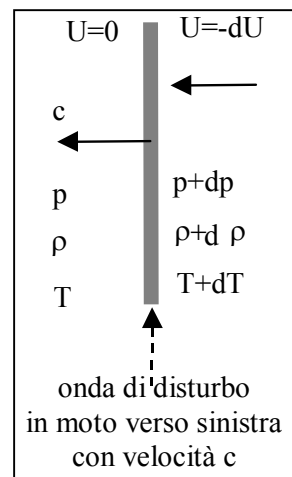
Massa (continuità):

$$\rho c = (\rho + d\rho)(c - dU) \quad (1.8)$$

Quantità di Moto:

$$\rho c c + p = (\rho + d\rho)(c - dU)(c - dU) + (p + dp) \quad (1.9)$$

Trascurando gli ordini superiori dei differenziali, dalla continuità (1.8) si ricava:



$$\frac{dp}{\rho} = \frac{dU}{c} \quad (1.10)$$

Dalla Quantità di Moto (1.9) si ricava:

$$dp = \rho c dU \quad (1.11)$$

Eliminando dalle (1.10) ed (1.11) la dU si ricava agevolmente:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \rightarrow a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \Rightarrow c = a \quad (1.12)$$

Si dimostra quindi la corrispondenza della velocità caratteristica termodinamica con la velocità di propagazione dei piccoli disturbi (suono).

Ovviamente l'ipotesi di isentropicità deriva dal fatto che i piccoli disturbi infinitesimali non sono capaci di indurre irreversibilità.

Per un gas piuccheperfetto:

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{\gamma R} \sqrt{T} \quad \text{per l'aria} \quad = \begin{cases} 20.047 \sqrt{T} & (c \rightarrow \text{m/s}, T \rightarrow \text{K}) \\ 49.020 \sqrt{T} & (c \rightarrow \text{ft/s}, T \rightarrow \text{R}) \end{cases} \quad (1.13)$$

in condizioni standard ($T = 15^\circ\text{C} = 288.15 \text{ K} = 518.67 \text{ R}$) risulta:

$$a = 340.294 \text{ m/s} = 1225.06 \text{ km/h} = 1116.45 \text{ ft/s} = 761.38 \text{ mil/h}$$

NOTA BENE :

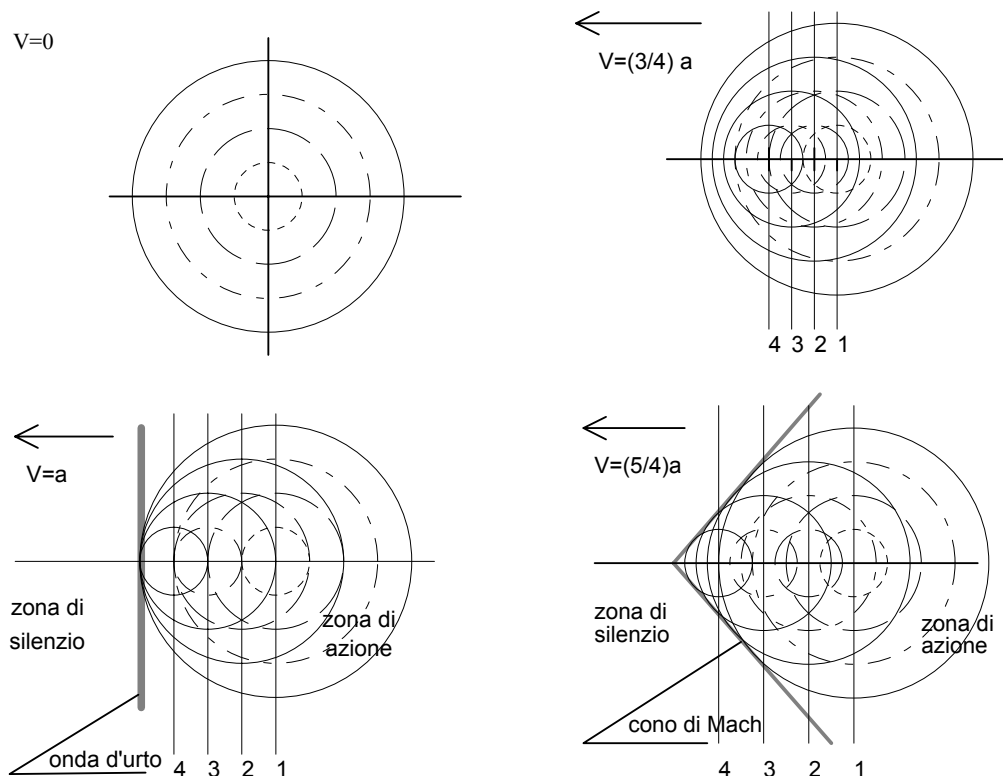
- Un'Onda d'Urto, che sarà descritta nel seguito, si muove sempre con una velocità maggiore di quella del suono, velocità che crescerà con l'intensità d'onda.
- In fluidi veramente incompressibili la velocità del suono sarebbe infinita. Ma tali fluidi non esistono, anche i solidi hanno una (sia pur minima) compressibilità.
- Nei liquidi, i.e. acqua, la velocità del suono si aggira intorno ai 1500 m/s (5000 ft/s), che è estremamente grande nei confronti delle velocità che si possono produrre in tali mezzi.
- Nei moti incompressibili è come se si assumesse: $a = \infty$

1.3 PROPAGAZIONE DEI DISTURBI DI PRESSIONE

L'influenza della compressibilità del mezzo porta alla **propagazione isotropa**, con velocità finita, dei piccoli disturbi. Questo può creare notevoli differenze, rispetto ai flussi incompressibili, allorché una sorgente di disturbo si muove con una velocità **minore/pari/maggiore** di quella del suono.

Consideriamo quattro casi in cui: (a) la sorgente di disturbo è ferma, (b) si muove con una velocità pari a 3/4 di quella del suono, (c) con una velocità pari a quella del suono, (d) con una velocità pari a 5/4 di quella del suono.

Per ognuno dei casi rappresentiamo la posizione dei fronti d'onda emessi dalla sorgente a quattro istanti differenti, da ognuna delle posizioni da essa occupate.

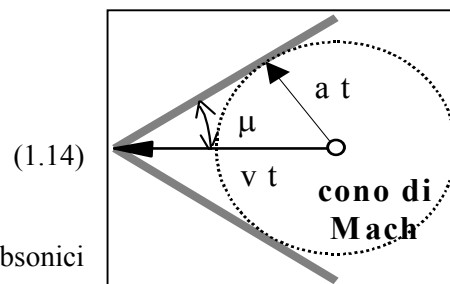


Commentiamo i vari casi.

- $V=0$ **la sorgente è ferma**: i disturbi di pressione si propagano uniformemente in tutte le direzioni,
- $V < a$ **moto subsonico**; il campo di pressioni non è più simmetrico, ma poiché i disturbi viaggiano ad una velocità maggiore della sorgente, essi possono essere percepiti in tutti i punti dello spazio prima dell'arrivo della sorgente,
- $V = a$ **moto sonico**; la sorgente si muove alla stessa velocità del suono, il disturbo viene percepito solo allorquando la sorgente arriva sul punto: nasce un'onda piana normale alla direzione della velocità, prima della quale non si percepisce il suono: **zona di silenzio**,
- $V > a$ **moto supersonico**; tutti i disturbi sono confinati in un cono (**cono di Mach**) il cui apice è la sorgente, i disturbi non sono capaci di propagarsi al di fuori del cono (**zona di silenzio**) ma soltanto nell'interno di esso (**zona di azione**).

Il semi-angolo del cono di Mach è tale che:

$$\sin \mu = \frac{a t}{V t} = \frac{a}{V} = \frac{1}{M}$$



Ovviamente l' **angolo di Mach** " μ " è immaginario per campi subsonici ($M < 1$).



Esercizio 1.2

Un aereo vola ad una velocità di 1500 km/h ad una quota di 13300 metri.

Assumi Terra piatta ed un'atmosfera a temperatura media di 9°C.

Quanto vale il Mach di volo?

Quanti tempo impiega il rumore prodotto dall'aereo a raggiungere un punto del suolo?

Nel frattempo di quanti chilometri l'aereo avrà sopravanzato tale punto?



Esercizio 1.3

Aria scorre in un tunnel supersonico alla temperatura di 360 K. Da uno shadowgraph si misura un angolo di Mach di 33° .

Quale la velocità ed il Mach del tunnel?



Esercizio 1.4

Un osservatore a terra, percepisce il rumore di un aereo che sta volando a 3 km di quota, allorquando l'aereo lo ha sopravanzato di 7 km. Determina la velocità dell'aereo se la temperatura media dell'atmosfera è 20°C .

1.4 EFFETTI SUI CAMPI DI MOTO

Gli effetti di tali fenomenologie sui campi di moto attorno a profili alari sono illustrati nella seguente figura.

(A) Flusso subsonico su un profilo alare:

Il campo di moto risulta "simile" a quello incomprimibile se il numero di Mach asintotico è sufficientemente basso da non causare in nessun punto del campo delle velocità maggiori a quelle (localmente) soniche. **Il problema è ellittico.**

(B) Flusso transonico su di un profilo alare:

Anche se il Mach asintotico è minore di uno, vi sono alcune zone del dorso dove localmente la velocità è maggiore di quella del suono. Si ha quindi una sacca supersonica che termina con un'onda d'urto (probabilmente con una forma a lambda). Dopo di questa la corrente ridiventa subsonica così da non porre problemi di adattamento al bordo di uscita. **Il problema è ellittico/misto.**

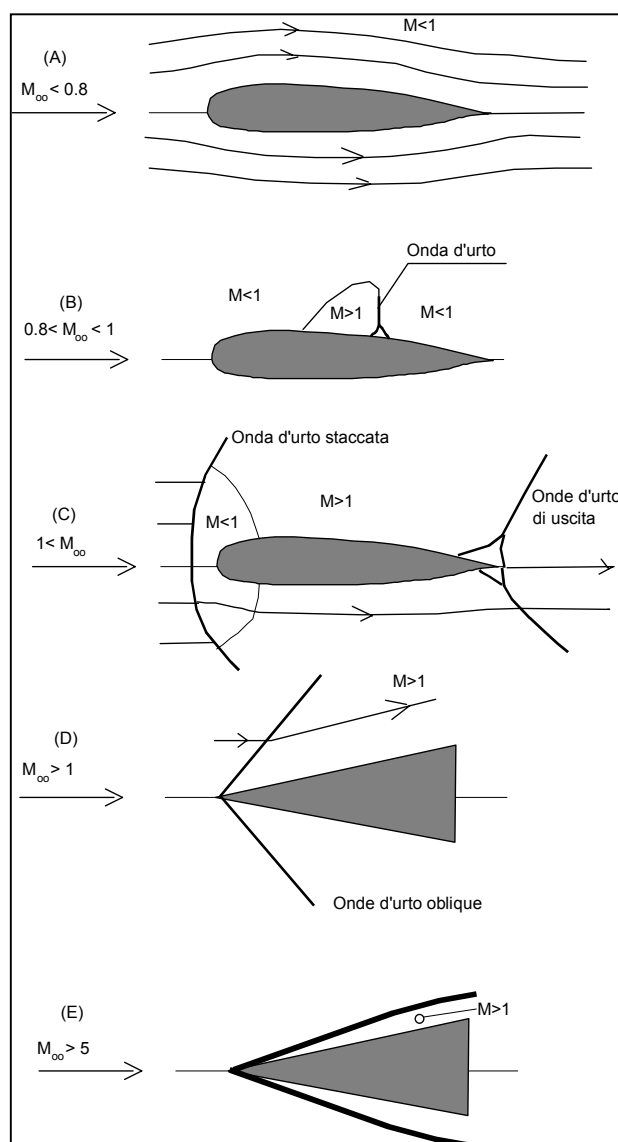
(C) Flusso supersonico su di un profilo alare:

Se il bordo di attacco del profilo è arrotondato, esisterà un'onda d'urto curva staccata dal profilo, normale nei pressi del bordo di attacco. Al di dietro di tale onda, il flusso è subsonico, ma viene accelerato (dalla forma del profilo) sino a ridiventare supersonico. Sul bordo di uscita per soddisfare il *merging* del flusso sul dorso e di quello sul ventre nasce (molto probabilmente per piccoli angoli di attacco) un sistema di onde d'urto inclinate.

Il problema è iperbolico/misto.

(D) Flusso supersonico su diedro: Se il Mach asintotico è abbastanza grande nei confronti dell'angolo di diedro (che rappresenta il bordo di attacco aguzzo di un profilo supersonico) può nascere un sistema di onde d'urto inclinate, dietro al quale il flusso è supersonico. **Il problema è iperbolico.**

(E) Flusso ipersonico: Se il Mach asintotico è molto alto (all'incirca maggiore di 5), il sistema di onde d'urto inclinate è molto prossimo alla superficie del profilo. Il campo di moto tra le OOU ed il profilo raggiunge temperature molto alte tali da provocare nel



gas fenomeni di dissociazione o addirittura di ionizzazione. Per tali flussi occorre modificare il modello di gas e considerare anche gli effetti di scambio termico, tra cui quelli per irraggiamento, con il corpo e con l'ambiente. Lo schiacciamento del campo di moto disturbato (tra l'onda d'urto ed il corpo) causa una differenza di ruoli tra le variazioni delle proprietà termo-fluidodinamiche nella direzione della corrente e normale alla corrente stessa. **Il problema è parabolico.**



Esercizio 1.5

Un aereo vola a 1500 km/h ad una quota di 10000 m alla quale la temperatura è -60°C .
A quale Mach sta volando?

Un aereo vola a 1500 km/h ad una quota di 10000 m alla quale la temperatura è -50°C .
A quale Mach sta volando?



Esercizio 1.6

Un aereo vola a 15600 km/h al livello del mare, ove la quale la temperatura è 15°C .
A quale Mach sta volando? A quale velocità l'aereo deve volare a 6000 m di quota (-24°C) per volare allo stesso Mach?

1.5 CRITERI DI COMPRIMIBILITÀ (*)

Abbiamo già dimostrato che, sotto le ipotesi di flusso potenziale, la divergenza della velocità rappresenta il rateo (negativo) della variazione specifica temporale della densità di una particella fluida, e che, se adimensionalizzata opportunamente, è proporzionale al quadrato del numero di Mach.

Vogliamo ora rivedere tale dimostrazione includendo tutti gli altri effetti.

Dalla continuità:

$$\nabla \cdot \underline{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (1.15)$$

Dall' equilibrio Q.d.M.:

$$\rho \frac{D\underline{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{V} + \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \underline{V}) + \rho \underline{g} \quad (1.16)$$

Dalla Energia cinetica:

$$\underline{V} \cdot \nabla p = -\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \mu \underline{V} \cdot \nabla^2 \underline{V} + \frac{1}{3} \mu \underline{V} \cdot \nabla (\nabla \cdot \underline{V}) + \rho \underline{V} \cdot \underline{g} \quad (1.17)$$

Dal Bilancio di Entropia:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{\lambda}{T} \nabla^2 T + \frac{1}{T} \Phi^2 \quad (1.18)$$

Considerando la pressione $p = p(s, \rho)$:

$$\frac{Dp}{Dt} = \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{Ds}{Dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{D\rho}{Dt} \quad (1.19)$$

Dalla rappresentazione $\rho = \rho(p, s)$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho = - \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}{\left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_p} = - \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}{\left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_p \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p} = - \frac{a^2}{\left(-\frac{v}{\alpha_p} \right) \left(\frac{c_p}{T} \right)} \quad (1.20)$$

(Memo: $\alpha_p = \beta = \frac{1}{v} (\partial v / \partial T)_p = -\frac{1}{\rho} (\partial \rho / \partial T)_p$ è il coefficiente di espansione termica a pressione costante)

Sostituendo il tutto (1.16 – 1.20) nella espressione della divergenza della velocità (1.15), si ricava:

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{V} = & \frac{1}{a^2} \left[\underline{V} \cdot \underline{\nabla} (V^2/2) - \underline{V} \cdot \underline{g} \right] + \frac{1}{a^2} \left[\frac{\partial (V^2/2)}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \right] + \\ & - \frac{\mu}{\rho a^2} \left[\underline{V} \cdot \nabla^2 \underline{V} + \frac{1}{3} \underline{V} \cdot \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{V}) \right] + \frac{\alpha p}{\rho c_p} \left[\lambda \nabla^2 T + \Phi^2 \right] \end{aligned} \quad (1.21)$$

Adimensionalizziamo questa equazione (1.21), usando, per la pressione di riferimento, la quantità $p_r = \rho_r V_r^2$ ne deriva (tutti i termini tra parentesi quadra sono ora adimensionali):

$$\begin{aligned} (\underline{\nabla} \cdot \underline{V})^* = & M^2 \left[\underline{V} \cdot \nabla^2 (V^2/2) \right]^* - \left(\frac{M^2}{Fr} \right) \left[\underline{V} \cdot \underline{g} \right]^* + \frac{M^2}{Str} \left[\frac{\partial (V^2/2)}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \right]^* + \\ & - \frac{M^2}{Re} \left[\underline{V} \cdot \nabla^2 \underline{V} + \frac{1}{3} \underline{V} \cdot \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{V}) \right]^* + \frac{\Delta T}{T} \frac{1}{Re Pr} \left[\alpha_p \nabla^2 T \right]^* + (\gamma - 1) \frac{M^2}{Re} \left[\alpha_p \Phi^2 \right]^* \end{aligned} \quad (1.22)$$

Il poter trascurare la compressibilità richiede la trascurabilità di tutti i termini a destra dell'equazione. Dovranno risultare piccoli i numeri adimensionali che quantizzano l'importanza relativa dei vari termini:

$M^2 \ll 1;$	$\frac{M^2}{Fr} \ll 1;$	$\frac{M^2}{Str} \ll 1;$	$\frac{M^2}{Re} \ll 1;$	$\frac{\Delta T}{T} \frac{1}{Re Pr} \ll 1;$	$(\gamma - 1) \frac{M^2}{Re} \ll 1$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

(1.23)

Il primo gruppo è stato già discusso, il secondo è di interesse soltanto in presenza di interfacce liquido/gas, e non sarà considerato in questo contesto.

I gruppi che possono destare preoccupazioni sono il terzo ed il quarto (il sesto è dello stesso ordine del quarto $1 < \gamma < 1.667$).

Per quanto riguarda il terzo notiamo che si potrebbe verificare un $M \ll 1$ ma anche un numero di Sthroual $\ll 1$ in modo che il loro rapporto sia non trascurabile. Questo avviene nel campo dell'acustica, laddove il tempo di riferimento, imposto dalle condizioni al contorno, è molto piccolo (alta frequenza sonora). In tale disciplina le velocità sono alquanto piccole in paragone alla velocità del suono, ma le variazioni frazionarie delle variazioni di pressioni, e densità sono significative.

Per quanto riguarda il quarto e sesto gruppo osserviamo che il rapporto M^2/Re è proporzionale **al numero di Knudsen**: $Kn = 1/L$ [1 cammino libero molecolare], per cui tale ipotesi è in linea con la teoria del continuo $Kn \ll 1$:

$$\frac{M^2}{Re} = \frac{V^2}{a^2} \frac{\nu}{VL} = \frac{V^2}{a^2} \frac{a \ell}{VL} = M \left(\frac{\ell}{L} \right) = M Kn \ll 1 \quad (1.24)$$

Il quinto gruppo quantifica l'applicabilità dell'approssimazione di Boussinesque (per il galleggiamento).



Esercizio 1.7

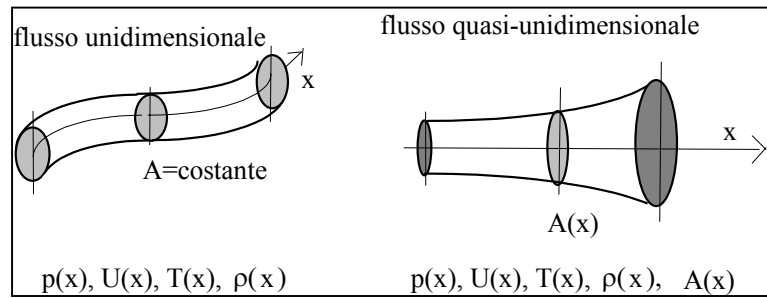
Uno Shuttle ($L=3m$) sta volando ad una quota tra 30 e 80 km di altezza. A queste quote le proprietà dell'atmosfera sono:

quota (m)	pressione [Pa]	temperatura [K]	viscosità dinamica μ [kg/(m s)]
30000	119.7	218	$1.5 \cdot 10^{-5}$
80000	0.012	240	$1.7 \cdot 10^{-5}$

Assumendo una velocità di 1 km/s, determina il regime di moto (continuo/ rarefatto).

1.6 LE EQUAZIONI DELLA GASDINAMICA

Come detto in anteprima, in Fluidodinamica Comprimibile considereremo esclusivamente **problemi quasi-unidimensionali** cioè volumi di controllo (tubi di flusso o tratti di un condotto) per i quali si verifica che la sezione trasversale "A" varia di poco rispetto all'ascissa curvilinea (x): $\frac{L}{A} \frac{dA}{dx} \ll 1$.



La maggior parte dei problemi considerati avrà un solo ingresso ed una sola uscita. Inoltre in questo contesto considereremo soltanto **problemi stazionari** per cui i termini derivati rispetto al tempo saranno nulli.

Per essere precisi, occorrerebbe definire le modalità di media: ad esempio la media (solitamente usata) della velocità e della densità rispetto alla superficie farà sì che il prodotto ($\rho U A$) corrisponderà alla portata di massa, ma non garantirà che il prodotto ($\rho U^2 A$) fornisca esattamente la portata di quantità di moto, né che il prodotto ($\rho U^3 A$) fornisca esattamente la portata di energia cinetica. Per ovviare a tale inconveniente, nella pratica ingegneristica, si introducono dei coefficienti correttivi per aggiustare l'uso di tale formulazione, coefficienti che sono prossimi all'unità per regimi di flusso turbolento. Nel seguito considereremo tali coefficienti sempre unitari.

In realtà sia i moti unidimensionali che quelli quasi-unidimensionali potranno avere effetti (che talora possono essere notevoli) derivanti dalla multidimensionalità (ci riferiamo a separazioni, a moti secondari ecc.). Pur tuttavia le analisi fatte con tali approssimazioni, per la loro semplicità ed immediatezza, risultano molto utili per avere una stima degli effetti del primo ordine.

L'obiettivo dell'analisi è di arrivare a descrivere la termo-fluidodinamica di un flusso comprimibile mediante un modello matematico definito da un sistema di equazioni differenziali ordinarie nella variabile assiale "x".

Tale modello sarà alla base di un codice di calcolo per moti quasi-unidimensionali.

La strategia è:

- considerare prima un modello di gas (per *default* gas piuccheperfetto) per descrivere le relazioni tra le variazioni delle proprietà termodinamiche (sotto le ipotesi di equilibrio termodinamico),
- scrivere poi le equazioni di bilancio tra le variabili termo-fluidodinamiche e quindi adattare tutte queste equazioni in modo tale da averne
 - sia le forme incrementali comode per operare manualmente,
 - sia le forme differenziali da cui derivare il sistema di equazioni differenziali del codice che elaboreremo.

1.6.1 Equazioni di stato

Per un gas piuccheperfetto (**pcp**) valgono le seguenti equazioni di stato [c.f.r. Appendice A]:

$$p = \rho R_{\text{gas}} T, \quad h = c_p T, \quad s - s_{\text{rif}} = c_p \ln\left(\frac{T}{T_{\text{rif}}}\right) - R_{\text{gas}} \ln\left(\frac{p}{p_{\text{rif}}}\right) \quad (1.25)$$

In forma differenziale:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}, \quad dh = c_p dT, \quad \frac{ds}{c_p} = \frac{dT}{T} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} \quad (1.26)$$

Nota: se si verificasse una variazione del peso molecolare " m_{mol} " ($R_{\text{gas}} = R_o / m_{\text{mol}}$) e del calore specifico a pressione costante " c_p " sarebbe:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} - \frac{dm_{\text{mol}}}{m_{\text{mol}}} \\ dh &= c_p dT + T dc_p \\ ds &= c_p \frac{dT}{T} + dc_p \ln\left(\frac{T}{T_{\text{rif}}}\right) - \frac{R_o}{m_{\text{mol}}} \frac{dp}{p} + R_o \frac{dm_{\text{mol}}}{m_{\text{mol}}^2} \ln\left(\frac{p}{p_{\text{rif}}}\right) \end{aligned} \quad (1.27)$$

1.6.2 Definizione del numero di Mach

$$M = \frac{U}{a} = \frac{U}{\sqrt{\gamma R_{\text{gas}} T}} \quad \text{ovvero:} \quad M^2 = \frac{U^2}{a^2} = \frac{U^2}{\gamma R_{\text{gas}} T} \quad (1.28)$$

forma differenziale:

$$\boxed{2 \frac{dM}{M} = \frac{dM^2}{M^2} = 2 \frac{dU}{U} - \frac{dT}{T}} \quad (1.29)$$

Nota: se si verificasse una variazione della massa molecolare " m_{mol} " e del rapporto dei calori specifici " γ " sarebbe:

$$2 \frac{dM}{M} = \frac{dM^2}{M^2} = 2 \frac{dU}{U} - \frac{dT}{T} + \frac{dm_{\text{mol}}}{m_{\text{mol}}} - \frac{d\gamma}{\gamma} \quad (1.30)$$

1.6.3 Pressione dinamica

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 = \frac{1}{2} \frac{p}{R_{\text{gas}} T} M^2 a^2 = \frac{1}{2} \frac{p}{R_{\text{gas}} T} M^2 \gamma R_{\text{gas}} T = \frac{1}{2} \gamma p M^2 \quad (1.31)$$

forma differenziale:

$$\boxed{\frac{dq}{q} = \frac{dp}{p} + \frac{dM^2}{M^2}} \quad (1.32)$$

Nota: se si verificasse una variazione del rapporto dei calori specifici " γ " sarebbe:

$$\frac{dq}{q} = \frac{dp}{p} + \frac{dM^2}{M^2} + \frac{d\gamma}{\gamma} \quad (1.33)$$

Ne deriva per il **coefficiente di pressione** C_p :

$$\boxed{C_p \equiv \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2} = \frac{p_{\infty}}{\frac{1}{2} \gamma p_{\infty} M_{\infty}^2} \left(\frac{p}{p_{\infty}} - 1 \right) = \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \left(\frac{p}{p_{\infty}} - 1 \right)} \quad (1.34)$$

1.6.4 Funzione Impulso totale ($F = I A$)

$$F = (p + \rho V^2) A = p A + (\rho V A) V = p A + \dot{m} V = p A \left(1 + \frac{\rho V^2}{p} \right) = p A (1 + \gamma M^2) \quad (1.35)$$

In forma differenziale:

$$\frac{dF}{F} = \frac{dp}{p} + \frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{dM^2}{M^2} \quad (1.36)$$

Nota: se si verificasse una variazione del rapporto dei calori specifici " γ " sarebbe:

$$\frac{dF}{F} = \frac{dp}{p} + \frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{dM^2}{M^2} + \frac{M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{d\gamma}{\gamma} \quad (1.37)$$

1.6.5 Equazioni di bilancio

Nel corso di Fluidodinamica, facendo il bilancio globale delle variabili termo-fluidodinamiche per un volume V e superficie A ed usando il teorema della media per i contributi superficiali, si era trovato:

- Per la **massa**:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum (\rho V_n A)_{out} - \sum (\rho V_n A)_{in} = 0 \quad (1.38)$$

- Per la **quantità di moto**:

$$\iiint_V \frac{\partial (\rho \underline{V})}{\partial t} dV + \sum [(\rho V_n) \underline{V} A]_{out} - \sum [(\rho V_n) \underline{V} A]_{in} = - \oint_S (\underline{n} p) dS + \oint_S \underline{f}_v dS + \iiint_V (\rho \underline{g}) dV \quad (1.39)$$

- Per l'**energia**:

$$\frac{\partial [M e]}{\partial t} + \sum_{OUT} \left[\dot{m} \left(h + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) \right]_{out} - \sum_{IN} \left[\dot{m} \left(h + \frac{1}{2} V^2 + gz \right) \right]_{in} = \dot{Q} - \dot{W}_{mecc} + \dot{W}_{visc} \quad (1.40)$$

Considerando un volume di controllo come in figura e **trascurando l'instazionarietà**, si ritrovano le equazioni nelle forme tipiche della Fluidodinamica Comprimibile.

1.6.5.1 Continuità:

Dalla (1.38):

$$-\rho_1 U_1 A_1 + \rho_2 U_2 A_2 = -\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = \dot{m}_i \quad (1.41)$$

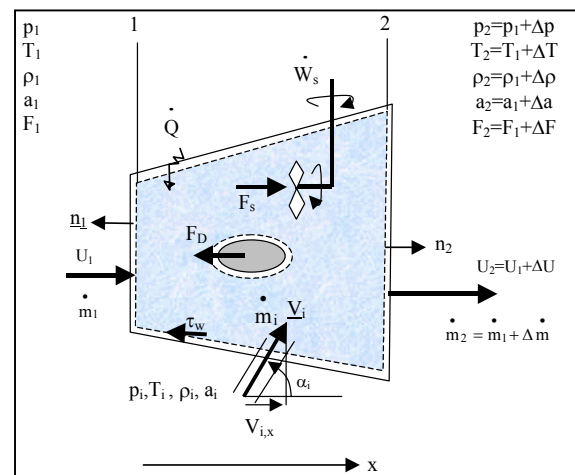
ovvero

$$\Delta \dot{m} = \dot{m}_i \quad (1.42)$$

con: $\dot{m}_i$ = massa di fluido iniettata

In forma differenziale:

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dU}{U} + \frac{dA}{A} = \frac{d\dot{m}_i}{\dot{m}} \quad (1.43)$$



1.6.5.2 Quantità di Moto

Dalla (1.39) [Pressioni gage, i.e. riferite alla pressione esterna]:

$$-U_1(\rho_1 U_1 A_1) - p_1 A + U_2(\rho_2 U_2 A_2) + p_2 A = -\tau_w S_{\text{lat}} - F_D + F_T + \dot{m}_i V_{i,x} \cos \alpha_1 + \left(p_1 + \frac{1}{2} \Delta p\right) \Delta A \quad (1.44)$$

ovvero:

$$\Delta F = -\tau_w S_{\text{lat}} - F_D + F_T + \dot{m}_i V_{i,x} + \left(p_1 + \frac{1}{2} \Delta p\right) \Delta A \quad (1.45)$$

introducendo:

$$\text{il fattore di attrito di Fanning:} \quad f_{\text{Fanning}} = \frac{2 \tau_w}{\rho U^2} \quad (1.46)$$

$$\text{il concetto di Diametro idraulico:} \quad \mathcal{D} = \frac{4 A}{P_{\text{perimetro bagnato}}} = \frac{4 A \Delta x}{S_{\text{laterale bagnata}}} \quad (1.47)$$

$$\text{Resistenza del corpo:} \quad F_D = \frac{1}{2} \rho U^2 S_D C_D \quad (1.48)$$

$$\text{Spinta della ventola:} \quad F_T = \frac{1}{2} \rho U^2 S_T C_T \quad (1.49)$$

si ha:

$$\tau_w S_{\text{lat}} = \frac{1}{2} \rho U^2 A \left(\frac{4 f_F \Delta x}{D} \right) = \frac{1}{2} \dot{m} U \left(\frac{4 f_F \Delta x}{D} \right) \quad (1.50)$$

e quindi l'equazione prende la forma:

$$\Delta F = -\frac{1}{2} \rho U^2 A \left[\left(\frac{4 f_F \Delta x}{D} \right) - C_D \frac{S_D}{A} + C_T \frac{S_T}{A} \right] + \dot{m}_i V_{i,x} + \left(p_1 + \frac{1}{2} \Delta p\right) \Delta A \quad (1.51)$$

In forma differenziale (trascurando differenziali di ordine superiore):

$$dF + \frac{1}{2} \rho U^2 A \left[\left(\frac{4 f_F dx}{D} \right) + dC_D \frac{S_D}{A} - dC_T \frac{S_T}{A} \right] - d\dot{m}_i V_{i,x} - p dA = 0 \quad (1.52)$$

ovvero ricordando che:

$$F = pA + \dot{m} U \rightarrow dF = p dA + dp A + d\dot{m} U + \dot{m} dU \quad ; \quad \text{memo:} \quad \left[d\dot{m} = d\dot{m}_i \right] \quad (1.53)$$

si ritrova:

$$dp A + \frac{1}{2} \rho U^2 A \left[\left(\frac{4 f_F dx}{D} \right) + dC_D \frac{S_D}{A} - dC_T \frac{S_T}{A} \right] + d\dot{m}(U - V_{i,x}) + \dot{m} dU = 0 \quad (1.54)$$

1.6.5.3 Energia

Dalla (1.40) usando l'entalpia totale: $H = h + \frac{1}{2} U^2$ [i.e. trascuriamo l'energia potenziale]:

$$\dot{m}_2 H_2 - \dot{m}_1 H_1 = \dot{Q} - U F_D - \dot{W}_s + \dot{m}_i H_i \quad (1.55)$$

ovvero:

$$\Delta \dot{m} H_1 + \dot{m}_1 \Delta H + \Delta \dot{m} \Delta H = \dot{Q} - \dot{W}_s + \dot{m}_i H_i \quad (1.56)$$

In forma differenziale - memo: $\left[\dot{d}m = \dot{d}m_i \right]$

$$\dot{d}m H_1 + \dot{m}_1 dH - \dot{d}Q + d(U F_D) + \dot{d}W_s - \dot{d}m_i H_i = 0 \quad (1.57)$$

ovvero:

$$\frac{\dot{d}m}{\dot{m}} (H - H_i) + dH - \frac{\dot{d}Q}{\dot{m}} + \frac{d(U F_D)}{\dot{m}} + \frac{\dot{d}W_s}{\dot{m}} = 0 \quad (1.58)$$

ovvero

$$\frac{\dot{d}m}{\dot{m}} (H - H_i) + dH - \delta q + \frac{d(U F_D)}{\dot{m}} + \delta w_s = 0 \quad (1.59)$$

$$dH - \delta q + \delta w_s + \frac{d(U F_D)}{\dot{m}} + dH_i = 0 \quad (1.60)$$

$$dh + U d(U) - \delta q + \delta w_s + \frac{SU}{2A} [U dC_D + 3C_D dU] + dH_i = 0$$

dove si è posto:

$$dH_i = \frac{\dot{d}m}{\dot{m}} (H - H_i) \quad ; \quad \delta q = \frac{\dot{d}Q}{\dot{m}} \quad ; \quad \delta w_s = \frac{\dot{d}W_s}{\dot{m}} \quad (1.61)$$

aumento di entalpia
iniettata per unità di
portata massica
calore addotto
per unità di
portata massica
lavoro sottratto
per unità di
portata massica

1.6.5.4 Entropia

Per gas piuccheperfetto, valeva la relazione (A.16) $ds = c_p \frac{dT}{T} - \Re \frac{dp}{p}$ ovvero:

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT}{T} - \frac{\Re}{c_p} \frac{dp}{p} \quad (1.62)$$

richiamando la (A.10.c) si arriva a:

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT}{T} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} \quad (1.63)$$

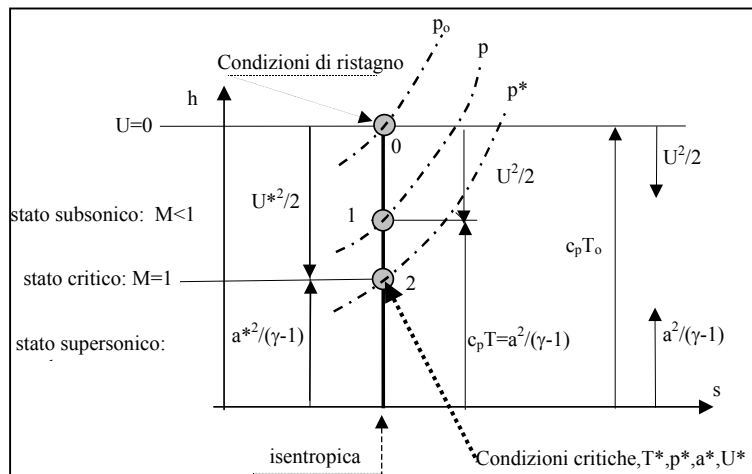
1.7 STATI DI RIFERIMENTO

Consideriamo l'equazione dell'energia nel caso di **moto adiabatico** (assenza di adduzione di calore $\dot{Q} = 0$), assenza di Forze nel volume di controllo ($F_D = 0$), di lavoro esterno ($\dot{w}_s = 0$) e di iniezione di massa ($\dot{m}_i = 0$).

$$\text{Risulta } \left[\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow H_1 = H_2 \right]$$

e quindi, sotto l'ipotesi di gas piuccheperfetto:

$$c_p T_1 + \frac{U_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{U_2^2}{2} = \text{Cost.} \quad (1.64)$$



Questa equazione può essere posta (usando l'equazione di stato (1.25) e la velocità del suono (1.13)) nelle forme:

$$\frac{\gamma RT_1}{\gamma-1} + \frac{U_1^2}{2} = \frac{\gamma RT_2}{\gamma-1} + \frac{U_2^2}{2} = \text{Cost} \quad (1.65)$$

ovvero:

$$\frac{a_1^2}{\gamma-1} + \frac{U_1^2}{2} = \frac{a_2^2}{\gamma-1} + \frac{U_2^2}{2} = \text{Cost.} \quad (1.66)$$

Pensando che gli stati (0), (1) e (2) rappresentano punti di una trasformazione adiabatica ($H = \text{costante}$), ne deriva che la costante dell'equazione può essere calcolata in ogni punto di tale trasformazione.

In particolare sono di interesse i seguenti stati di riferimento:

1. **stato di ristagno (0)**: quello in cui la velocità "U" si annulla: in questo caso la costante è pari all'entalpia totale (o di ristagno),

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{U^2}{2} = \frac{a_o^2}{\gamma-1} = c_p T_o = H_o \quad (1.67)$$

2. **stato critico (2)**: quello in cui la velocità è pari alla velocità del suono $U^*=c^*$: in questo caso ($M=1$, condizioni soniche apice *) la costante dell'equazione è pari a:

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^{*2}}{\gamma-1} + \frac{a^{*2}}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a^{*2} \quad (1.68)$$

3. **stato limite**: quello in cui si annulla l'entalpia termodinamica "h": in questo caso la costante è pari alla metà del quadrato della velocità massima ricavabile dal livello entalpico H_o :

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{U^2}{2} = \frac{V_{\max}^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a^{*2} = \frac{a_o^2}{\gamma-1} = c_p T_o = H_o \quad (1.69)$$

Ne discendono le definizioni:

- **Entalpia di ristagno H_o** : l'entalpia che ipoteticamente si riesce ad ottenere **rallentando adiabaticamente** il fluido fino al ristagno ($H_o \equiv h_o$ essendo $U_o=0$)
- **Temperatura di ristagno T_o** : la temperatura che corrisponde all'entalpia di ristagno, i.e. $T_o=H_o/c_p$,
- **Velocità massima $V_{\max}$** : la velocità massima ipoteticamente ottenibile da una espansione adiabatica nel vuoto a temperatura nulla dal livello di entalpia totale:

$$V_{\max} = \sqrt{2H_o} = \sqrt{2c_p T_o} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} RT_o} \quad (1.70)$$

- **Velocità critica $V^*=a^*$** : la velocità che si ottiene rallentando/accelerando adiabaticamente il fluido fino alle condizioni soniche.

Con queste definizioni l'equazione dell'energia può essere scritta, per un generico stato termo-fluidodinamico (senza pedici), alternativamente come:

$$h + \frac{U^2}{2} = H_o, \quad c_p T + \frac{U^2}{2} = c_p T_o = \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{U^2}{2} = \frac{a_o^2}{\gamma-1} \quad (1.71)$$

$$c_p T + \frac{U^2}{2} = \frac{V_{\max}^2}{2}, \quad \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{U^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a^{*2}$$

Dalla seconda di queste espressioni si può ricavare una notevole relazione:

$$\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{U^2}{2c_p T} = 1 + \frac{U^2}{2\gamma RT/(\gamma-1)} = 1 + \frac{U^2}{2a^2/(\gamma-1)} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{U}{a}\right)^2 \quad (1.72)$$

ovvero per ogni flusso adiabatico di un gas con costante " γ " la temperatura di ristagno T_o è esprimibile in termini della temperatura del generico stato, T , e del suo numero di Mach, M , come:

$$\boxed{\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \equiv \Psi(\gamma, M)} \quad (1.73)$$

Dove si è fatto uso della notazione: $\Psi(\gamma, M) \equiv 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$ (1.74)

1.8 STATI ISENTROPICI (Flussi adiabatici/isentropici)

Se supponiamo che il flusso oltre ad essere adiabatico è anche **isentropico**, richiamando le relazioni delle trasformazioni isentropiche [appendice A], pensate applicabili, in condizioni di equilibrio termodinamico, sia al generico stato (senza pedice) che allo stato di ristagno (pedice o) si ottiene:

$$\frac{p_o}{p} = \left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)^\gamma = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.75)$$

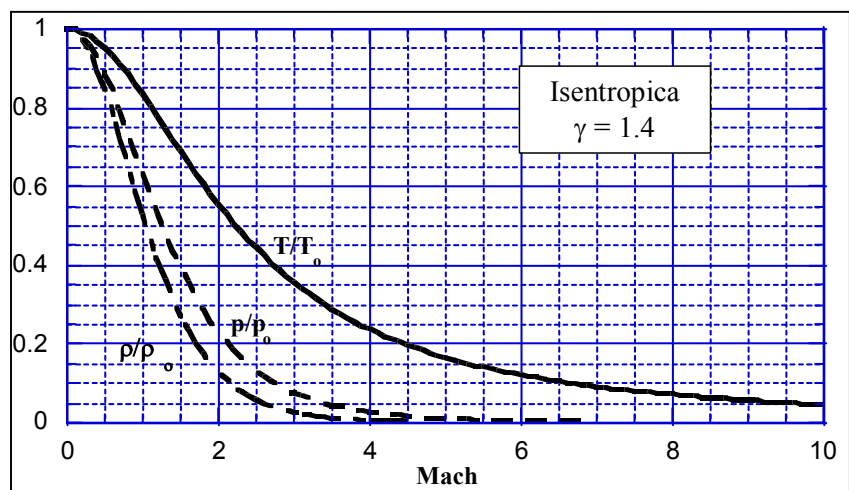
Dalle (1.72 e 1.74) derivano le relazioni per la **pressione di ristagno** e la **densità di ristagno**:

$$\boxed{\frac{p_o}{p} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \Psi^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad (1.76 \text{ a,b})$$

$$\boxed{\frac{\rho_o}{\rho} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} = \Psi^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

Tali relazioni sono diagrammate nella figura a lato, per $\gamma=1.4$.

Dall'esame dell'andamento di tali diagrammi risulta che i rapporti delle temperature, pressioni, e densità relativamente ai rispettivi valori di ristagno sono circa pari all'unità fino a Mach dell'ordine di 0.3.



Esprimendo l'equazione dell'energia sia in termini di velocità del suono di ristagno che in termini di velocità critica o di velocità massima risulta (dalle 1.70) :

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{U^2}{2} = \frac{a_o^2}{\gamma-1} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a^{*2} = \frac{V_{\max}^2}{2} \quad (1.77)$$

da cui si ricava

$$\left(\frac{a^*}{a_o}\right)^2 = \frac{2}{\gamma+1} \quad ; \quad V_{\max} = a^* \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (1.78)$$

Ricordando (1.13) che il quadrato della velocità del suono è proporzionale alla temperatura assoluta, ed il collegamento isentropico delle temperature con le densità e le pressioni (1.75), risulta (1.76 e 1.77) che gli stati di ristagno sono collegabili a quelli critici con relazioni che dipendono esclusivamente dal rapporto γ dei calori specifici:

$$\left(\frac{a^*}{a_o}\right)^2 = \frac{T^*}{T_o} = \frac{2}{\gamma+1} \quad ; \quad \frac{p^*}{p_o} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad ; \quad \frac{\rho^*}{\rho_o} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (1.79)$$

Per l'aria ($\gamma=1.4$) tali rapporti valgono:

$$\left(\frac{a^*}{a_o}\right)^2 = \frac{T^*}{T_o} = 0.833 \quad ; \quad \frac{p^*}{p_o} = 0.528 \quad ; \quad \frac{\rho^*}{\rho_o} = 0.634 \quad \frac{V_{\max}}{a^*} = 2.4495 \quad (1.80)$$

Se dividiamo ogni termine dell'equazione (1.77) per U^2 , otterremo:

$$\frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{a}{U}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \left(\frac{a^*}{U}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{V_{\max}}{U}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{1}{M}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \left(\frac{1}{M^*}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M^{\wedge}}\right)^2 \quad (1.81)$$

In cui abbiamo definito **nuovi numeri di Mach**: $M^* = U/a^*$ ed $M^{\wedge} = U/V_{\max}$.

Le relazioni tra M , M^* e $M^{\wedge}$ risultano quindi essere:

$$M^2 = \frac{2}{\left[\frac{\gamma+1}{M^{*2}}\right] - (\gamma-1)} \quad ; \quad M^{*2} = \frac{1}{\left[\frac{2}{(\gamma+1)M^2}\right] + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = M^{\wedge 2} \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) \quad (1.82)$$

Queste relazioni collegano le varie espressioni dei numeri di Mach, che rappresentano possibili adimensionalizzazioni della velocità:

- il Mach solito riferito alla velocità locale del suono, M : $M = U/a$
- Il Mach caratteristico riferito alla velocità critica, M^* : $M^* = U/a^*$
- Il Mach limite riferito alla velocità massima, $M^{\wedge}$: $M^{\wedge} = U/V_{\max}$

La differenza tra questi sta nel fatto che in un moto comprimibile varieranno simultaneamente sia " U " che la velocità del suono " a ". Per cui il Mach $M=U/a$ non è capace di rappresentare una misura della velocità in quanto la " U " è adimensionalizzata rispetto ad una velocità del suono " a " che varia da stato a stato.

Nel mentre, essendo a^* e $V_{\max}$ costanti, il $M^*=U/a^*$ e il $M^{\wedge}=U/V_{\max}$ sono capaci di misurare esattamente le variazioni della velocità " U ".

Dalle definizioni e dalle relazioni risulta che qualitativamente gli andamenti di M e di M^* sono simili, tranne che per $M \rightarrow \infty$ cui corrispondono M^* e $M^{\wedge}$ finiti:

$M = U/a$	$M^* = U / a^*$	$M^{\wedge} = U/V_{\max}$
0	0	0
< 1	<1	$< \sqrt{(\gamma-1)/(\gamma+1)}$
1	1	$\sqrt{(\gamma-1)/(\gamma+1)} = 0.41$
>1	>1	$> \sqrt{(\gamma-1)/(\gamma+1)}$
∞	$\sqrt{(\gamma+1)/(\gamma-1)}$	1

Per completare l'analisi dei flussi isentropici, occorre considerare il **flusso di massa** : $G = \rho U = \dot{m}/A$.

Per un gas piuccheperfetto, si può esprimere la densità in termini della pressione e della temperatura:

$$G \equiv \frac{\dot{m}}{A} = \rho U = \frac{p}{RT} U = \frac{p}{p_0} \frac{U}{\sqrt{RT}} \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{R}} \sqrt{\frac{T_0}{T}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} = \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \frac{M}{\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} \quad (1.83)$$

Ne discende che il flusso di massa, G , per un dato gas e per un dato numero di Mach, è direttamente proporzionale alla pressione di ristagno ed inversamente proporzionale alla radice quadrata della temperatura di ristagno.

Ma il fatto più interessante è che, per γ e condizioni di ristagno assegnate, **il flusso di massa G varia con M e presenta un valore massimo in condizioni soniche, cioè per $M=1$:**

$$(\rho U)_{\max} = \sqrt{\frac{\gamma}{R} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}}} = \left(\frac{\dot{m}}{A}\right)_{\max} = \rho^* U^* \quad (1.84)$$

Se consideriamo flussi quasi-unidimensionali, nei quali si ha una variazione (graduale) della sezione con l'ascissa assiale: $A=A(x)$, e non consideriamo iniezione di massa, la portata di massa deve rimanere costante in un condotto, e quindi deve essere la stessa di quella in cui si realizzano (eventualmente) le condizioni soniche (massimo flusso):

$$\dot{m} = (\rho U)A = (\rho^* U^*)A^* \quad (1.85)$$

Si ricava allora che il **rapporto tra l'area di una generica sezione e quella della sezione in cui si hanno condizioni critiche** (a parità di portata massica) è:

$$\boxed{\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^* U^*}{\rho U} = \frac{1}{M} \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} \quad (1.86)$$

La **funzione impulso (totale)**, infine, è definita come : $F = A I = A(p + \rho U^2)$.

Tale funzione è molto comoda in problemi propulsivi, in quanto è facile dimostrare che, in assenza di attrito e di forze di massa, la differenza dei valori di F tra due sezioni di un condotto è pari alla spinta esercitata sul quel tratto di condotto.

Considerando sempre gas piuccheperfetto, risulta:

$$F = A(p + \rho U^2) = A \left(p + \frac{p}{RT} \frac{\gamma}{\gamma} U^2 \right) = A \left(p + p \gamma \frac{U^2}{a^2} \right) \quad (1.87)$$

ovvero:

$$\boxed{F = pA(1 + \gamma M^2)} \quad (1.88)$$

Tale funzione può essere adimensionalizzata rapportandola al suo valore in condizioni soniche:

$$\frac{F}{F^*} = \frac{pA(1 + \gamma M^2)}{p^* A^* (1 + \gamma)} = \frac{p}{p_0} \frac{p_0}{p^*} \frac{A}{A^*} \frac{1 + \gamma M^2}{1 + \gamma} \quad (1.89)$$

Sostituendo i vari rapporti [isentropici (1.76), (1.79) e (1.86)], si ottiene:

$$\frac{F}{F^*} = \frac{1 + \gamma M^2}{M \sqrt{2(1 + \gamma) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}} \quad (1.90)$$

Di seguito presentiamo diagrammi che mostrano l'andamento dei rapporti prima derivati in termini del numero di Mach, per $\gamma = 1.4$. I valori numerici possono essere trovati con più precisione nelle tabelle del flusso isentropico.

Dall'analisi delle curve A/A^* ed F/F^* , si deriva che per un dato valore di questi rapporti, risultano due valori del numero di Mach, uno subsonico ed un'altro supersonico. Il valore minimo di tali rapporti si ottiene in condizioni soniche (per $M=1$).

Vedremo in seguito che tali peculiarità saranno responsabili del fenomeno del bloccaggio (strozzamento - collo di bottiglia- choking).

1.8.1 Relazioni tra variazioni Area/Velocità

Consideriamo moti stazionari adiabatici, isentropici e senza iniezione di massa.

Valgono le seguenti forme differenziali delle equazioni di bilancio:

Continuità:

$$d(\rho UA) = 0 \quad (1.91)$$

Quantità di moto:

$$dp + \rho U dU = 0 \quad (1.92)$$

Energia

$$dh + U dU = 0 \quad \text{ovvero} \quad ds = 0 \quad (1.93)$$

Differenziando logaritmicamente la (1.91) abbiamo:

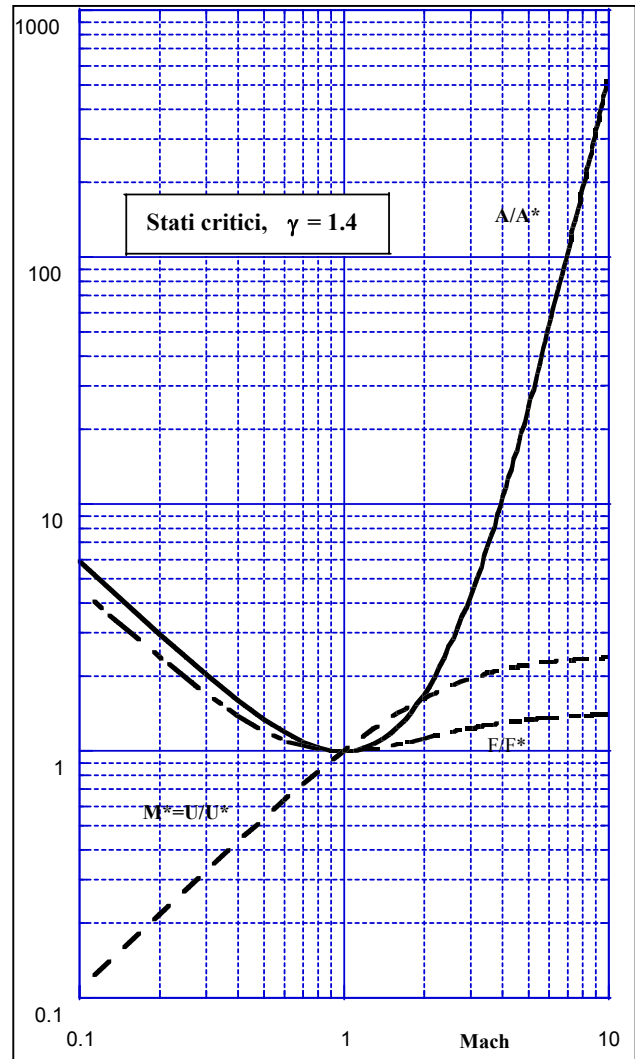
$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dU}{U} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (1.94)$$

Il moto, sotto le ipotesi, è certamente isentropico, per cui ponendo $p=p(\rho)$ si ricava:

$$\frac{dp}{\rho} = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s \frac{d\rho}{\rho} = a^2 \frac{d\rho}{\rho} = -U dU \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{\rho} = -\frac{U}{a^2} dU = -\frac{U^2}{a^2} \frac{dU}{U} = -M^2 \frac{dU}{U} \quad (1.95)$$

Dalle (1.94) e (1.95), si ricava la relazione aree/velocità:

$$\frac{dU}{U} = -\left(\frac{1}{1 - M^2} \right) \frac{dA}{A} \quad (1.96)$$



Combinando opportunamente i differenziali delle altre equazioni si ottengono gli effetti della variazione della sezione trasversale su tutti i parametri nei moti compressibili:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= \left(\frac{\gamma M^2}{1 - M^2} \right) \frac{dA}{A} & \frac{dM}{M} &= - \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 - M^2} \right) \frac{dA}{A} & \frac{dT}{T} &= \left(\frac{(\gamma-1)M^2}{1 - M^2} \right) \frac{dA}{A} \\ \frac{d\rho}{\rho} &= \left(\frac{M^2}{1 - M^2} \right) \frac{dA}{A} & \frac{da}{a} &= \left(\frac{(\gamma-1)M^2}{2(1 - M^2)} \right) \frac{dA}{A} & \frac{dF}{F} &= \left(\frac{1}{1 + \gamma M^2} \right) \frac{dA}{A} \end{aligned} \quad (1.97)$$

Queste relazioni sono utili per comprendere gli effetti della (sola) variazione della sezione trasversale nei moti compressibili:

	dA < 0 la sezione diminuisce		dA > 0 la sezione aumenta	
	M < 1 subsonico	M > 1 supersonico	M < 1 subsonico	M > 1 supersonico
U, velocità	aumenta	diminuisce	diminuisce	aumenta
p, pressione	diminuisce	aumenta	aumenta	diminuisce
M, Mach	aumenta	diminuisce	diminuisce	aumenta
T, temperatura	diminuisce	aumenta	aumenta	diminuisce
ρ, densità	diminuisce	aumenta	aumenta	diminuisce
a, velocità del suono	diminuisce	aumenta	aumenta	diminuisce
F, funzione impulso	diminuisce	diminuisce	aumenta	aumenta



Esercizio 1.8

Aria con $T=293$ K, $p=101.325$ kPa, scorre isentropicamente con una velocità di 300 m/s.

Determina:

Entalpia di ristagno

[338 kJ/kg]

Temperatura di ristagno

[338 K]

Pressione di ristagno

[172.7 kPa]



Esercizio 1.9

Per aria con una temperatura di ristagno di 1000K, trovare.

1. $V_{\max}$

[1417 m/s]

2. T e V per Mach=0.8

[886.5 K e 477.5 m/s]

3. M e V per T= 800K

[1.118 e 633.9 m/s]

4. M e T per V=1000 m/s

[2.227 e 502 K]



Esercizio 1.10

Un tunnel a vento è composto da un grande serbatoio di aria che scarica isentropicamente in una camera di prova e quindi in una regione a pressione sufficientemente bassa.

Quali le condizioni di pressione e temperatura nel serbaotio se si vuole simulare in camera di prova la condizione di volo $M=2$ e quota 53000 ft?

[$T_o=702$ R, $p_o=0.7824$ atm]



Esercizio 1.11

Determina le condizioni di temperatura, pressione e densità sul naso di un aereo che vola a 200 m/s ad una quota con $T=288$ K $p=101,3$ kPa.

[308 K, 128.21 kPa, 1.45 kg/m³]



Esercizio 1.12

Aria scorre isentropicamente in un ugello con una portata di 1 kg/s, $T_o = 310$ K, $p_o = 810$ kPa. Se la gola è critica e la pressione alla sezione di uscita è atmosferica, determina:

l'area di gola	$[5.38 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2]$
il Mach all'uscita	$[2.015]$
la velocità all'uscita	$[529.81 \text{ m/s}]$

1.8.2 Correzioni di comprimibilità

Abbiamo sempre detto che per $M < 0.3$ il flusso può considerarsi incomprimibile, e quindi si possono usare le relative formule, tra cui, ad esempio, quella usata per il **tubo di Pitot** per calcolare la velocità tramite la misura della **pressione dinamica**

$[q = \frac{1}{2} \rho_\infty V^2]$ data dalla differenza della pressione di ristagno (p_o) e di quella statica (p).

Dal teorema di Bernoulli, infatti, si ricava semplicemente:

$$p + \frac{1}{2} \rho_\infty V^2 = p_o \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2} \rho_\infty V^2 = p_o - p \quad (1.98)$$

e quindi la formula di calibrazione per la velocità di un Pitot, in caso incomprimibile è:

$$V = \sqrt{\frac{2(p_o - p)}{\rho_\infty}} \quad (1.99)$$

Cosa avviene a questo rapporto nel caso di regime comprimibile?

Dal flusso adiabatico/isentropico (tale sembra la trasformazione che avviene nel Pitot, in regime subsonico, i.e. $M < 1$) è:

$$\frac{p_o}{p} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (1.100)$$

Per piccoli valori di M , espandendo in serie ricaviamo:

$$\frac{p_o}{p} \approx 1 + \frac{\gamma}{2} M^2 + O(M^4) \quad (1.101)$$

ovvero

$$\frac{p_o - p}{p} \approx \frac{\gamma}{2} M^2 + O(M^4) \quad (1.102)$$

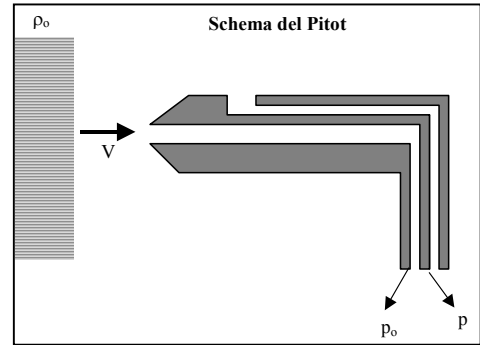
Ricordando che :

$$p = \rho RT = \frac{\rho}{\gamma} (\gamma RT) = \frac{\rho}{\gamma} a^2 = \frac{\rho_o}{\gamma} a^2 \left(\frac{\rho}{\rho_o} \right) = \frac{\rho_o}{\gamma} a^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \approx \frac{\rho_o}{\gamma} a^2 \left(1 - \frac{1}{2} M^2 \right) \quad (1.103)$$

risulta:

$$p_o - p \approx p \frac{\gamma}{2} M^2 \approx \frac{\rho_o}{\gamma} a^2 \left(1 - \frac{M^2}{2} \right) \frac{\gamma}{2} \frac{V^2}{a^2} = \left(\frac{1}{2} \rho_o V^2 \right) \left(1 - \frac{M^2}{2} \right) \quad (1.104)$$

da cui:



$$C_p \equiv \frac{p_0 - p}{\left(\frac{1}{2} \rho_0 V^2\right)} \approx \left(1 - \frac{M^2}{2}\right) \quad (1.105)$$

L'errore di compressibilità nell'usare la formula del Pitot incompressibile, per piccoli valori di M^2 , è quindi dell'ordine di $(-M^2/2)$.

Per $M = 0.3$ risulta $M^2/2 = 0.09/2 = 0.045$ cioè un errore di formula minore del 5% , che rientra nell'ambito degli errori degli strumenti standard usati per il calcolo delle pressioni.

Per bassi valori del numero di Mach le formule isentropiche, espresse in serie di M^2 , per piccoli valori del Mach (tipicamente $M < 0.3$), assumono le seguenti espressioni (che definiscono le cosiddette **correzioni di compressibilità**)

$$\begin{aligned} \frac{T_0 - T}{T} &= \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (\text{esatta}) & \frac{p_0 - p}{p} &\approx \frac{\gamma}{2} M^2 \left(1 + \frac{M^2}{4} + \dots\right) \\ \frac{p_0 - p}{p} &\approx \frac{M^2}{2} \left(1 - \gamma \frac{M^2}{4} + \dots\right) & M^2 &\approx \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}} M \left(1 - \frac{\gamma - 1}{4} M^2 + \dots\right) \\ \rho U &\approx \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{4} M^2 + \dots\right) & \frac{A}{A^*} &\approx \left[\frac{2}{\gamma + 1}\right]^{\frac{\gamma + 1}{2}} \left(\frac{1}{M} + \frac{\gamma + 1}{4} M + \frac{(3 - \gamma)(\gamma + 1)}{32} M^3 + \dots\right) \end{aligned} \quad (1.106)$$



Esercizio 1.13

Un Pitot è usato per misurare la velocità di una corrente d'aria subsonica a 298 K e 1 atmosfera. Se la pressione di ristagno è di 2 cm di H₂O maggiore di quella statica determina:

- velocità della corrente [65.93 m/s]
- Mach della corrente [0.19]



Esercizio 1.14

Un Pitot è usato per misurare la velocità di una corrente d'aria subsonica a 20°C e 1 atmosfera. Se la velocità è 25 m/s determina: la pressione totale e quella dinamica.



1.9 AUSILI PER CALCOLI (tabelle virtuali)

L'uso dei diagrammi/tabelle è molto semplice. Il gas è termodinamicamente rappresentato dal valore del rapporto tra i calori specifici γ . Per ogni γ , le curve/tabelle rappresentano una relazione fra tre parametri:

- una grandezza termo-fluidodinamica " f ",
- il suo valore di ristagno " f_0 " oppure il suo valore critico " f^* "
- il numero di Mach " M "

Si possono aver due tipi di problemi di base:

a) dati due parametri (f_0 e M), trovare il terzo (f)

Esempio: dati $p_0 = 10$ bar e $M = 3$ trovare la pressione statica $p = ?$

Dalle tabelle: per $M = 3$ si trova $p/p_0 = 0.027$ da cui $p = (0.027 \times 10) = 0.27$ bar

b) dati due parametri per uno stato (f_1 , M_1), ed un altro valore di uno dei due in un altro stato (M_2), trovare il valore del secondo ($f_2 = ?$)

Esempio: In un punto di un tubo di flusso si ritrova $M_1 = 0.8$ e $p_1 = 0.5$ bar, quale è il valore della pressione p_2 nel punto in cui è $M_2 = 0.9$?

per $M_1 = 0.8$ si ritrova $(p/p_0)_1 = 0.656$; per $M_2 = 0.9$ si ritrova $(p/p_0)_2 = 0.59$

Essendo la pressione di ristagno pari nei due stati, risulta:

$$\frac{(p/p_o)_1}{(p/p_o)_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{0.656}{0.59} \quad \text{da cui} \quad p_2 = \frac{p_1}{0.90218} = 0.455109 \text{ bar}$$

Per i vari flussi tipici della gasdinamica, presenteremo nel seguito soltanto formule e figure che ne mostrano gli andamenti.

Ometteremo di fornire le voluminose tabelle numeriche tipiche della gasdinamica, e che potranno essere reperite in qualunque testo.

Ben consci, infatti, della frustrazione dello studente nell'interpolare dati (a occhio) con conseguenti incongruenze nei risultati, si è preferito proporre l'uso di tabelle virtuali ricavabili da programmi contenuti nel dischetto a corredo del testo di HODGE e KOENIG.

Tale dischetto contiene, tra gli altri, i seguenti programmi (eseguibili in ambiente DOS) di interesse per questo corso:

- **CIGQ** software per proprietà termodinamiche di gas reali (non perfetti)
- **COMPQ** software per flussi compressibili piani con le opzioni
 - **FA:** flussi alla Fanno
 - **IS:** flussi isentropici
 - **MA:** flussi con adduzione di massa
 - **NS:** proprietà di Onde d'Urto Normali
 - **OS:** proprietà di Onde d'Urto Oblique
 - **PL:** flussi isotermi
 - **PM:** flussi alla Prandtl-Meyer
 - **RA:** flussi alla Rayleigh
- **CONEQ** software per le proprietà di Onde d'Urto Coniche
- **SATM76** software per le proprietà dell'Atmosfera Standard
- **SHEX** software per il metodo Urto-Espansione per il calcolo di profili supersonici

Per usare tali strumenti:

- Copiare i *files* in una cartella (ad.es. Hodge) sul disco rigido.
- Poi con **RISORSE COMPUTER** o con **ESPLORA RISORSE** aprire la cartella e doppio-cliccare sull'icona del file **COMPQ**.

Dovrebbe apparire una schermata come:

ENTER THE SPECIFIC HEAT RATIO? (immettere il valore di γ) batto **1.4** e premo **INVIO**

THE FOLLOWING PROCESSES ARE AVAILABLE:

PROCESS	ABBREVIATION
ISENTROPIC FLOW	IS
NORMAL SHOCK WAVE	NS
OBLIQUE SHOCK WAVE	OS
PRANDTL-MEYER PROCESS	PM
RAYLEIGH FLOW	RA
FANNO FLOW	FA
MASS ADDITION	MA
ISOTHERMAL W/T FRICTION	PL
FINISHED	FI

THE RATIO OF SPECIFIC HEAT IS 1.4

ENTER THE PROCEDURE ABBREVIATION? (immettere abbreviazione processo) batto **IS** e premo **INVIO**

ISENTROPIC FLOW CALLED FOR
INPUT PARAMETER ARE:

PRESSURE RATIO	P
MACH NUMBER	M
AREA RATIO	A
TEMPERATURE RATIO	T
AREA CHANGE PROCESS	AC
M1-M2 AREA REQUIRED	AR

ENTER THE DESIRED LETTER (scelgo la pressione batto **P** e premo **INVIO**)

ENTER THE PRESSURE RATIO, P/P0 (MUST BE <1.0)? (immettere il valore di P/P0 batto **0.5** e premo **INVIO**)

MACH	T.RATIO	P.RATIO	A.RATIO	IMP.RATIO
1.0465	0.8203	0.5	1.0018	1.0007

STAGNATION PRESSURE AND TEMPERATURE ARE CONSTANT IN ISENTROPIC FLOW.

ARE ADDITIONAL ISENTROPIC RELATION REQUIRED? (immettere **Y** per SI oppure **N** per NO) batto **N** e premo **INVIO**

THE FOLLOWING PROCESSES ARE AVAILABLE:

PROCESS	ABBREVIATION
ISENTROPIC FLOW	IS
NORMAL SHOCK WAVE	NS
OBLIQUE SHOCK WAVE	OS
PRANDTL-MEYER PROCESS	PM
RAYLEIGH FLOW	RA
FANNO FLOW	FA
MASS ADDITION	MA
ISOTHERMAL W/T FRICTION	PL
FINISHED	FI

THE RATIO OF SPECIFIC HEAT IS 1.4

ENTER THE PROCEDURE ABBREVIATION?

(immettere abbreviazione processo) batto **FI** (per terminare) e premo **INVIO**

*fine del lavoro (chiudere cliccando sull'icona **X** in alto a destra)*

1.10 CHECK-OUT

Alla fine della prima tappa allo studente diligente dovrebbero essere familiari i seguenti concetti:

- termodinamica di equilibrio e proprietà di gas più che perfetti: entalpia termodinamica, entalpia totale, entropia, luoghi degli stati termo-fluidodinamici nell' abaco di Mollier esteso,
- compressibilità di un fluido/comprimibilità di un moto,
- classificazione termo-fluidodinamica dei moti, stati nel piano a-V, l'ellisse dei moti adiabatici,
- concetto di piccole perturbazioni, effetti della velocità di propagazione dei piccoli disturbi combinata al moto del corpo, zone di silenzio – coni di Mach, angolo di Mach e relativi effetti sul campo di moto attorno ad un corpo,
- familiarità con le equazioni della fluidodinamica in forma differenziale e delle varie funzioni termo-fluidodinamiche,
- stati di riferimento: ristagno, critico, limite,
- stati per flussi adiabatici-isentropici dipendenze da γ e da M dei rapporti delle varie proprietà,
- relazioni rapporti di aree/proprietà,
- correzioni di comprimibilità,
- uso di tabelle virtuali

e dovrebbe essere capace di rispondere agevolmente a domande tipiche quali:

- ❖ cosa è un continuo?
- ❖ un processo isentropico è sempre : a) irreversibile e adiabatico, b) reversibile e adiabatico, c) non viscoso e adiabatico, d) non viscoso e irreversibile, e) nessuno di questi?
- ❖ $Mach \rightarrow \infty$ implica che $V \rightarrow \infty$?
- ❖ Se $R_{gas} = 62 \text{ ft-lbf/(lbm-R)}$ e $c_p = 217 \text{ ft-lbf/(lbm-R)}$ sai trovare il valore di γ ?
- ❖ Quanto vale V_{max} per $T_o=100^\circ\text{C}$? a questa velocità che Mach corrisponde?
- ❖ Come il peso molecolare di un gas determina la velocità del suono ad una data temperatura?
- ❖ Qual'è la differenza tra temperatura statica e di ristagno?
- ❖ Come varia la propagazione dei piccoli disturbi in moto subsonico e in moto supersonico?
- ❖ Se ad una stazione di un condotto si misura $T_o=1000 \text{ K}$ e più a valle si misura $T_o=1200 \text{ K}$, si è aggiunto o sottratto calore alla corrente, tra le due sezioni?
- ❖ Cosa è l'angolo di Mach?
- ❖ Come sono definite le condizioni di ristagno?
- ❖ In un processo irreversibile ma adiabatico variano la temperatura e la pressione di ristagno?
- ❖ In un moto isentropico subsonico in un condotto divergente la pressione aumenta o diminuisce?
- ❖ In un moto incompressibile si può verificare che il coefficiente di pressione sia maggiore di 1?
- ❖ Se il Mach aumenta necessariamente aumenta la velocità?
- ❖ se il M^* aumenta necessariamente aumenta la velocità?
- ❖ se il $M^\wedge$ aumenta necessariamente aumenta la velocità?