

Capitolo 3

Moti Interni

Scopo del Capitolo

La trattazione dei classici problemi della Gasdinamica viene presentata ed intesa verso applicazioni e risoluzione di problemi di interesse.

Questi sono analizzati in un primo tempo come moti semplici (**una sola forza generalizzata**) e successivamente, seguendo la proposta di Shapiro, come combinazioni lineari di più forze generalizzate (**Moti Generalizzati**)

Enfasi sull'uso di tabelle virtuali e la scrittura e l'utilizzo di codice per il calcolo di moti generalizzati in condotti con varie caratteristiche presenti simultaneamente [variazione di sezione, addizione di calore e di massa, attrito, con condizioni isoterme (oleodotti)].

Indice del Capitolo

Paragrafo	pagina
.3.1 GENERALITÀ	2
.3.2 MOTI SEMPLICI QUASI UNIDIMENSIONALI	2
.3.2.1 Variazione di Area	3
.3.2.1.1 Il fenomeno dello strozzamento	3
.3.2.1.2 Diagrammi caratteristici	5
.3.2.1.3 Le relazioni per il moto semplice con variazione di sezione	5
.3.2.1.4 Condotto convergente	7
.3.2.1.4.1 Applicazioni	8
.3.2.1.5 Condotto convergente- divergente : Ugello di "de Laval"	11
.3.2.1.5.1 Posizione e Stabilità di OUN negli ugelli	12
.3.2.1.5.2 Applicazioni	16
.3.2.1.6 Diffusori – prese d'aria	20
.3.2.1.6.1 Prese d'aria subsoniche	21
.3.2.1.6.1 Prese d'aria supersoniche – solo divergente	22
.3.2.1.6.1 Prese d'aria supersoniche – convergente divergente	22
.3.2.1.7 Tunnel supersonici	30
.3.2.1.7.1 Tunnel supersonici a geometria fissa	32
.3.2.1.7.2 Tunnel supersonici a geometria variabile	33
.3.2.1.7.3 Applicazioni	33
.3.2.2 Moti unidimensionali con scambio di calore - Curva di Rayleigh	38
.3.2.2.1 Applicazioni	45
.3.2.3 Moti unidimensionali con attrito - Curva di Fanno	48
.3.2.3.1 Applicazioni	54
.3.2.4 Soluzione OUN come intersezione delle curve di Rayleigh e di Fanno	58
.3.2.5 Moti unidimensionali con scambio di massa	59
.3.2.5.1 Applicazioni	63
.3.2.6 Moti unidimensionali isotermi con attrito	65
.3.2.6.1 Applicazioni	68
.3.3 MOTI GENERALIZZATI	70
.3.4 CHECK-OUT	76

.3.1 GENERALITÀ

Nel paragrafo 1.6 abbiamo espresso le equazioni della fluidodinamica quasi-unidimensionale e le espressioni dei parametri termo-fluidodinamica di interesse in forma differenziale.

Con le notazioni:

$$\text{Flusso di massa} \quad G = \rho U \quad (3.1)$$

$$\text{Entalpia totale} \quad H = h + U^2 / 2 \quad (3.2)$$

$$\text{Impulso totale} \quad F = A (p + \rho U^2) \quad (3.3)$$

dall'analisi delle equazioni di bilancio si è arrivato alle conclusioni:

MASSA/CONTINUITÀ: **se non vi è adduzione/sottrazione di massa:**

$$G A = \text{COSTANTE} \quad D(GA) = 0 \quad (3.4)$$

QUANTITÀ DI MOTO: **se non vi è attrito o impulso o adduzione/sottrazione di massa:**

$$F = \text{costante} \quad d(F) = 0 \quad (3.5)$$

ENERGIA: **se non vi è adduzione/sottrazione di calore:**

$$H = \text{costante} \quad d(H) = 0 \quad (3.6)$$

ENTROPIA: **se non vi sono cause dissipative o adduzioni/sottrazione:**

$$s = \text{costante} \quad d(s) = 0 \quad (3.7)$$

SE non vi sono tutte queste cause il moto sarà **adiabatico/isentropico** e varranno le relazioni di cui al paragrafo 1.8, in cui i rapporti di tutte le proprietà termo-fluidodinamiche sono presentati in funzione del gas (adimensionalmente rappresentato dal rapporto dei calori specifici: γ) e del numero di Mach (M).

Ne discende che le cause di dipartita dalle condizioni di **adiabaticità/isentropicità** possono derivare dagli effetti di:

- **variazione di sezione (area)**
- **adduzione/sottrazione di massa**
- **adduzione/sottrazione di calore**
- **presenza di attrito o adduzione/sottrazione di quantità di moto (impulso)**

e che tali effetti, se opportunamente espressi possono essere considerati come **forze generalizzate**.

.3.2 MOTI SEMPLICI QUASI UNIDIMENSIONALI

Moti semplici sono quelli per cui è presente una sola forza generalizzata per volta che, nei limiti considerati di gas più che perfetto, saranno:

$$\text{variazione di sezione (area)} \quad dA/A \quad (3.8)$$

$$\text{adduzione/sottrazione di massa} \quad d\dot{m}/\dot{m} \quad (3.9)$$

$$\text{adduzione/sottrazione di calore} \quad dH/H \stackrel{\substack{= \\ \text{se } c_p \\ \text{costante}}}{=} dT_o/T_o \quad (3.10)$$

$$\text{presenta di attrito o di impulso} \quad (4 f_F dx)/D \quad (3.11)$$

Sfruttando le forme differenziali delle equazioni integrali di bilancio e delle proprietà termo-fluidodinamica nel paragrafo 3.2 saranno derivate, per ogni moto semplice, i rapporti di tutte le proprietà termo-fluidodinamiche, che saranno presentate in funzione del gas (γ) e del numero di Mach (M).

Anche se, in realtà, non rappresenta un moto semplice (in quanto presenta una combinazione di effetti di attrito e di raffreddamento combinati in modo da realizzare $dT=0$) sarà presentato in questo paragrafo anche il caso di moto isotermo con attrito, di interesse in pipe-lines e gasdotti.

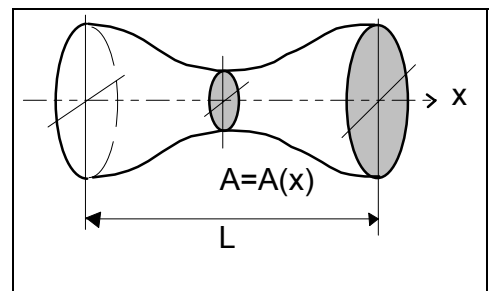
Successivamente, nel paragrafo 3.3 sarà presentato il metodo dei moti generalizzati di Shapiro che analizza moti quasi-unidimensionali alla presenza di più forze generalizzate contemporaneamente, ma con una trattazione linearizzata.

3.2.1 Variazione di sezione

Abbiamo già visto che considerando un volume di controllo (tubo di flusso o tratto di un condotto) per cui si verifica che la sezione trasversale varia di poco rispetto all'ascissa curvilinea: $\frac{L}{A} \frac{dA}{dx} \ll 1$

è lecito assumere, ad ogni stazione dell'ascissa curvilinea x , valori medi di tutte le proprietà termo-fluidodinamiche.

Abbiamo già commentato i limiti di applicabilità di questa trattazione contrapposta alla semplicità dei risultati.



Nel paragrafo 1.8.1 avevamo ricavato le relazioni tra variazione di area e le proprietà termo fluidodinamiche nel caso di moto adiabatico/isentropico. In particolare, si era ritrovata per la funzione flusso di massa G la relazione:

$$\frac{G^*}{G} = \frac{\rho^* a^*}{\rho U} = \frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (3.12)$$

e si era commentato il fatto che la G era massima in condizioni critiche ($M=1$).

Essendo la portata massica $\dot{m}$ pari al prodotto del flusso di massa G per l'area A , $\dot{m} = G A$, ne discende che in un condotto in cui scorre fluido, sotto le ipotesi di moto quasi-unidimensionale, la massima portata si realizza, per moti adiabatico-isentropici, allorquando si verificano condizioni soniche nella sezione di minima area, e che questa condizione regola/limita la portata massica del condotto.

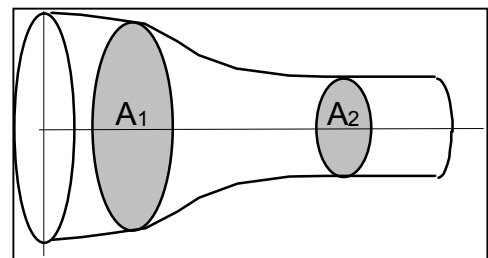
3.2.1.1 Il fenomeno dello strozzamento

Flussi isentropici

Consideriamo due sezioni di un tubo di flusso aventi un rapporto di aree A_2/A_1 ed assumiamo che tutte le proprietà nella sezione (1) (i.e. γ , M_1 , p_1 , T_1) sono note.

In base al M_1 ed al rapporto delle aree, possiamo calcolare, dalle tabelle isentropiche i rapporti:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{(A/A^*)_1}{(A/A^*)_2} \Rightarrow \left(\frac{A}{A^*} \right)_2 = (A/A^*)_1 \frac{A_2}{A_1} \quad (3.13)$$



Dal rapporto $(A/A^*)_2$ **possiamo**, dalle tabelle del flusso isentropico, **calcolare il valore di M_2** . Tutte le condizioni nella sezione (2) si ottengono, quindi, facilmente dalle relazioni isentropiche, tramite i rapporti di ristagno:

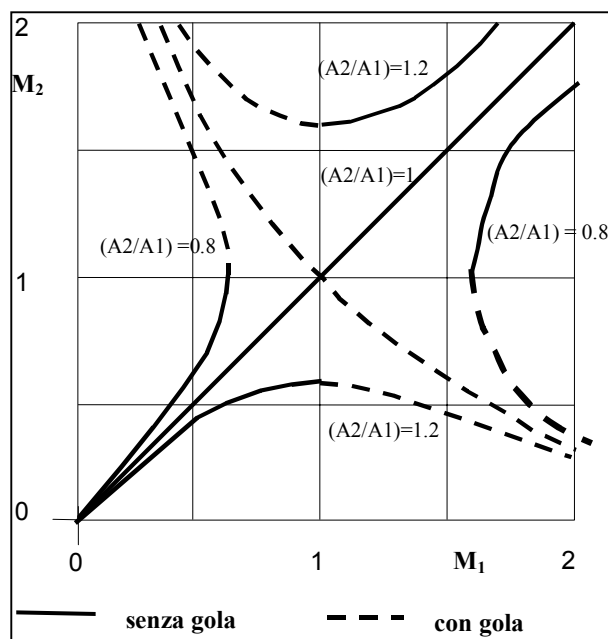
$$p_2 = p_1 \frac{(p/p_o)_2}{(p/p_o)_1} \quad ; \quad T_2 = T_1 \frac{(T/T_o)_2}{(T/T_o)_1} \quad ; \quad \text{ecc...} \quad (3.14)$$

Ripetendo questo esercizio per diversi valori di A_2/A_1 , possiamo produrre i seguenti diagrammi M_1/M_2 da cui si traggono le seguenti considerazioni: (non discutiamo il caso banale $A_1=A_2$):

1. Dati A_2/A_1 e M_1 , vi sono, per M_2 , o due soluzioni o nessuna. Quando vi sono due soluzioni una è subsonica l'altra supersonica. Quale delle due soluzioni si verifichi, dipende dalla esistenza di una gola tra le due stazioni.

Ne deriva, quindi, che per passare da moto subsonico ad un moto supersonico (o viceversa) occorre avere necessariamente una gola nella quale il moto sarà sonico $M=1$.

In altre parole per un dato $A_2/A_1 < 1$ (convergente) e dato $M_1 < 1$ (ingresso subsonico), se esiste una gola il M_2 potrà essere minore o maggiore di uno, a seconda delle condizioni di pressioni a valle; se però non esiste una gola, sarà necessariamente $M_2 \leq 1$ (l'uguaglianza si verifica nel caso la A_2 corrisponda alla sezione critica).



Se invece il condotto è **convergente-divergente** il campo può essere tutto subsonico, tutto supersonico, subsonico/supersonico, supersonico/subsonico a seconda delle condizioni di pressione.

2. Nel caso $A_2 < A_1$ si verifica che potrebbero non esistere soluzioni.

Questo significa che per date condizioni M_1 e per data A_1 se la contrazione è troppo grande la portata potrebbe non riuscire a passare.

Ne deriva il **fenomeno dello strozzamento (choking)**; i.e. dopo eventuali fluttuazioni, si realizzano, nella sezione più stretta, condizioni soniche. Questa situazione limita/fissa la portata massica (costante) nel condotto e determina la distribuzione di Mach [e degli altri parametri termo-fluidodinamici] in tutte le altre sezioni.

Questo processo dipende dalla capacità del “**forte disturbo**” di risalire la corrente, anche supersonica, attraverso un fenomeno che, in supersonica, avviene con onde d'urto instazionarie. Queste eventualmente stabilizzeranno condizioni di flusso in modo da creare opportune capacità di spillaggio di massa, per ridurre la portata, e permettere le condizioni stazionarie.

**Lo stesso fenomeno avviene, *mutatis mutandae*,
per moti con scambi termici, con attrito e con scambio di massa.**

- Ovviamente nel caso di **moti con addizione/sottrazione di calore (Rayleigh)** il parametro non sarà il rapporto delle aree ma quello delle temperature di ristagno (proporzionale al calore addotto/sottratto). L'addizione di calore ($T_{02}/T_{01} > 1$) è qualitativamente simile alla riduzione di area, la sottrazione di calore ($T_{02}/T_{01} < 1$) è simile all'aumento di aree.
- Nel caso di **moti con attrito (curva di Fanno)** il parametro è quello di attrito: $(4fL/D)$ che qualitativamente corrisponde ad una diminuzione di aree.

3.2.1.2 Diagrammi caratteristici

Dato un certo condotto, i **diagrammi dei valori delle pressioni ad ogni sezione, adimensionalizzate rispetto a quella di ristagno** (o dei numeri di Mach lungo il condotto), **calcolati in condizioni di massima portata**, si chiamano **diagrammi caratteristici del condotto**.

Ovviamente avendo assunto una sezione come critica, A^* (i.e. quella in cui si hanno condizioni soniche, $M^*=1$), per ogni altra sezione A , dal rapporto A/A^* (noto) si può risalire a due soluzioni per M nella sezione A (di cui una subsonica ed un'altra supersonica), e da questi valori di M , è facile risalire a tutti i rapporti di pressione p/p_0 , temperature T/T_0 , ecc. .. mediante le tabelle del flusso isentropico.

3.2.1.3 Le relazioni per il moto semplice con variazione di sezione

Valgono le seguenti relazioni differenziali:

Continuità:

$$d(\rho UA) = 0 \quad (3.15)$$

Quantità di moto:

$$dp + \rho U dU = 0 \quad (3.16)$$

Energia

$$dh + U dU = 0 \quad \text{ovvero} \quad ds = 0 \quad (3.17)$$

Differenziando logaritmicamente la (1.84):

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dU}{U} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (3.18)$$

Il moto, sotto le ipotesi, è certamente isentropico, per cui $p=p(\rho)$.

Per cui:

$$\frac{dp}{\rho} = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s \frac{d\rho}{\rho} = a^2 \frac{d\rho}{\rho} = -U dU \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{\rho} = -\frac{U}{a^2} dU = -\frac{U^2}{a^2} \frac{dU}{U} = -M^2 \frac{dU}{U} \quad (3.19)$$

Dalle (3.18) e (3.19), si ricava la relazione aree/velocità:

$$\boxed{\frac{dU}{U} = -\left(\frac{1}{1-M^2} \right) \frac{dA}{A}} \quad (3.20)$$

Combinando opportunamente i differenziali delle altre equazioni si ottengono gli effetti della variazione della sezione trasversale su tutti i parametri nei moti compressibili:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= \left(\frac{\gamma M^2}{1-M^2} \right) \frac{dA}{A} & \frac{dp}{\rho} &= \left(\frac{M^2}{1-M^2} \right) \frac{dA}{A} & \frac{dT}{T} &= \left(\frac{(\gamma-1)M^2}{1-M^2} \right) \frac{dA}{A} \\ \frac{da}{a} &= \left(\frac{(\gamma-1)M^2}{2(1-M^2)} \right) \frac{dA}{A} & \frac{dM}{M} &= -\left(\frac{1+\frac{(\gamma-1)}{2}M^2}{1-M^2} \right) \frac{dA}{A} & \frac{dF}{F} &= \left(\frac{1}{1+\gamma M^2} \right) \frac{dA}{A} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Sommario delle relazioni per moto semplici con variazione di sezione

$$\Psi = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = - \left(\frac{2\Psi}{1-M^2} \right) \frac{dA}{A}$$

$$\frac{dU}{U} = \left(- \frac{1}{1-M^2} \right) \frac{dA}{A}$$

$$\frac{dT}{T} = \left(\frac{(\gamma-1)M^2}{1-M^2} \right) \frac{dA}{A}$$

$$\frac{dp}{p} = \left(\frac{\gamma M^2}{1-M^2} \right) \frac{dA}{A}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \left(\frac{M^2}{1-M^2} \right) \frac{dA}{A}$$

$$\frac{da}{a} = \left(\frac{(\gamma-1)M^2}{2(1-M^2)} \right) \frac{dA}{A}$$

$$\frac{dF}{F} = \left(\frac{1}{1+\gamma M^2} \right) \frac{dA}{A}$$

$$\frac{dp_o}{p_o} = 0$$

$$p_o$$

$$\frac{ds}{c_p} = 0$$

$$\Psi = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

$$\frac{T_o}{T} = \Psi$$

$$\frac{p_o}{p} = \Psi^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \Psi^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$T_o = \text{costante}$$

$$p_o = \text{costante}$$

$$s = \text{costante}$$

$$f_{\text{Fan}} = 0$$

$$\dot{m} = \cos \tan te$$

$$\Psi = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \Psi \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$$\frac{p}{p^*} = \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \Psi \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \Psi \right]^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{T}{T^*} = \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \Psi \right]^{-1}$$

$$\frac{V}{V^*} = M \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \Psi \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{F}{F^*} = \frac{1 + \gamma M^2}{M \sqrt{2(1+\gamma)(\Psi)}}$$

.3.2.1.4 Condotto convergente

Consideriamo un ugello convergente con **condizioni costanti all'ingresso e pressione variabile all'uscita**.

Denotiamo :

- p_B la pressione che una valvola riesce a realizzare nel plenum di scarico
- p_E la pressione nella sezione di uscita.

Si ipotizza che la massima portata massica $\dot{m}$ si verifichi allorquando si stabiliscono condizioni soniche nella sezione di minima area: $A_{min} = A_E = A^*$ **che nel condotto in esame è pari all'area di uscita**. I rapporti delle aree $A(x)/A_{min}$ saranno quindi posto pari a A/A^* e dalle relazioni isentropiche si potrà ritrovare il **diagramma caratteristico riportato in figura costituito dalla linea spesso congiungente i punti (0) ed (1)**.

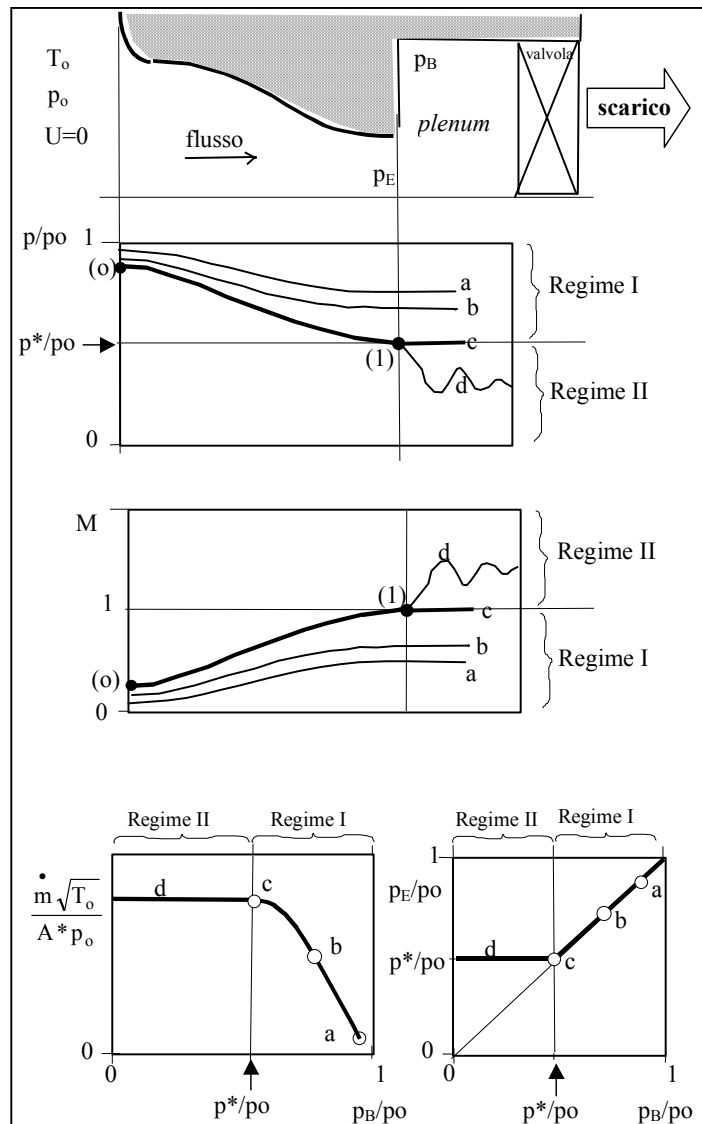
Il punto (1) corrisponde a $M=1$ ed al valore critico per il rapporto di pressione:

per l'aria, $\gamma=1.4$, vale $p^*/p_0 = 0.52828$.

Vediamo cosa accade al variare della pressione p_B nel plenum (p_0 pressione di ristagno è assunta costante).

Ovviamente per $p_B = p_0$ non passa fluido.

Si noti che:



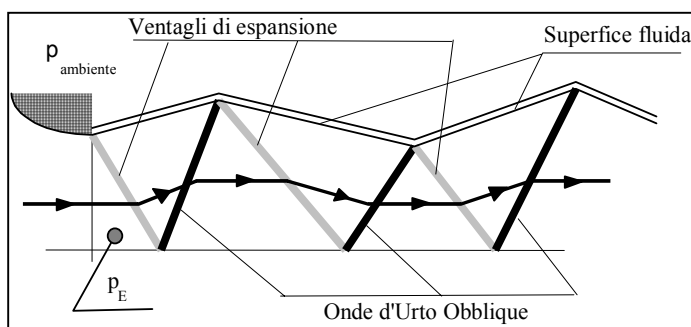
- per $p^* < p_B < p_0$ (curve "a" e "b") i diagrammi di pressione nel convergente cambiano, la portata massica (adimensionalizzata) $\frac{\dot{m} \sqrt{T_0}}{A^* p_0}$ diminuisce e si verifica che la pressione nella sezione di uscita è pari a quella di scarico.
Il flusso nel convergente è interamente subsonico.
- per $p_B = p^* = p_E$, nella sezione di uscita si verifica $M=1$ e vale la curva "c" cioè la curva del diagramma caratteristico, ovvero quella critica (corrisponde alla massima portata).
- per $p_B < p^*$, si ritrova che non variano: la portata massica (adimensionalizzata $\frac{\dot{m} \sqrt{T_0}}{A^* p_0}$), la pressione nella sezione di uscita p_E e la curva delle pressioni nel convergente; i loro valori rimangono pari a quelli corrispondenti alle condizioni critiche. Nella sezione di uscita resta sempre $M=1$.

Si ritrovano quindi due regioni con comportamenti completamente differenti:

- Regione I : $p_B > p^*$; $p_B \cong p_E$; $M_E < 1$ variabilità della portata massica con p_B
- Regione II : $p_B < p^*$; $p_E = p^*$; $M_E = 1$ indipendenza della portata massica da p_B

flusso strozzato,

L'andamento della curva (d) si verifica per valori di $p_B < p^*$. In questo caso, per adeguare il flusso alla pressione del plenum si genera, all'uscita, un ventaglio di espansione con [richieste condizioni di simmetria sull'asse] riflessioni di ODU e successive riflessioni di ODM ecc....(volgarmente detta **zona a salsicciotti**). Nella figura i ventagli di espansione sono disegnati con una sola onda di Mach discreta.



Ugelli convergenti sono spesso usati per limitare (o regolare) la portata di un condotto che è fissata dalla sezione di uscita A_E e dalle condizioni di ristagno T_o e p_o . Con un buon disegno, si hanno ottimi rendimenti di efflusso con coefficienti di scarico tra 0.98 e 0.99 (rapporti tra la portata reale e quelle ideale).

3.2.1.4.1 Applicazioni a un condotto convergente

Dalla analisi del paragrafo precedente risulta che per un condotto convergente in condizioni di moto adiabatico-isentropico la portata massica è costante per valori di $p_B/p_o \leq p^*/p_o$, per l'aria $p^*/p_o = 0.52828$.

Esempio 3.1

Un ugello convergente con un'area di uscita di 0.05 m^2 , scarica un serbatoio che contiene aria ad una pressione di ristagno di 600 kPa ed una temperatura di ristagno pari a 27°C .

Determinare il Mach di uscita e la portata massica al variare della pressione di scarico per i seguenti tre casi: $p_B = 400\text{kPa}$, 200kPa , 100kPa .

Per pressioni di scarico maggiori di $600 \times 0.52828 = 316.0 \text{ kPa}$ l'ugello non è strozzato, il Mach di uscita sarà minore di uno, e la pressione nella sezioni di uscita p_E sarà pari a quella di scarico $p_E = p_B$.

Per pressioni di scarico minori o pari a $600 \times 0.52828 = 316.0 \text{ kPa}$ l'ugello è strozzato, il Mach di uscita sarà unitario, e la pressione nella sezioni di uscita p_E sarà costante e pari $p_E = p^* = 0.52828 p_o$, l'adattamento alla pressione di scarico sarà realizzato con espansioni esternamente all'ugello

Esaminiamo separatamente i 3 casi:

a) $p_B = 400\text{kPa} > 316.0 \text{ kPa}$ l'ugello non è strozzato

da COMPQ $\gamma=1.4$, opzione IS caso P immettendo $p_E/p_o = p_B/p_o = 400/600 = 0.6667$ si ottiene: la schermata

MACH	T RATIO	P RATIO	A RATIO	IMPULSE RATIO
0.7836	0.8906	0.6667	1.0454	1.0223

da cui: $M_E = 0.7836$ $T_E/T_o = 0.8906$

Calcoliamo la portata massica nella sezioni di uscita:

$$\dot{m} = \rho_E A_E V_E$$

➤ la densità è calcolata dall'equazione di gas p.c.p.:

$$\rho_E = \frac{p_E}{R_{aria} T_E} = \frac{400000}{287 [0.8906 (27 + 273)]} = 5.2164 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

➤ la velocità è per definizione:

$$V_E = M_E a_E = M_E \sqrt{\gamma R_{aria} T_E} = M_E \sqrt{(1.4)(287)[0.8906 (27 + 273)]} = 256.7 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Per cui: $\dot{m} = \rho_E A_E V_E = (5.2164)(0.05)(256.7) = 66.95 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$

b) $p_B = 200 \text{ kPa} < 316.0 \text{ kPa}$ l'ugello è strozzato: la sezione di uscita è sonica.

Calcoliamo la portata massica nella sezioni di uscita:

$$\dot{m} = \rho^* A^* V^*$$

➤ la densità è calcolata dall'equazione di gas .c.p.: $\rho^* = \frac{p^*}{\Re_{\text{ara}} T^*} = \frac{(0.52828)(400000)}{287 [0.8333 (27 + 273)]} = 4.4181 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$

➤ la velocità è: $V^* = a^* = \sqrt{1.4 \cdot 287 [0.8333 (27 + 273)]} = 316.9 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

Per cui: $\dot{m} = \rho_E A_E V_E = (5.2164)(0.05)(256.7) = 66.95 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$

c) $p_B = 100 \text{ kPa} < 316.0 \text{ kPa}$ l'ugello è strozzato: la sezione di uscita è sonica:
la portata è la stessa del caso (b)

Calcoliamo la portata in modo leggermente diverso usando le proprietà di ristagno.

Le condizioni di ristagno sono: $p_o = 600000$, $T_o = 300$, $A^* = 0.05$

Dalla (1.83) $\dot{m} = A G = A \sqrt{\frac{\gamma}{\Re_{\text{ari}}}} \frac{p_o}{\sqrt{T_o}} \frac{M}{\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$

in condizioni soniche ($M=1$): $\dot{m} = A^* G^* = \sqrt{\frac{\gamma}{\Re_{\text{ari}}}} \frac{p_o}{\sqrt{T_o}} \frac{A^*}{\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} = \left\{ \sqrt{\frac{\gamma}{\Re_{\text{ari}}}} \left[\frac{\gamma+1}{2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \right\} \frac{A^* p_o}{\sqrt{T_o}}$

Per l'aria il termine in parentesi graffa, **in S.I.** è pari a: $\left\{ \sqrt{\frac{\gamma}{\Re_{\text{ari}}}} \left[\frac{\gamma+1}{2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \right\} = 0.04042$

Sicché $\dot{m}_{\text{aria S.I.}} = 0.04042 \frac{A^* p_o}{\sqrt{T_o}} \quad (3.22)$

Quindi la portata massica è $(0.04042) (0.05) (600000) / \sqrt{300} = 70 \text{ [o.k.]}$



Esercizio 3.1

Aria a 403 K e 1 atm entra un ugello convergente ad una velocità di 150 m/s e si espande isentropicamente ed adiabaticamente fino ad la prssione di uscita di 76 kPa.

Se l'aria di ingresso dell'ugello è di $5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ trovare:

- temperatura, pressione ed entalpia di ristagno [414,25 K; 11.56 kPa; 414.25 kJ/kg]
- il Mach all'ingresso [0.0372]
- temperatura e Mach e area di uscita [371.18 K; 0.758, 31.38 cm²]
- la p_B e la portata massica nel caso l'uscita fosse sonica [58.9 kPa, 0.697 kg/s]



Esercizio 3.2

Trovare la spinta fornita da 2 kg/s di aria su un ugello convergente avente:

ingresso: $p = 172 \text{ KPa}$, $T = 350 \text{ K}$, $A = 0.1 \text{ m}^2$

uscita: $p = 101.3 \text{ kPa}$ $T = 330 \text{ K}$

[Risp. 14150 N]

**Esempio 3.2**

Scarico di un serbatoio di gas mediante un ugello convergente:

➤ equazione del gas:

$$M = \frac{p_o}{\Re_{\text{gas}} T_o} \mathcal{V} \quad (3.23)$$

➤ bilancio massa:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p_o}{\Re_{\text{gas}} T_o} \mathcal{V} \right) = -(\rho V A)_E = \dot{m} \quad (3.24)$$

➤ Volume $\mathcal{V}$ ed $\Re_{\text{gas}}$ sono costante

$$\text{➤ Se l'ugello è strozzato } (p_B < 0.5229 p_o) \quad \dot{m} = \left\{ \sqrt{\frac{\gamma}{\Re_{\text{gas}}}} \left[\frac{2}{\gamma+1} \right]^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \right\} \frac{A^* p_o}{\sqrt{T_o}} \text{ è costante} \quad (3.25)$$

per cui:

$$\frac{\mathcal{V}}{\Re_{\text{gas}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{p_o}{T_o} \right) = - \left\{ \sqrt{\frac{\gamma}{\Re_{\text{gas}}}} \left[\frac{2}{\gamma+1} \right]^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \right\} \frac{A^* p_o}{\sqrt{T_o}} \quad (3.26)$$

Se il processo è isoterma T_o è costante:

$$\frac{dp_o}{p_o} = - \left\{ \left\{ \sqrt{\frac{\gamma}{\Re_{\text{gas}}}} \left[\frac{2}{\gamma+1} \right]^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \right\} \frac{A^* \Re_{\text{gas}} \sqrt{T_o}}{\mathcal{V}} \right\} dt \quad (3.27)$$

ne discende

$$t \underset{\substack{\text{processo} \\ \text{isoterma}}}{=} - \left\{ \sqrt{\frac{\Re_{\text{gas}}}{\gamma}} \frac{\mathcal{V}}{A^* \Re_{\text{gas}} \sqrt{T_o}} \left[\frac{\gamma+1}{2} \right]^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \right\} \ln \left[\frac{p_o}{p_{o,\text{iniziale}}} \right] \quad (3.28)$$

per aria in unità S.I.:

$$t \underset{\substack{\text{isoterma} \\ \text{aria, SI}}}{=} - \frac{0.086 \mathcal{V}}{A^* \sqrt{T_o}} \ln \left[\frac{p_o}{p_{o,\text{iniziale}}} \right] \quad (3.29)$$

Se il processo è isentropico:

$$\frac{p_o}{p_{o,\text{iniz}}} = \left[\frac{T_o}{T_{o,\text{iniz}}} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} ; \quad T_o = T_{o,\text{iniz}} \left[\frac{p_o}{p_{o,\text{iniz}}} \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (3.30)$$

ne discende:

$$\frac{d p_o}{dt T_o} = \frac{1}{\gamma} \frac{(p_{o,\text{iniz}})^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}{T_{o,\text{iniz}}} (p_o)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \frac{dp_o}{dt} \quad \frac{p_o}{\sqrt{T_o}} = \frac{(p_{o,\text{iniz}})^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}{\sqrt{T_{o,\text{iniz}}}} (p_o)^{\frac{\gamma+2}{2\gamma}} \quad (3.31)$$

da cui si ricava:

$$t = \left\{ \sqrt{\frac{1}{\gamma \Re_{\text{gas}}}} \left[\frac{\gamma+1}{2} \right]^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \frac{2 \mathcal{V}}{A^* (\gamma-1) \sqrt{T_{o,\text{iniz}}}} \right\} \left[\left(\frac{p_o}{p_{o,\text{iniziale}}} \right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} - 1 \right] \quad (3.32)$$

per aria nel sistema S.I.:

$$t_{\text{isentropico aria SI}} \approx 0.43 \frac{2 \gamma'}{A^*} \frac{1}{\sqrt{T_{o,\text{iniz}}}} \left[\left(\frac{p_o}{p_{o,\text{iniziale}}} \right)^{-0.143} - 1 \right] \quad (3.33)$$

Tali formulazioni sono valide fino a che la $p_o = 1/0.52828 p_B$



Esercizio 3.3

Esercizio un serbatoio contenente aria compressa a 100 atm. di 0.117 m³, scarica nell'atmosfera tramite un ugello convergente avente $A^* = 0.314 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ determinare il tempo per raggiungere il 20% della pressione iniziale, nei due casi di efflusso isentropico [18 s] e di efflusso isoterma [30 s]



3.2.1.5 Condotta convergente-divergente: Ugello di "de Laval"

Con le stesse premesse fatte per il condotto puramente convergente possiamo tracciare le curve caratteristiche e quelle di funzionamento per un ugello convergente-divergente, cosiddetto di "de Laval". Prima di analizzare i diagrammi caratteristici ed i regimi operativi, notiamo che nel caso di esistenza di Onde d'Urto si genera, a valle, una variazione della pressione di ristagno.

In questo caso, nell'esaminare i diagrammi delle pressioni occorre tenere in conto che per la parte di diagrammi a destra dell'Onda d'Urto, le pressioni riportate sono in effetti:

$$\frac{p_y}{p_o} = \left[\frac{p_y}{p_{oy}} \right]_{\text{IS}} \left[\frac{p_{oy}}{p_{oy}} \right]_{\text{OU}} \quad (3.34)$$

I punti caratteristici sono:

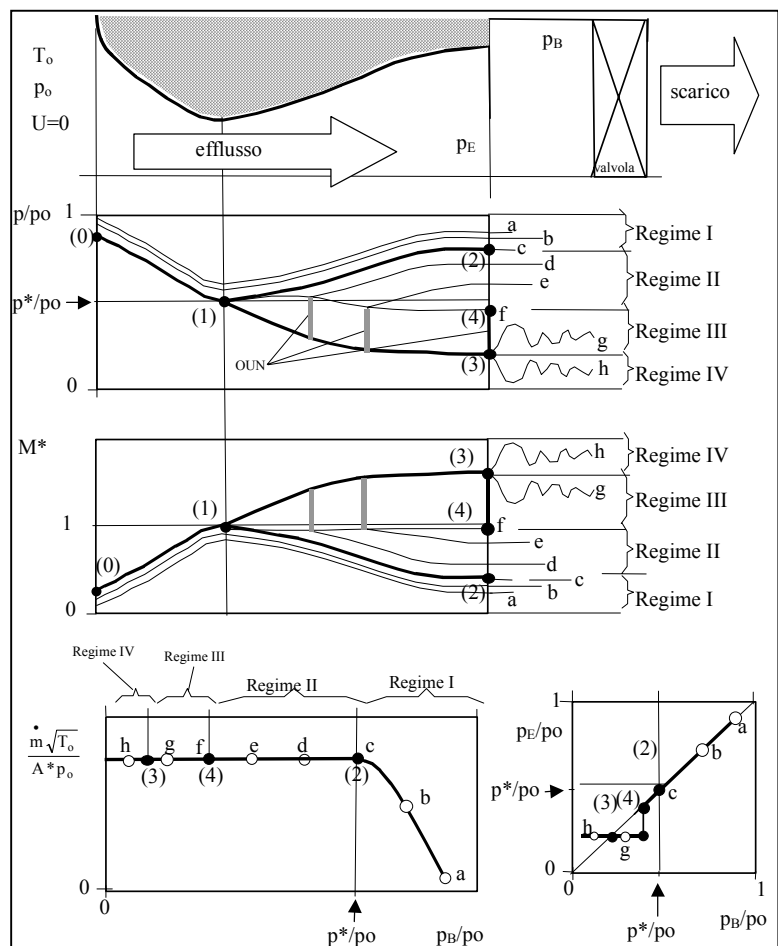
- (0) condizione all'ingresso se in gola sussistono condizioni soniche
- (1) condizione sonica in gola
- (2) condizione subsonica all'uscita se in gola sussistono condizioni soniche
- (3) condizione supersonica all'uscita se in gola sussistono condizioni soniche, (**condizione di progetto**)
- (4) condizione a valle di una Onda d'Urto Normale nella sezione di uscita

Sussistono quattro differenti regimi di funzionamento che si realizzano al diminuire della pressione allo scarico:

I. **il flusso è completamente subsonico**; l'ugello si comporta come un venturi (apparato comunemente usato per misure di portate in base a rapporti di pressione)

II. **il flusso è subsonico nel convergente, sonico in gola e supersonico in parte del divergente**, con Onde d'Urto Normali nella parte divergente dell'ugello dopo le quali il flusso ridiventa subsonico,

III. **il flusso nell'ugello è completamente supersonico nel divergente ed è congelato (non risente le variazioni di pressione allo scarico)**; esiste una Onda d'Urto Obliqua all'uscita,



IV. **il flusso nell'ugello è completamente supersonico nel divergente ed è congelato (non risente le variazioni di pressione allo scarico);** esiste un Ventaglio di Espansione all'uscita.

**La portata massica rimane costante allorquando (Regioni II, III, IV)
la pressione allo scarico è minore od eguale a quella del punto (2).**

In conclusione:

- **nel funzionamento subsonico:** vi è una infinità di profili di pressione nell'interno dell'ugello;
- **nel funzionamento supersonico:** la curva di pressione, nell'interno dell'ugello, è unica.

3.2.1.5.1 Posizione e Stabilità di OUN negli ugelli

Nel caso sussista una Onda d'Urto nell'ugello occorre affrontare due problemi:

1. trovare la posizione dell'urto
2. verificare che questa posizione è stabile.

Posizione dell'urto nel divergente

Supporremo noti : p_0 , T_0 , $A(x)$, p_E ; ovviamente il rapporto p_E / p_0 deve essere compreso tra i punti caratteristici (2) e (4), in modo tale che sia stabilito il **regime II**, in questo caso la gola è critica: $A_T = A^*$.

Ovviamente si potrebbe procedere per tentativi: posizionando l' OUN in una data posizione, si traccia il diagramma dei rapporti di pressione e si confronta il valore del rapporto di pressione che ne deriva all'uscita con la p_E/p_0 fissata; se ne risulta un valore superiore occorre fare avanzare la posizione dell' OUN.

Ma si può usare anche un metodo analitico.

Notiamo, per quanto riguarda le condizioni ristagno, che:

- la temperatura di ristagno T_0 è costante in tutto l'ugello (attesa l'adiabaticità) del moto,
- la pressione di ristagno p_0 ha un brusca diminuzione attraverso la OUN; l'entità di questo salto aumenta con l'intensità dell'urto (i.e. con l'aumentare del Mach a monte dell'urto diminuisce la pressione di ristagno a valle della OUN).

Denotiamo:

- con il pedice "x" la zona a monte della OUN
- con il pedice "y" la zona a valle della OUN

Nella zona "y" ovviamente varranno tutte le relazioni dell'isentropica.

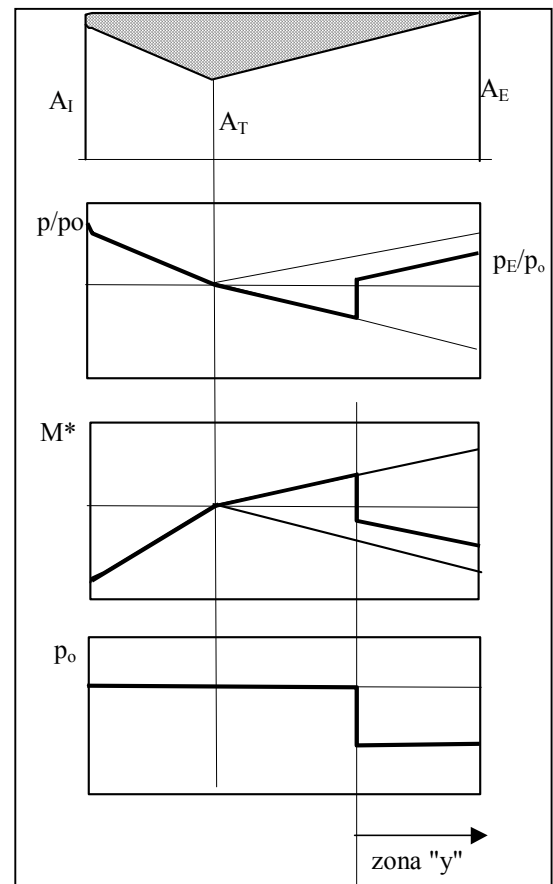
La continuità tra la sezione di gola e la sezione di uscita è:

$$[\rho^*][V^*][A^*] = [\rho_E][V_E][A_E] \quad (3.35)$$

che richiamando gas pcp, e definizione di mach: può essere scritta come:

$$\left[\frac{p^*}{\mathfrak{R}_{\text{gas}} T^*} \right] \left[\sqrt{\rho \mathfrak{R}_{\text{gas}} T^*} \right] [A^*] = \left[\frac{p_E}{\mathfrak{R}_{\text{gas}} T_E} \right] \left[M_E \sqrt{\rho \mathfrak{R}_{\text{gas}} T_E} \right] [A_E] \quad (3.36)$$

Ovvero:



$$\aleph = \frac{p^*}{p_E} \frac{A^*}{A_E} \sqrt{\frac{T_o}{T^*}} = \frac{M_E}{\sqrt{T_E/T_o}} \quad \text{i.e.} \quad M_E - \aleph \sqrt{\frac{T_E}{T_o}} = 0 \quad (3.37)$$

Ricordando la relazioni isentropica

$$\frac{T_E}{T_o} = \frac{1}{\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_E^2\right]} \quad (3.38)$$

si ottiene dalla (1.37)

$$M_E \sqrt{\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_E^2\right]} - \aleph = 0 \quad (3.39)$$

quadrando:

$$M_E^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_E^2\right) - \aleph^2 = 0 \quad (3.40)$$

si ottiene la quadrica:

$$\frac{\gamma-1}{2} \left[M_E^2\right]^2 + M_E^2 - \aleph^2 = 0 \quad (3.41)$$

che ha soluzione:

$$M_E^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2(\gamma-1)\aleph^2}}{\gamma-1} \quad (3.42)$$

Noto M_E , si può allora determinare, nota la p_E , la pressione di ristagno nella zona "y" (a valle della OUN):

$$p_{oy} = p_E \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_E^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.43)$$

A questo stadio conosciamo le pressioni di ristagno a monte (p_o) ed a valle (p_{oy}) della OUN e dal loro rapporto possiamo determinare il **Mach a valle dell' OUN** (M_γ) dall'equazione:

$$\frac{p_{oy}}{p_o} = \frac{\left[\frac{\frac{\gamma-1}{2} M_\gamma^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_E^2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left[\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_\gamma^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}} \quad (3.44)$$

Una volta risolta per M_γ la sezione in cui è posizionata la OUN è quella cui corrisponde l'area:

$$A_\gamma = \frac{A_T}{M_\gamma} \left[\frac{2}{\gamma-1}\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} (M_\gamma)^2\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (3.45)$$

Stabilità di una OUN in un divergente supersonico

Consideriamo una OUN posta nel divergente di un ugello di "de Laval" in una posizione di equilibrio e perturbiamo la sua posizione nei due sensi per verificarne la stabilità.

Ammettiamo che il disturbo derivante dallo spostamento sia piccolo e che le condizioni all'ingresso ed all'uscita dell'ugello siano mantenute costanti.

Se il sistema reagisce in modo da tentare di annullare lo spostamento dell'onda, la posizione di equilibrio sarà stabile, altrimenti sarà instabile.

Ricordando che:

$$\frac{dM}{dA} = -\frac{M}{A} \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 - M^2} \quad (3.46)$$

e che per le OUN (1=stazione a monte ; 2=stazione a valle) (vedi 2.24):

$$\frac{d(p_{o2}/p_{o1})}{dM_1} < 0 \quad (3.47)$$

risulta:

$$\frac{d(p_{o2}/p_{o1})}{dx} = \frac{d(p_{o2}/p_{o1})}{dM_1} \frac{dM_1}{dA} \frac{dA}{dx} \quad (3.48)$$

Nel caso della OUN nel divergente sarà:

- $dA/dx > 0$
- $M_1 > 1$ da cui $d(M_1)/dA > 0$

quindi risulta:

$$\frac{d(p_{oy}/p_{ox})}{dx} < 0 \quad (3.49)$$

Ricordando le relazioni tra le aree critiche e le pressioni di ristagno e tra le aree critiche ed i flussi di massa:

$$\frac{(\rho^* V^*)_y}{(\rho^* V^*)_x} = \frac{A^*_x}{A^*_y} = \frac{p_{oy}}{p_{ox}} \quad (3.50)$$

risulta per, questo caso:

$$\frac{d(A^*_x/A^*_y)}{dx} < 0 \quad ; \quad \frac{d[(\rho^* V^*)_y/(\rho^* V^*)_x]}{dx} < 0 \quad (3.51)$$

Nel caso di una OUN nel divergente si verifica che la gola è critica , id. $A_T = A^*_x$ quindi:

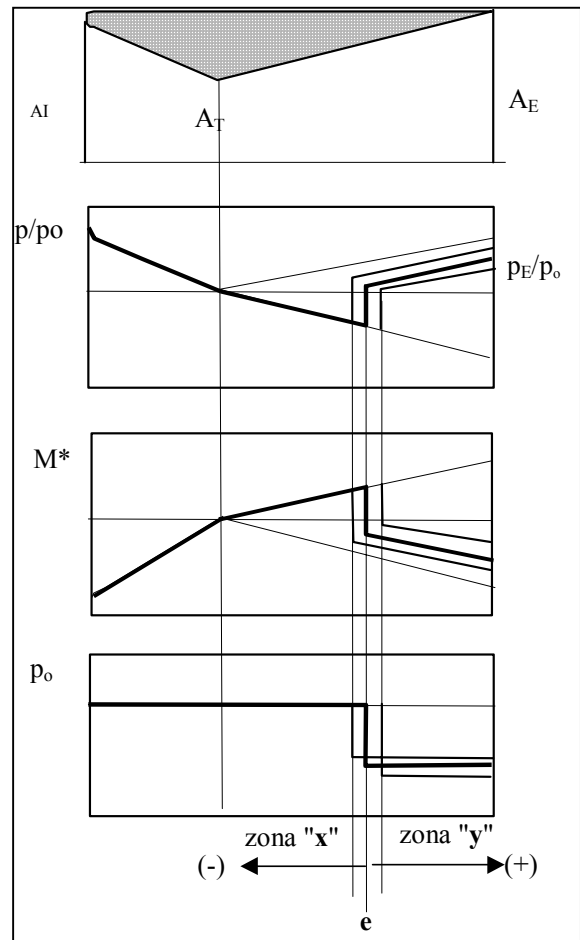
$$dx > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{la OUN viene spostata verso destra}$$

dalla (3.58):

$$A_T = A^*_x < A^*_y \quad (\rho^* V^*)_y < (\rho^* V^*)_x \quad (3.52)$$

il massimo flusso di massa che riesce a passare a valle della OUN è diminuito

si crea **strozzamento (choking)**: a valle il flusso è subsonico, nascono disturbi di compressione che rimontano la corrente e **spingono la OUN verso sinistra**.



$$dx < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{la OUN viene spostata verso sinistra}$$

dalla (3.58):

$$A_T = A^*_x > A^*_y \quad (\rho^*V^*)_y > (\rho^*V^*)_x \quad (3.53)$$

il massimo flusso di massa che riesce a passare a valle della OUN è aumentato, la massa passa più facilmente, si crea una **depressione/aspirazione**: a valle il flusso è subsonico, nascono disturbi di espansione che rimontano la corrente e **attirano la OUN verso destra**.

Ergo, in entrambi i casi: **il sistema reagisce al disturbo di posizione:**

la posizione di equilibrio di una OUN in un condotto divergente è stabile

Instabilità di una OUN in un convergente supersonico

Anche se in questo contesto abbiamo considerato solo ugelli la cui parte convergente è subsonica, approfittiamo di questa occasione per studiare anche la stabilità della posizione di una OUN in un convergente supersonico (tipico di una presa d'aria/diffusore supersonico che sarà analizzata d'appresso).

La trattazione è simile a quella precedente.

Nel caso della OUN nel convergente supersonico sarà:

- $dA/dx < 0$
- $M_1 > 1$ da cui $d(M_1) / dA > 0$

quindi risulta:

$$\boxed{\frac{d(p_{oy}/p_{ox})}{dx} > 0} \quad (3.54)$$

Ricordando la relazione tra le aree critiche e le pressioni di ristagno e tra le aree critiche ed i flussi di massa:

$$\frac{(\rho^*V^*)_y}{(\rho^*V^*)_x} = \frac{A^*_x}{A^*_y} = \frac{p_{oy}}{p_{ox}} \quad (3.55)$$

risulta:

$$\frac{d(A^*_x/A^*_y)}{dx} > 0 \quad ; \quad \frac{d[(\rho^*V^*)_y/(\rho^*V^*)_x]}{dx} > 0 \quad (3.56)$$

Nel caso di una OUN nel convergente risulta che la gola è subsonica la massa è fissata da qualche sistema a valle dell'ugello che funge da valvola regolatrice di portata.

$$Dx > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{la OUN viene spostata verso destra}$$

dalla (3.63):

$$A^*_x > A^*_y \quad (\rho^*V^*)_y > (\rho^*V^*)_x \quad (3.57)$$

il massimo flusso di massa che riesce a passare nel condotto a valle della OUN è aumentato, la massa passa più facilmente, si crea una **depressione/aspirazione**: a valle il flusso è subsonico, nascono disturbi di espansione che rimontano la corrente e **attirano la OUN verso destra**.

$$dx < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{la OUN si sposta verso sinistra}$$

$$A_T = A^*_x < A^*_y \quad (\rho^*V^*)_y < (\rho^*V^*)_x \quad (3.58)$$

dalla (3.58):

il massimo flusso di massa che riesce a passare nel condotto a valle della OUN è diminuito si crea **choking**: a valle il flusso è subsonico, nascono disturbi di compressione che rimontano la corrente e **spingono la OUN verso sinistra**.

Ergo, in entrambi i casi: **il sistema reagisce amplificando il disturbo di posizione :**

la posizione di equilibrio di una OUN in un condotto convergente è instabile

3.2.1.5.2 Applicazioni

Tabella sinottica dei dati di funzionamento dell'ugello di de Laval

Punti caratteristici	regime	Gola	Mach all'uscita	Pressione all'uscita	Note sull'efflusso
(2)	I	$M < 1$	$M_E < 1$	$p_E = p_B$	isentropico
		$M = 1$	$M_E < 1$	$p_E = p_B$	p_o min., p_B max per flusso strozzato
(4)	II	$M = 1$	$M_E < 1$	$p_E = p_B$	OUN nel divergente
		$M = 1$	$M_{E,a \text{ monte OUN}} > 1$ $M_{E,a \text{ valle OUN}} < 1$	$p_{E,a \text{ monte OUN}} < p_B$ $p_{E,a \text{ valle OUN}} = p_B$	OUN all'uscita
		$M = 1$	$M_E > 1$	$p_E < p_B$ <i>ugello sovraespanso</i>	OUO all'uscita
	III	$M = 1$	$M_E > 1$	$p_E = p_B$ <i>espansione ottimale</i>	isentropico
(3)	IV	$M = 1$	$M_E > 1$	$p_E > p_B$ <i>ugello sottoespanso</i>	Ventaglio di espansione all'uscita

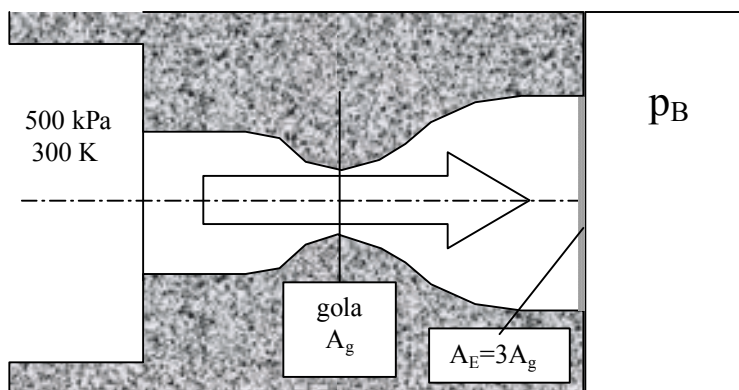


Esempio 3.3

Un ugello convergente divergente con rapporto area di **3.0** scarica aria da un serbatoio a pressione di ristagno **500 kPa**, e temperatura di ristagno **300 K**.

Identificare i punti caratteristici e le pressioni di uscita per ogni regime con l'uso di COMPQ

I punti caratteristici (2) e (3) corrispondono alle due condizioni di funzionamento isentropico.



Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **IS**, caso **A** il valore di A/A^* **3.0** si ottiene la schermata:

MACH	T RATIO	P RATIO	A RATIO	IMPULSE RATIO
0.1974	0.9923	0.9732	3.0000	2.4284
MACH	T RATIO	P RATIO	A RATIO	IMPULSE RATIO
2.6374	0.4182	0.0473	3.0000	1.2018

Da cui si ottengono i punti di funzionamento:

(2)	$(p/p_o)_2 = 0.9732$	$p(2) = 486.6 \text{ kPa}$	$M_{(2)} = 0.1974$
(3)	$(p/p_o)_2 = 0.0473$	$p(3) = 23.65 \text{ kPa}$	$M_{(3)} = 2.6374$

Il punto caratteristico (4) corrisponde ad una OUN nella sezione di uscita

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **NS**, caso **U** immettendo il valore del Mach a monte dell'OUN **2.6374** si ottiene la schermata

M1 **M2** **P2/P1** **T2/T1** **RHO 2/1** **PO2/PO1**
2.6374 **0.5007** **7.9485** **2.2770** **4908** **0.4462**
STAGNATION TEMPERATURE IS CONSTANT ACROSS A NORMAL SHOCK
THE CHANGE IN ENTROPY IS DELS/CP=0.2306

Si ricava quindi che il Mach a valle della OUN è $M_{(4)}=0.5007$ e $p_y/p_x=7.9485$

Il punto caratteristico (4) rappresenta la pressione a valle dell'OUN nella sezione di uscita rapportato alla pressione di ristagno a monte:

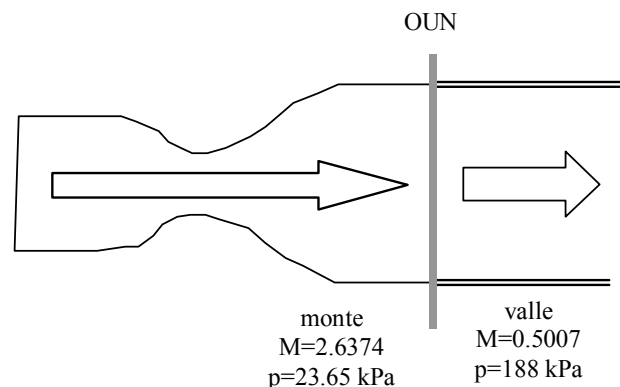
$$\left(\frac{p}{p_o}\right)_{(4)} = \frac{p_y}{p_x} \frac{p_{(3)}}{p_o} = (7.9485)(0.0473) = 0.3759$$

$\underbrace{p_x}_{\text{OUN}} \quad \underbrace{p_o}_{\text{ISEN}}$

la pressione è quindi:

$$p_{(4)} = \left(\frac{p}{p_o}\right)_{(4)} p_o = (0.3759)(500) = 187.98 \quad [\text{kPa}] = p_B$$

la situazione è come in figura a lato



Riassumendo i punti caratteristici dell'ugello sono dati dalla tabella:

Punto Caratteristico	$p_{(i)}$ kPa	$(p/p_o)_{(i)}$	Mach	regime
				I
(2)	486.6	0.9732	0.1974	
				II
(4)	188	0.3759	0.5007	
				III
(3)	23.65	0.0473	2.6374	
				IV



Esempio 3.4

Per l'ugello precedente trovare i Mach di uscita e le condizioni di efflusso per i due valori di pressioni di scarico: caso a) 100 kPa e caso b) 10 kPa.

Caso (a)

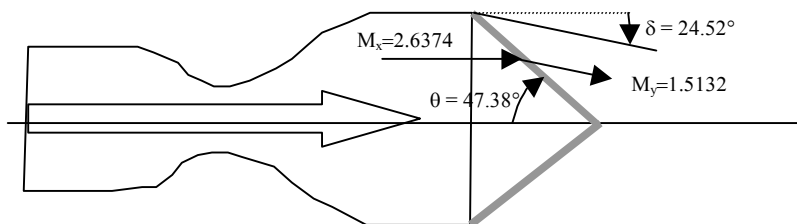
Dalla tabella precedente la $p_B=100$ kPa capita nel regime III. Il moto è caratterizzato da **un'Onda d'Urto Obliqua**, OUO all'uscita inclinata, caratterizzata da:

- a monte: $M_x=2.6374$ $p_x = 23.65$ kPa
- a valle: $M_y = ?$ $p_y = 100$ kPa

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$ opzione **OS** caso **PR** immettendo il valore del Mach a monte **2.6374** ed il rapporto di pressione attraverso l'OUO $p_y/p_x=100/23.65=4.2283$ si ottiene la schermata:

M1 **DELTA** **THETA** **M2** **P2/P1** **PO2/PO1** **T2/T1** **RHO2/RHO1** **DELS/CP**
2.6374 **24.5249** **47.3847** **1.5132** **4.2283** **0.7484** **1.6401** **2.5781** **0.0828**

Ne segue che l'Onda d'Urto Obliqua è inclinata di 47.38° e causa una deviazione del flusso di 24.52° , il Mach a valle è 1.5132 (ancora supersonico). La situazione è come in figura.



Caso (b)

Dalla tabella precedente la $p_B = 10$ kPa capita nel regime IV. Il moto è caratterizzato da un **ventaglio di espansione** all'uscita caratterizzato da:

- a monte: $M_x = 2.6374$ $p_x = 23.65$ kPa
- a valle $M_y = ?$ $p_y = 10$ kPa

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$ opzione **PM** caso **PR** immettendo il valore del Mach a monte **2.6374** ed il rapporto di pressione attraverso il ventaglio di espansione $p_y/p_x = 10/23.65 = \mathbf{0.42283}$ si ottiene la schermata:

M1	M2	ANGLE(DEG.)	T2/T1	P2/P1
2.6374	3.2077	11.3581	0.7820	0.4228

Ne segue che il ventaglio di espansione causa una deflessione della corrente verso l'esterno di 11.36° ed accelera il flusso fino a Mach di 3.2077

Per verificare l'estensione del ventaglio:

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$ opzione **PM** caso **M** immettendo il valore del Mach a monte **2.6374** si ottiene la schermata:

MACH NO.	NU(DEG)	NU(RAD)	MACHANG(DEG)
2.6374	42.2498	0.7374	22.2817

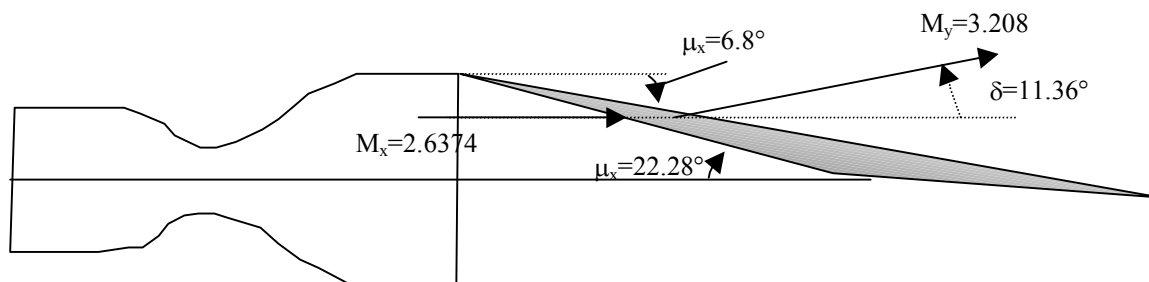
Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **PM** caso **M** immettendo il valore del Mach a valle **3.2077** si ottiene la schermata:

MACH NO.	NU(DEG)	NU(RAD)	MACHANG(DEG)
3.2077	53.6076	0.9357	18.1647

ne discende che il ventaglio è delimitato

- da un'onda di Mach inclinata di 22.28° rispetto alla direzione del Mach a monte
- da un'onda di mach inclinata di 18.167° rispetto alla direzione del Mach a valle, cioè di $18.16 - 11.36 = 6.8^\circ$ rispetto alla direzione del Mach a monte.

La situazione è come in figura:



Esempio 3.5

Considera l'ugello precedente e trova il campo di funzionamento per $p_B = 250$ kPa.

La tabella pone questo caso nel regime II, esiste una **OUN** nella parte divergente dell'ugello.

Possiamo procedere o per tentativi: posizionare la OUN in una sezione e verificare se la $p_E = p_B$, ed iterare, oppure usare la soluzione esatta descritta nel para. 3.2.1.5.1 che si basa nel calcolare il parametro

$$\aleph = \frac{p^*}{p_E} \frac{A^*}{A_E} \sqrt{\frac{T_o}{T^*}} \quad (3.59)$$

e da questo ricavare la soluzione:

$$M_E^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2(\gamma - 1)\aleph^2}}{\gamma - 1} \quad (3.60)$$

Con i dati del problema il parametro $\aleph$ vale

$$\aleph = \frac{p^*}{p_E} \frac{A^*}{A_E} \sqrt{\frac{T_o}{T^*}} = \frac{0.5283}{250} \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{0.8333}} = 0.38582 \quad (3.61)$$

da cui:

$$M_E^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2(\gamma - 1)\aleph^2}}{\gamma - 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2(0.4)(0.38582)^2}}{0.4} = \begin{cases} 0.1447 \\ -5.1447 \end{cases} \quad (3.62)$$

ovviamente si scarta la soluzione negativa, ne deriva $M_E = 0.3804$.

Noto M_E è calcolabile il rapporto pressione, pressione di ristagno a valle della OUN all'uscita:

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **IS** caso **M** immettendo **0.3804** si ha la schermata:

MACH	T.RATIO	P.RATIO	A.RATIO	IMPULSE RATIO
0.3804	0.9719	0.9050	1.6572	1.4225

da cui si ricava che:

$$p_E/p_{oE} = 0.9050 \quad \text{e quindi} \quad p_{oE} = \frac{p_E}{p_E/p_{oE}} = \frac{250}{0.9050} = 276.24 \text{ kPa}$$

ma:

- la pressione di ristagno a valle della OUN è proprio $p_{oE} = p_{oy} = 276.24 \text{ kPa}$,
- la pressione di ristagno a monte della OUN è $p_{ox} = 500 \text{ kPa}$,
- il rapporto di pressioni di ristagno attraverso la OUN è $\frac{p_{oy}}{p_{ox}} = \frac{276.24}{500} = 0.55249$

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **NS** caso **S** immettendo **0.55249** si ha la schermata:

M1	M2	P2/P1	T2/T1	RHO2/1	PO2/PO1
2.3709	0.5263	6.3914	2.0128	3.1755	0.5525

si ricava che l'OUN è posizionata nella sezione laddove si verifica $M=2.3709$

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **IS**, caso **M** immettendo **2.3709** si ottiene la schermata:

MACH	T RATIO	P RATIO	A RATIO	IMPULSE RATIO
2.3709	0.4708	0.07158	2.34	1.1716

L'OUN è posizionata nella sezione all'ascissa "x" dove si verifica $A(x)/A_{gola} = 2.34$



Esercizio 3.4

una portata di 1 kg/s di aria passa in un ugello con $T_o=310K$, $p_o=810 \text{ kPa}$,

Se $p_b=p_E=101.3 \text{ kPa}$, determina:

1. area di gola $5.37 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
2. M_E 2.015
3. V_E 529.81 m/s



Esercizio 3.5

Aria a $T=284\text{ K}$ e $p=1\text{ atm}$ passa isentropicamente attraverso un ugello convergente/divergente. La $V_{\text{ingresso}} = 150\text{ m/s}$, l'area di ingresso è 10 cm^2 . Se il moto all'uscita è supersonico: trova:

- M_{ingresso} 0.443
- T_o e p_o 245 K, 115.93 kPa
- T^* e p^* 245.82 K, 61.25 kPa
- se $T_E = 220\text{ K}$ trova M_E V_E 1.70 387.57 m/s
- A^* 6.798 cm^2 .

**Esercizio 3.6**

Un razzo viaggia con $T_o = 1670\text{ K}$, $P_o = 3\text{ Mpa}$, $c_p = 1.2\text{ kJ/(kg K)}$ $\gamma = 1.3$
Se la $p = 101.3\text{ kPa}$ trova:

il rapporto [spinta con ugello conv-div $A_E/A^* = 1.5$] / [spinta con ugello solo convergente]
1.078

**Esercizio 3.7**

aria con una velocità di 210 m/s decelera in un diffusore a 60 m/s

All'ingresso $T = 278\text{ K}$, $p = 80\text{ kPa}$, all'uscita $P = 90\text{ kPa}$

calcola

- variazione della pressione di ristagno -12.1 kPa
- variazione specifica dell' entropia 35.22 J/(kg K)

- efficienza del diffusore η_{diff} :
$$\eta_{\text{diff}} = \frac{\left(\frac{P_{o,\text{ex}}}{P_{\text{in}}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\frac{\gamma-1}{2} M_{\infty}^2}$$
 0.5

**Esercizio 3.8**

aria con $p_o = 700\text{ kPa}$ e $T_o = 530\text{ K}$ entra un ugello con $A^* = 5\text{ cm}^2$, $A_E = 12.5\text{ cm}^2$.

se $p_B = 350\text{ kPa}$ e una OUN sta nella divergente, determina:

- M_E 0.453
- Variazione pressione di ristagno -297 kPa
- M_x e M_y dell'OUN 2.32, 0.532
- l'area A dove si trova l'OUN 11.17 m^2
- p_E in condizioni isentropiche (senza OUN) 45 kPa

**3.2.1.6 Diffusori - Prese d'aria**

Le prese d'aria sono usate in ogni macchina endotermica per alimentare il motore dell'aria usata come comburente nella combustione.

L'efficacia della presa d'aria è data dalla sua capacità di comprimere (*diffondere*) al massimo l'aria sfruttando il moto relativo del velivolo rispetto all'atmosfera, con la maggiore efficacia e le minori perdite possibili.

Per tipici motori **turbojet**, il flusso deve essere rallentato fino a circa $M \cong 0.4$, in modo quanto più uniforme possibile per non disturbare l'azione del primo stadio palette del compressore.

Per tipici **ramjet** (reattori senza compressore) la decelerazione deve arrivare fino a circa $M \cong 0.2$ in quanto la presa d'aria alimenta direttamente la camera di combustione.

Ovviamente da un punto di vista aerodinamico è auspicabile in ogni caso che la carenatura della presa d'aria induca la minore resistenza possibile.

Per prese d'aria supersoniche vi è da aspettarsi che nella presa d'aria compaiano OU, che ovviamente causeranno una brusca diminuzione della pressione di ristagno. Invero la teoria quasi-unidimensionale fornisce in questi casi risultati difficilmente applicabili, pur tuttavia è interessante almeno per esaminare alcune fenomenologie quali l'isteresi.

In supersonica, la presa d'aria è concettualmente suddivisibile in due sezioni che compiono processi logici distinti:

1. una che decelera il flusso in regime supersonico fino a circa $M=1$
2. l'altra che completa la compressione in regime subsonico.

L'efficacia della presa d'aria è misurabile con vari coefficienti:

rendimento delle pressioni di ristagno:

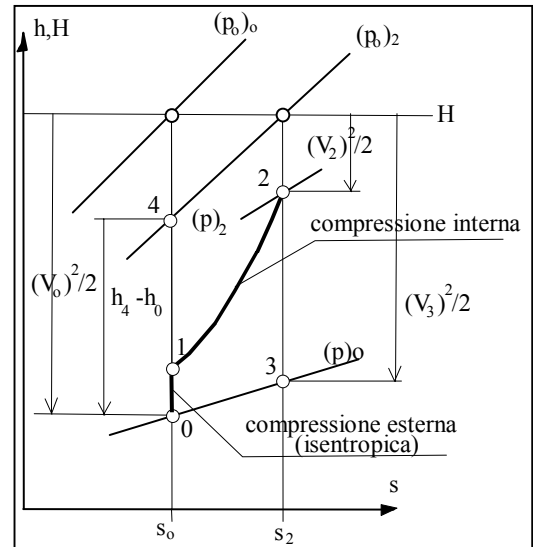
$$\eta_P = \frac{(p_o)_2}{(p_o)_o} \quad (3.63)$$

rendimento di Energia Cinetica:

$$\eta_{KE} = \frac{V_3^2}{V_o^2} = \frac{H - h_3}{H - h_o} \quad (3.64)$$

rendimento adiabatico:

$$\eta_{AD} = \frac{h_4 - h_o}{V_o^2/2} = \frac{h_4 - h_o}{H - h_o} \quad (3.65)$$



3.2.1.6.1 Prese d'aria subsoniche

Sono caratterizzabili come di due tipi:

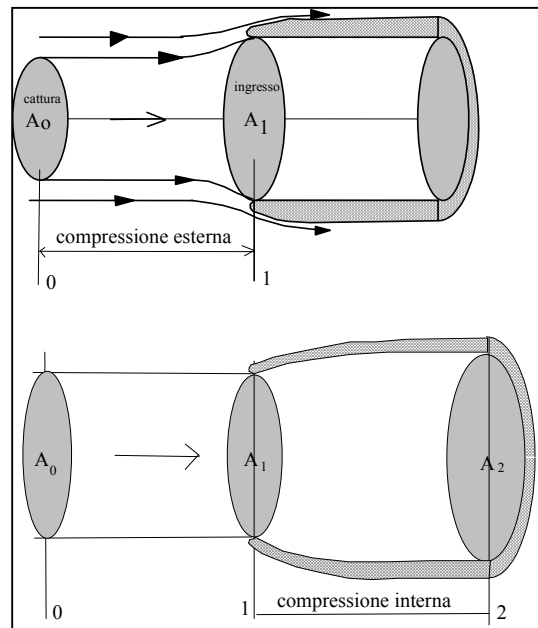
1. con compressione esterna
2. con compressione interna

Nel primo caso l'area di cattura A_o [i.e. quella che moltiplicata per il flusso in condizioni all'infinito eguaglia la portata di massa attraverso la presa d'aria] è minore della sezione di ingresso della presa, A_1 .

Il processo di compressione avviene all'esterno cioè in un tubo di flusso, ed è praticamente isentropico.

La parte d'aria che non entra nella presa viene accelerata fino nei pressi della sezione di ingresso, e poi spillata con velocità a volte notevolmente maggiori della velocità asintotica. In tal caso aumenta certamente la resistenza della cappottatura, ed addirittura vi potrebbero essere fenomeni locali di Mach critico, con strutture transoniche.

Per tali prese si usano comunemente teorie e tecniche simili a quelle usate per i profili alari.



Nel secondo caso (più usato in pratica) la diffusione avviene all'interno del condotto.

Valgono, ad una prima approssimazione, le trattazioni dei moti quasi-unidimensionali tra cui:

$$\frac{dA}{A} = \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} \frac{dp}{p} \quad \text{da cui discende che in subsonico occorre un condotto divergente.}$$

Manca a tutt'oggi una teoria adeguata; molto empirismo viene usato per graduare gli angoli di divergenza onde ridurre i valori dei gradienti di $\frac{dA}{dx} \propto \frac{dp}{dx}$ in quanto quest'ultimo potrebbe causare distacco dello strato limite sulle pareti. Ma d'altro canto condotti troppo lunghi causerebbero resistenze di *capote* notevoli, per cui occorre ricercare un buon compromesso tra questi due fattori contrapposti. Per condotti circolari, l'angolo di semi-cono è compreso tra i valori 5° e 7° , per valori di Mach fino a $M \leq 0.4$.

3.2.1.6.2 Prese d'aria supersoniche : solo divergente

In quasi tutti i casi di velivoli supersonici (tranne lo SCRAMJET in cui si sta sperimentando la combustione supersonica) occorre decelerare la corrente dalle condizioni supersoniche di volo a quelle subsoniche compatibili al compressore ed alla camera di combustione del motore.

Questo processo invero potrebbe essere realizzato da una singola OUN, ma in questo caso la pressione di ristagno diminuisce di molto e le perdite aumentano.

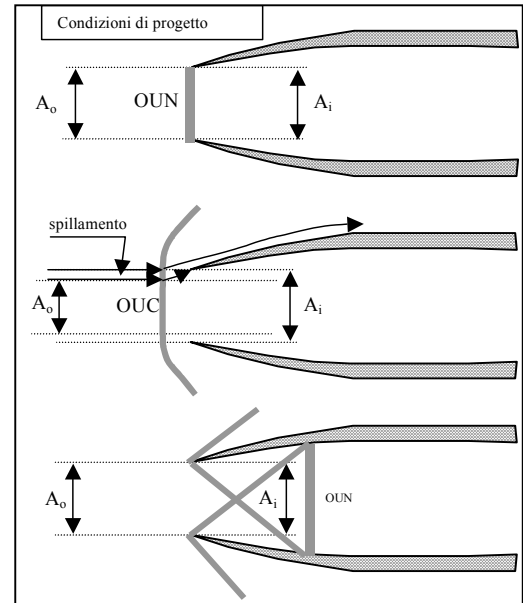
La presa d'aria più semplice, quindi, consiste di un condotto divergente che, **in condizioni di progetto** M_0 , funziona (in condizioni di progetto) con una bella OUN posta nella sezione di ingresso, in questo caso l'area di cattura è pari a quella di ingresso $A_0 = A_1$.

Se il motore necessita di minore portata [i.e. aumenta la *back pressure*, ovvero se il Mach di volo diminuisce (M'_0)] allora l'OUN si stacca e diventa curva; in tal modo a valle il flusso è subsonico e riesce a spillare. L'area di cattura A_0 in questo caso diventa più piccola.

Se il motore necessita di maggiore portata [i.e. diminuisce la *back pressure*, ovvero se il Mach di volo aumenta (M''_0)] allora l'OUN viene ingurgitata e si forma, nell'interno della presa d'aria, un sistema di onde d'urto oblique, molto probabilmente terminanti con una OUN; in tal modo, giocando sull'angolo d'urto, il flusso riesce ad auto-regolarsi. L'area di cattura A_0 in questo caso rimane sempre pari a quella di ingresso.

Come visto questa presa d'aria ha un funzionamento molto semplice ed è auto-regolante, ovviamente può essere usata fino a quando la perdita di pressione di ristagno è accettabile.

In pratica fino a $M = 1.6$ la perdita percentuale della pressione di ristagno è inferiore al 10%, il che è ingegneristicamente accettabile.



3.2.1.6.3 Prese d'aria supersoniche: convergente-divergente

Abbiamo già dimostrato che l'Onda d'Urto non può stare stabilmente nel convergente.

Ne discende un diagramma caratteristico come segue:

I punti caratteristici da 1 a 6 rappresentano i seguenti stati [tutti isentropici tranne il (6)]:

- 1 ingresso supersonico di progetto con condizioni soniche in gola
- 2 ingresso subsonico derivante dal rapporto delle aree
- 3 condizioni soniche in gola
- 4 condizioni subsoniche all'uscita
- 5 condizioni supersoniche all'uscita
- 6 condizioni a valle di una OUN nella sezione di uscita

Le condizioni di progetto sono quelle della curva congiungente i punti (1)-(3)-(4). i.e. la presa d'aria è progettata per volare a Mach M_1 e comprimere isentropicamente l'aria fino alla pressione di uscita $p(4)$, i.e. il rapporto A_1/A_T è pari ad $A(M_1)/A^*$ come da isentropica.

Pur dovendo affermare sin da adesso che il modello isentropico non si sposa per niente bene, per questa geometria, con la realtà perché gli effetti dello strato limite praticamente stravolgono completamente l'isentropicità, pur tuttavia questo esercizio è molto valido per capire la fluidodinamica delle prese d'aria ed i fenomeni di isteresi ad esso associati.

Accettiamo quindi con buona fede l'ipotesi di una completa assenza di attrito sulle pareti e consideriamo le condizioni di progetto in cui si verifica l'isentropicità.

A questo punto allo studente viene posta, di solito, la seguente domanda:

Supponendo che una presa d'aria, in condizioni ideali di completa assenza dell'attrito e dei suoi effetti, viene accelerata da condizioni di quiete fino al Mach di progetto M_1 mantenendo costante, in ogni condizione, la pressione di uscita a $p(4)$: si realizza la curva caratteristica (1)-(3)-(4) ?

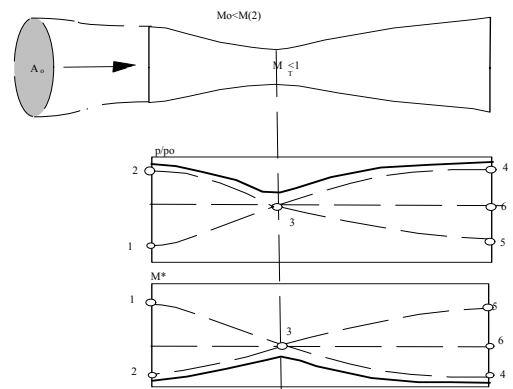
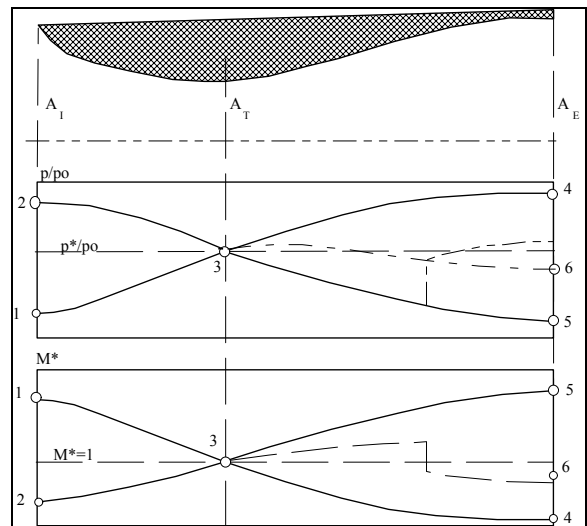
ovvero cosa accade nell'avviamento?

Ovviamente la risposta esatta (NO) verrebbe data con maggiori probabilità da uno psicologo (completamente ignaro di fluidodinamica) che da uno studente di aeronautica poco attento.

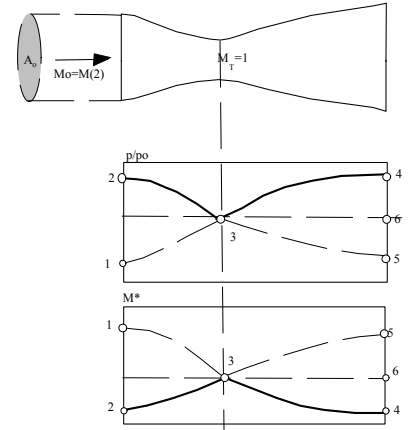
Ma, fortunatamente, non è indovinando la risposta che si apprende la fluidodinamica! Anche perché, come sempre, seguirebbe la seconda domanda monocorde: Perché ? E a questo punto trionfa la scienza!

Per rispondere al quesito esaminiamo le condizioni che si realizzano aumentando, dalla quiete, il Mach di volo per una presa d'aria formata da un convergente e da un divergente.

- a) A basse velocità l'intero flusso è subsonico. L'ugello funziona come un venturi. L'area di cattura sarà maggiore/minore di quella di entrata per $M_0 </> M_2$ [a meno che l'aspirazione del compressore sia tanto forte da riuscire a fissare la $p(4)$ all'uscita, in questo caso la curva di funzionamento interna è tale da arrivare in condizioni critiche nella gola, quindi simile a quella con $M_0=M_2$, ma l'area di cattura A_0 sarà maggiore di A_1].



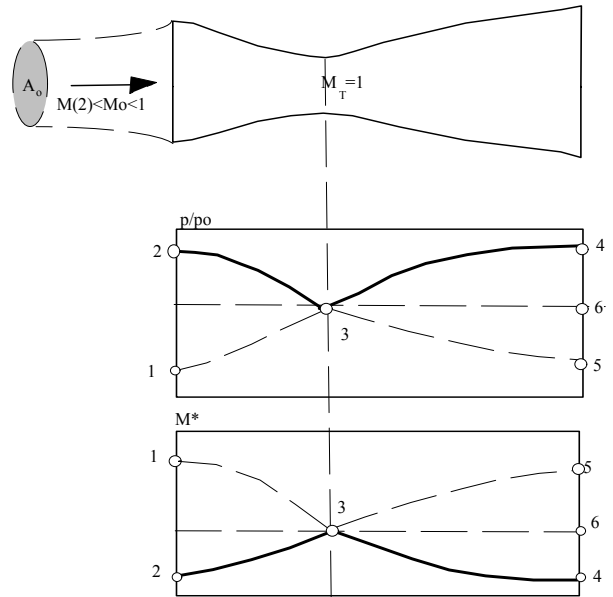
- b) Per $M_0=M_2$ si realizza la condizione isentropica subsonica, con condizioni critiche in gola.
In questo caso l'area di cattura A_0 è pari a quella di ingresso A_I .



- c) per $M_2 < M_0 < 1$ la gola rimane critica, e quindi limita la portata di massa. L'area di cattura A_0 diventa minore di A_I ma sarà maggiore dell'area di gola A_T :

$$A_T < A_0 < A_I$$

Il diagramma di funzionamento interno all'ugello non cambia.

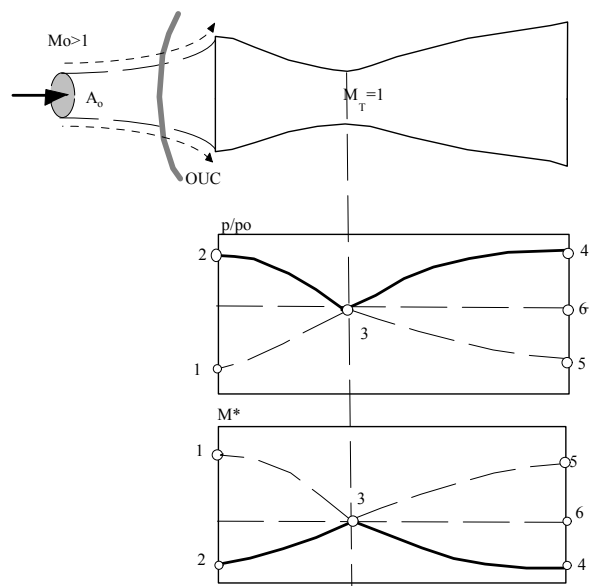


- d) $M_0=1$ (di poco minore)
Il funzionamento è simile al caso (c) stavolta l'area di cattura si riduce fino a diventare pari a quella di gola: $A_0=A_T$
(grafica non riportata)

- e) $M_0 > 1$ il funzionamento prevede una Onda d'Urto curva staccata; dietro di questa il flusso è subsonico, e si realizza uno spillamento affinché l'ugello funzioni con condizioni critiche in gola (attenzione poiché la gola sta a valle dell'OUN, le condizioni critiche dell'ugello stavolta corrispondono alla pressione di ristagno a valle dell'OUN, comunque formalmente restano gli stessi andamenti del caso precedente).

Questa configurazione si mantiene anche quando M_0 raggiunge il valore di progetto pari cioè a M_1 perché attraverso l'OUN vi è un salto (aumento) delle aree critiche pari all'inverso di quello delle pressioni di ristagno (che diminuiscono).

A causa della presenza della OUN la portata massica corrispondente alla sezione A_I (a monte della OUN) non riesce a passare attraverso la A_T (a valle della OUN). Questo perché il rapporto A_I/A_T era stata calcolato per il M_1 e con le relazioni isentropiche! Per fare in modo che la massa che passa attraverso la A_I possa passare anche attraverso la gola A_T , si deve verificare un M_0 pari ad un M_a per cui vale la relazione:

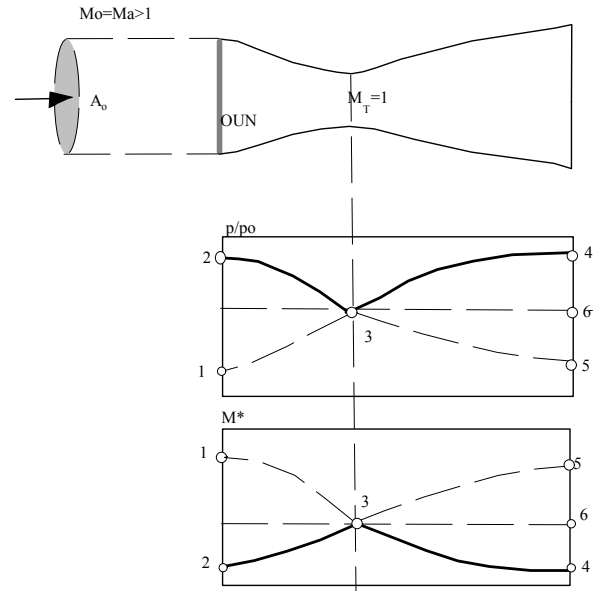


$$\left[\left(\frac{A_I}{A^*} \right)_{Ma} \right]_{IS} = \left[\left(\frac{A_I}{A^*} \right)_{M(1)} \right]_{IS} \left[\left(\frac{A^*_y}{A^*_x} \right)_{Ma} \right]_{OUN} \quad (3.66)$$

dove i pedici "y" ed "x" denotano le condizioni a valle ed a monte della OUN.

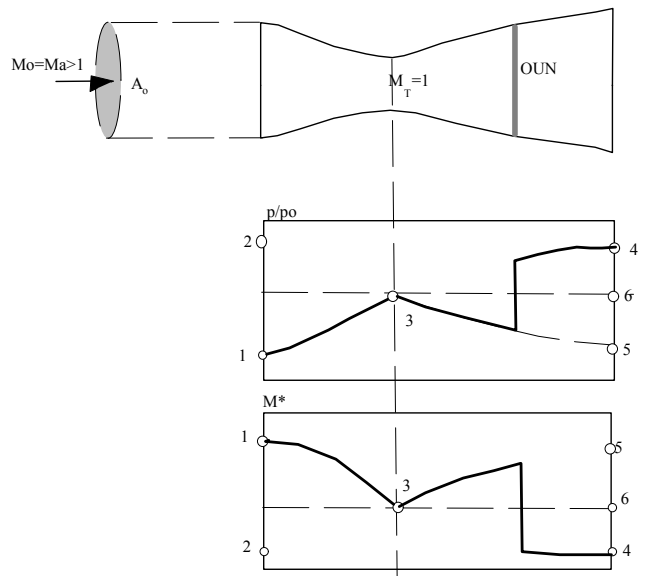
Ovvero il rapporto di Area di ingresso/Area di gola deve essere pari al Mach a valle dell'OUN.

- f) Allorquando si raggiunge $M_0 = M_a > M_1$ la portata massica attraverso A_I (alla p_0) è pari a quella che riesce a passare attraverso la A_T (alla p_{02}). Si stabilisce una OUN nella sezione di ingresso. Il flusso nell'ugello diventa subsonico. Non vi è spillamento di massa. Il valore del Mach " M_a " è detto **Mach di avviamento**.



- g) Per valori di M_0 immediatamente maggiori di M_a (o per lieve diminuzione della *back pressure*) l'OUN viene spinta nel convergente, ma quivi è instabile, viene dunque risucchiata attraverso la gola e si stabilizza nel divergente. Nel condotto si realizzano regimi misti, supersonico nel convergente e nella prima parte del divergente, sonico in gola, subsonico nella seconda parte del divergente.

La presa d'aria è stata avviata, per ritornare alle condizioni di progetto, si riduce gradualmente il M_0 fino a portarlo a condizioni leggermente maggiori di M_1 , si stabilisce così una OUN immediatamente dopo la sezione di gola; ma questa non dà fastidio perché di intensità molto piccola. Anzi crea situazioni conservative perché in condizioni con $M_0 = M_1$ si avrebbero in effetti le condizioni isentropiche ricercate, ma sarebbero instabili perché piccole fluttuazioni quali una lievissima diminuzione del M_0 (o una variazione in aumento della *back pressure*), riporterebbe le condizioni come la caso (e) e si dovrebbe ricominciare daccapo per ri-avviare la presa d'aria.



La dinamica dell'avviamento sopra descritto si riferisce a prese d'aria rigide, con *back pressure* fisse, e si basa sulla **tecnica di overspeeding**, cioè di volare fino ad un Mach tanto elevato da indurre la presa d'aria ad ingurgitare la OUN

L'avviamento, i fenomeni di ingurgitazione della Onda d'Urto, e quelli del rigetto, al variare del Mach di volo, della *back pressure* (in definitiva della portata massima di massa) hanno generato un interessante ciclo di isteresi.

Altre strategie sono possibili : presa d'aria a geometria variabile o *tuning* della *back pressure*.

Per analizzare i benefici di queste strategie conviene ragionare su di un piano Mach di volo e rapporto aree ingresso/gola, in cui riportare i due diagrammi di curve

Senza OUN (isentropiche):

$$\left[\left(\frac{A_I}{A^*} \right)_{Ma} \right]_{IS} \quad (3.67)$$

Con la presenza di OUN:

$$\left[\left(\frac{A_I}{A^*} \right)_{My} \right]_{IS} \left[\left(\frac{A^*_y}{A^*_x} \right)_{Mx} \right]_{OUN} \quad (3.68)$$

si ritrova un diagramma del tipo:

In questo piano le varie strategie di avviamento sono dimostrate per una presa d'aria progettata per un Mach di volo di 1.8 con rapporto di Aree gola/ingresso di 0.7.

Con la **tecnica di over-speeding** occorre fare il percorso (a)-(b)-(c)-(d) ; occorre cioè arrivare ad un Mach di volo di circa 3.4 (punto (b) per far ingurgitare la OUN che si stabilirà da qualche parte del divergente (c), dopo di che si può rallentare per raggiungere le condizioni di progetto (d) .

Dall'analisi della figura si vede che con Mach di Progetto oltre il valore di 2 , il rapporto isentropico delle aree scende sotto il valore di 0.6 ed un avviamento con *over-speeding* imporrebbe di arrivare praticamente a Mach infiniti.

Ma se si dispone di una presa d'aria a sezione variabile, per esempio con la possibilità di arrivare ad un rapporto di aree Gola/Ingresso di 0.84, si può usare una strategia diversa di adattamento: a partire dalle condizioni di volo supersoniche si segue ad esempio la curva (a)-(e)-(f)-(d) . Si adatta cioè il rapporto di aree fino a realizzare le condizioni (e)

$M=2$, $A_T/A_I = 0.84$, al che l'OUN è ingurgitata per saltare al punto (f) da cui si rallenta fino alle condizioni di progetto (d).

Ovviamente nella realtà entra in gioco anche la *back pressure*, che complica la situazione, ma introduce anche un'altra variabile che può aiutare/complicare il controllo.

Le prese d'aria supersoniche sono in effetti basate su Onde d'Urto Oblique, anche per queste esiste ovviamente il problema del controllo e dell'avviamento che viene fatto con la strategia della geometria variabile.

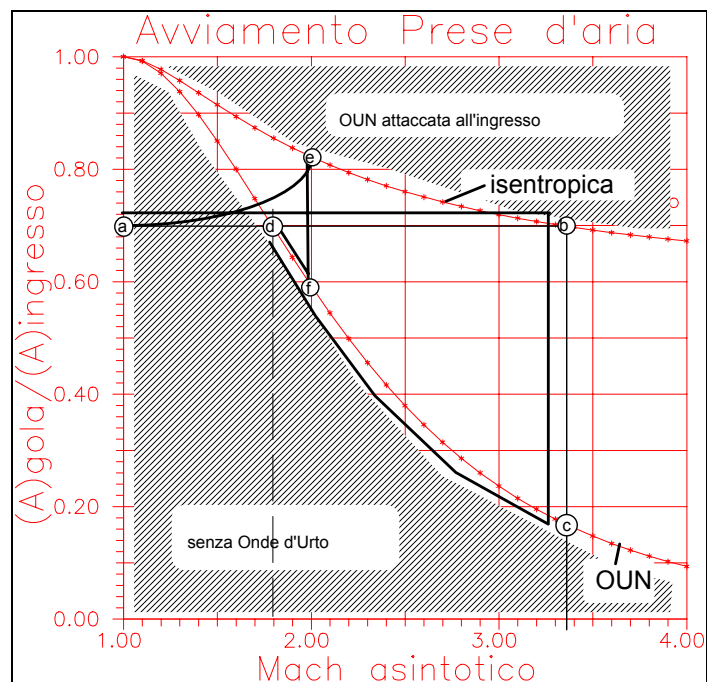
Questa viene realizzata, per prese circolari, mediante spine coniche che avanzando/arretrando fanno variare il complesso di OUC (Onde d'Urto Coniche che saranno analizzate in un successivo capitolo) ed il rapporto delle aree, mentre per prese cosiddette bi-dimensionali si utilizzano diedri inclinabili, più semplici da realizzare.



Esempio 3.6

Paragona la perdita di pressione di ristagno per le seguenti prese d'aria **2D** a $M_\infty=3.5$ (aria)

1. presa a pitot (OUN normale all'ingresso con compressione interna)



2. compressione esterna con **una** sola rampa 2D di 20° e una OUN
3. compressione esterna con **due** rampe 2D di 10° ognuna ed una OUN
4. compressione esterna con **quattro** rampe 2D di 5° ognuna ed una OUN
5. compressione esterna con **una spina isentropica** continua di 20° con OUN

caso 1 (pitot)

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **NS**, caso **U** immettendo il valore del $M_x = 3.5$, si ottiene la schermata:

M1	M2	P2/P1	T2/T1	RHO 2/1	PO2/PO1
3.5000	0.4512	14.125	3.3151	4.2609	0.2129

Le condizioni all'ingresso del compressore nel caso 1, sono quindi:

- Mach = 0.4512
- Rapporto di pressioni di ristagno totale: 0.2129
- Rapporto di compressione (pressioni statiche): (14.125)= 14.125

caso 2(una rampa)

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$ opzione **OS** caso **D** immettendo il valore del Mach a monte **3.5** angolo di deflessione **20°** successivamente **Y** per leggere i dati della soluzione debole

WEAK SHOCK WAVE SOLUTION IS								
M1	DELTA	THETA	M2	P2/P1	PO2/PO1	T2/T1	RHO2/RHO1	DELS/CP
3.5000	20.0000	34.6047	2.2985	4.4427	0.7266	1.6775	2.6484	0.0912

dopo l'unica rampa il Mach a valle della OUN è **2.2985** il rapporto delle pressioni di ristagno è: **0.7266**

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **NS**, caso **U** immettendo il valore del $M_x = 2.2985$ si ottiene la schermata:

M1	M2	P2/P1	T2/T1	RHO 2/1	PO2/PO1
2.2985	0.5346	5.9970	1.9474	3.0826	0.5840

Mach a valle della OUN è **0.5346** il rapporto di pressioni di ristagno **0.5840**

Le condizioni all'ingresso del compressore, nel caso 2, sono quindi:

- Mach = 0.5346 ,
- Rapporto di pressioni di ristagno totale: (0.7266) (0.5840) = 0.4243
- Rapporto di compressione (pressioni statiche): (4.4427)(5.9970)= 26.64

caso 3(due rampe)

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$ opzione **OS** caso **D** immettendo il valore del Mach a monte **3.5** angolo di deflessione **10°** successivamente **Y** per leggere i dati della soluzione debole

WEAK SHOCK WAVE SOLUTION IS								
M1	DELTA	THETA	M2	P2/P1	PO2/PO1	T2/T1	RHO2/RHO1	DELS/CP
3.5000	10.000	24.3823	2.9045	2.2690	0.9463	1.2836	1.7673	0.0158

dopo la prima rampa il Mach a valle OUO è **2.9045** il rapporto delle pressioni di ristagno è: **0.9463**

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$ opzione **OS** caso **D** immettendo il valore del Mach a monte **2.9045** angolo di deflessione **10°** successivamente **Y** per leggere i dati della soluzione debole

WEAK SHOCK WAVE SOLUTION IS								
M1	DELTA	THETA	M2	P2/P1	PO2/PO1	T2/T1	RHO2/RHO1	DELS/CP
2.9045	10.00	28.0947	2.4266	2.0161	0.9658	1.2340	1.6330	0.0099

dopo la seconda rampa il Mach a valle OUO è **2.4266** il rapporto delle pressioni di ristagno è: **0.9658**

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **NS**, caso **U** immettendo il valore del $M_x = 2.4266$, si ottiene la schermata:

M1	M2	P2/P1	T2/T1	RHO 2/1	PO2/PO1
2.4266	0.5203	6.7031	2.0658	3.2448	0.5260

Mach a valle della OUN è **0.5203** il rapporto di pressioni di ristagno **0.5260**

Le condizioni all'ingresso del compressore nel caso 3, sono:

- Mach = **0.5203**,
- Rapporto di pressioni di ristagno totale: $(0.9463)(0.9658)(0.5260) = \underline{\underline{0.4807}}$
- Rapporto di compressione (pressioni statiche): $(2.2690)(2.0161)(6.7031) = \underline{\underline{31.94}}$

caso 4(quattro rampe)

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$ opzione **OS** caso **D** immettendo il valore del Mach a monte **3.5** angolo di deflessione **5°** successivamente **Y** per leggere i dati della soluzione debole

WEAK SHOCK WAVE SOLUTION IS								
M1	DELTA	THETA	M2	P2/P1	PO2/PO1	T2/T1	RHO2/RHO1	DELS/CP
3.500	5.0000	20.1803	3.1984	1.5342	0.9921	1.1326	1.3545	0.0023

dopo la prima rampa il Mach a valle OUO è **3.1984** il rapporto delle pressioni di ristagno è: **0.9921**

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$ opzione **OS** caso **D** immettendo il valore del Mach a monte **3.1984** angolo di deflessione **5°** successivamente **Y** per leggere i dati della soluzione debole

WEAK SHOCK WAVE SOLUTION IS								
M1	DELTA	THETA	M2	P2/P1	PO2/PO1	T2/T1	RHO2/RHO1	DELS/CP
3.1984	5.0000	21.8412	2.9288	1.4852	0.9937	1.1217	1.3241	0.0018

dopo la seconda rampa il Mach a valle OUO è **2.9288** il rapporto delle pressioni di ristagno è: **0.9937**

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$ opzione **OS** caso **D** immettendo il valore del Mach a monte **2.9288** angolo di deflessione **5°** successivamente **Y** per leggere i dati della soluzione debole

WEAK SHOCK WAVE SOLUTION IS								
M1	DELTA	THETA	M2	P2/P1	PO2/PO1	T2/T1	RHO2/RHO1	DELS/CP
2.9288	5.0000	23.6426	2.6852	1.4428	0.9950	1.1120	1.2975	0.0014

dopo la terza rampa il Mach a valle OUO è **2.6852** il rapporto delle pressioni di ristagno è: **0.9950**

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$ opzione **OS** caso **D** immettendo il valore del Mach a monte **2.6852** angolo di deflessione **5°** successivamente **Y** per leggere i dati della soluzione debole

WEAK SHOCK WAVE SOLUTION IS								
M1	DELTA	THETA	M2	P2/P1	PO2/PO1	T2/T1	RHO2/RHO1	DELS/CP
2.6852	5.0000	25.6216	2.4625	1.4063	0.9960	1.1036	1.2743	0.0012

dopo la quarta rampa il Mach a valle OUO è **2.4625** il rapporto delle pressioni di ristagno è: **0.9960**

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **NS**, caso **U** immettendo il valore del $M_x = 2.4625$ si ottiene la schermata:

M1	M2	P2/P1	T2/T1	RHO 2/1	PO2/PO1
2.4625	0.5167	6.9079	2.1006	3.2885	0.5142

Mach a valle della OUN è **0.5167** il rapporto di pressioni di ristagno **0.5142**

Le condizioni all'ingresso del compressore, nel caso 4, sono:

- Mach = **0.5167**,
- Rapporto di pressioni di ristagno totale: $(0.9921)(0.9937)(0.9950)(0.9960)(0.5142) = \underline{\underline{0.5023}}$
- Rapporto di compressione (pressioni statiche): $(1.5342)(1.4852)(1.4428)(1.4063)(6.9072) = \underline{\underline{31.94}}$

caso 5(spina isentropica)

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$ opzione **PM** caso **TS** immettendo il valore del Mach a monte **3.5** e l'angolo di deflessione **-20°**

M1	M2	ANGLE(DEG)	T2/T1	P2/P1
3.5000	2.4747	-20.0000	1.5507	4.6435

dopo la compressione isentropica il Mach a valle della OUN è **2.4747** il rapporto delle pressioni di ristagno è: **1**

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **NS**, caso **U** immettendo il valore del $M_x=2.4747$ si ottiene la schermata:

M1	M2	P2/P1	T2/T1	RHO 2/1	PO2/PO1
2.4747	0.5155	6.9782	2.1126	3.3032	0.5092

Mach a valle della OUN è **0.5155** il rapporto di pressioni di ristagno **0.5092**

Le condizioni all'ingresso del compressore, nel caso 5, sono:

- Mach = **0.5155**,
- Rapporto di pressioni di ristagno totale: (1) (0.5092) = **0.5092**
- Rapporto di compressione (pressioni statiche): (4.6432) (6.9782) = **32.40**

Tabella di paragone delle prestazioni delle varie prese d'aria

caso	tipo presa d'aria	Mach ingresso compressore	Rapporto pressioni di ristagno $\frac{P_0}{P_\infty}$	Rapporto di compressione (statiche)
1	tipo pitot soltanto una OUN	0.4512	0.2129	14.125
2	una rampa di 20° (OUO) + una OUN	0.5346	0.4243	26.64
3	due rampe di 10° (OUO) + una OUN	0.5230	0.4807	30.66
4	quattro rampe di 5° (OUO) + una OUN	0.5167	0.5023	31.94
5	spina isentropica + OUN	0.5155	0.5092	32.40

**Esempio 3.7**

Calcolare il rendimento isentropico delle prese d'aria (diffusori) di cui nell'esercizio precedente

$$\eta_{\text{diff}} = \frac{H_{\text{end}} - H_\infty}{H_{\text{end, is}} - H_\infty} = \frac{T_{0, \text{end}} - T_\infty}{T_{0, \text{end, is}} - T_\infty} = \frac{T_{0, \text{end}}/T_\infty - 1}{T_{0, \text{end, is}}/T_\infty - 1} \quad (3.69)$$

ma

$$\frac{T_{0, \text{end}}}{T_\infty} = \left[\frac{p_{0, \text{end}}}{p_\infty} \right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad \frac{T_{0, \text{end, is}}}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \quad (3.70)$$

per cui:

$$\eta_{\text{diff}} = \frac{\left(\frac{p_{0, \text{end}}}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2} \quad (3.71)$$

definizione di coefficiente di recupero di pressione totale:

$$r_o = \frac{p_{o,end}}{p_{o,\infty}} \quad (3.72)$$

$$\frac{p_{o,end}}{p_\infty} = \frac{p_{o,end}}{p_{o,\infty}} \frac{p_{o,\infty}}{p_o} = r_o \frac{p_{o,\infty}}{p_o} = r_o \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.73)$$

$$\eta_{diff} = \frac{\left(\frac{p_{o,end}}{p_\infty}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2} = \frac{\left[r_o \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right) [r_o]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2} \quad (3.74)$$

nel nostro caso ($M_\infty=3.5$, $\gamma=1.4$):

$$\eta_{diff} = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right) [r_o]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2} = \frac{3.45 [r_o]^{0.2857} - 1}{2.45} \quad (3.75)$$

risulta:

tabella di paragone delle efficienze di diffusione delle varie prese d'aria

caso	tipo presa d'aria	M_∞	Rapporto pressioni di ristagno r_o	θ_{diff}
1	tipo pitot soltanto una OUN	3.5	0.2129	0.4970
2	una rampa di 20° (OUO) + una OUN	3.5	0.4243	0.7005
3	due rampe di 10° (OUO) + una OUN	3.5	0.4807	0.7341
4	quattro rampe di 5° (OUO) + una OUN	3.5	0.5023	0.7485
5	spina isentropica + OUN	3.5	0.5092	0.7530



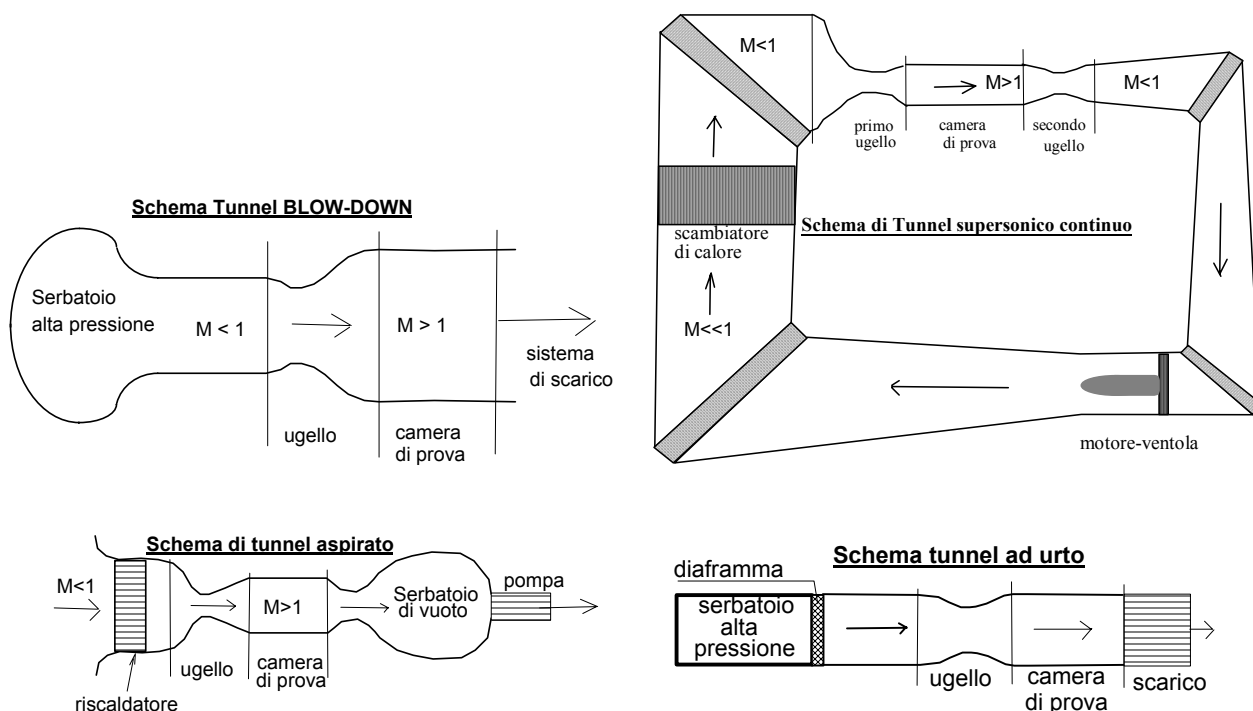
.3.2.1.7 Tunnel supersonici

Un tunnel a vento è un impianto per riprodurre in laboratorio le condizioni di flusso del regime di volo.

A seconda dei regimi realizzati nella camera di prova, i tunnel sono classificati come *subsonici*, *transonici*, *supersonici*, *ipersonici*.

La figura sotto-riportata illustra schematicamente i layout funzionali di quattro modi differenti per fornire la massa di gas (di solito aria) alla camera di prova:

1. Serbatoi di aria ad alta pressione per un **Tunnel blow-down**,
2. Sistemi di ugelli con un ventilatore/compressore per un **Tunnel supersonico continuo (pressurizzato)**,
3. Un serbatoio di vuoto o una pompa a vuoto/eiettore per un **tunnel con ingresso atmosferico (aspirato - depressurizzato)**,
4. Un condotto in cui si realizza un'Onda d'Urto mediante la deflagrazione di una membrana che separa una zona ad alta pressione da un'altra, a pressione ambiente, che porta l'onda viaggiante alla camera di prova, detto uno **shock-tube** ovvero **tunnel ad urto**.



In ogni caso i componenti essenziali di un tunnel supersonico sono: la sorgente/serbatoio di gas, un condotto convergente/divergente, una camera di prova, un sistema di scarico con recupero di pressione.

Il **tempo di prova** [quello in cui si realizzano in camera di prova le condizioni di progetto] è una caratteristica fondamentale di un tunnel supersonico:

- nel tunnel di tipo *blow-down* dipende dal volume del serbatoio (secondi),
- nello shock tube dipende dal tempo di passaggio dell'Onda (millisecondi).
- nel tunnel aspirato dipende dal volume del serbatoio a vuoto (secondi)
- nel tunnel continuo è praticamente illimitato, ovvero dalla capacità del sistema di raffreddamento di estrarre il calore introdotto dal compressore e dalle perdite.

Nei tunnel continui è critica la potenza del compressore (fino a centinaia di megawatts per tunnel di dimensioni rilevanti).

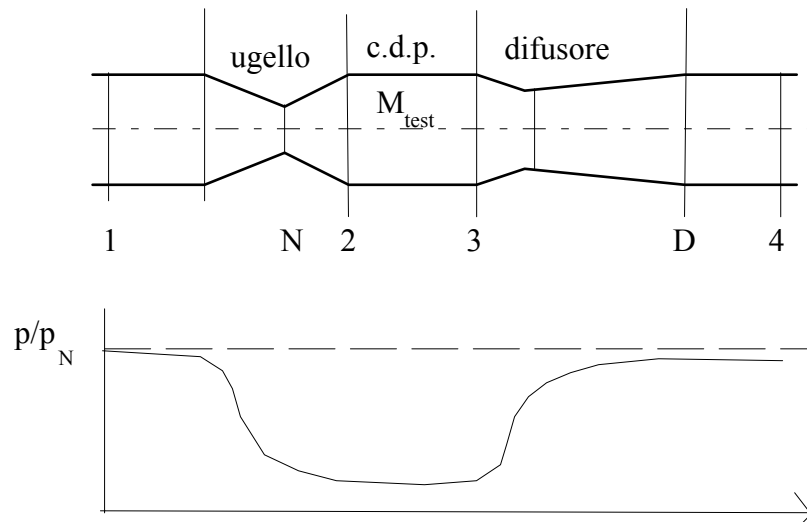
Nel seguito analizzeremo soltanto la configurazione a flusso continua ed i relativi problemi di avviamento, che, come le prese d'aria, possono essere superati con strategie diverse: *overspeeding* per geometrie fisse oppure *tuning di sezione* per geometrie variabili.

Esamineremo ovviamente soltanto il tratto che interessa l'ugello, la camera di prova ed il diffusore.

Queste, idealmente, funzioneranno come un ugello, un condotto a sezione costante ed una presa d'aria.

La potenza richiesta al compressore, per mantenere le condizioni stazionarie dipende dalle perdite per attrito, dall'energia associata al modello di prova e a quella richiesta per l'avviamento del tunnel.

L'andamento tipico della distribuzione delle pressioni, per tale tratto è illustrata in figura.



3.2.1.7.1 Tunnel supersonico a geometria fissa

La peculiarità di questo problema dipende dal fatto che abbiamo due gole quella del Nozzle (ugello) (N) e quella del diffusore (D) che solo idealmente operano con la stessa pressione di ristagno, ma in realtà *-sia per le inevitabili perdite, ma soprattutto per l'avviamento-* operano con pressioni di ristagno differenti.

Nel caso le due sezioni di gola operino entrambe in condizioni soniche, per la costanza della portata massica deve essere:

$$\dot{m} = \left(\dot{m} \right)_N^* = \gamma \left[\frac{2}{\gamma+1} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{(p_o)_N A_N}{\sqrt{\gamma R (T_o)_N}} = \gamma \left[\frac{2}{\gamma+1} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{(p_o)_D A_D}{\sqrt{\gamma R (T_o)_D}} = \left(\dot{m} \right)_D^* = \dot{m} \quad (3.76)$$

Se tra le due sezioni non vi è variazione della Temperatura di ristagno (adiabaticità) risulta:

$$\frac{A_D}{A_N} = \frac{(p_o)_N}{(p_o)_D} > 1.0 \quad (3.77)$$

Per cui la sezione di gola del diffusore deve esser maggiore di quella dell'ugello.

Di quanto debba esser maggiore dipende essenzialmente dalle condizioni di avviamento; in pratica per il diffusore valgono le stesse considerazioni fatte per la presa d'aria.

Per assegnati: numero di mach di prova M_{test} e sezione della camera di prova A_{test}

- La sezione della gola dell'ugello (A_N) si calcola, in rapporto a A_{test} , con le relazioni isentropiche in funzione del M_{test}
- La sezione della gola del diffusore (A_D) si deve calcolare, in rapporto ad A_{test} , con le condizioni del Mach a valle di una OUN che corrisponda ad un Mach a monte pari a M_{test} .

In queste condizioni è possibile avviare il tunnel e fare in modo che l'OUN che si produce all'uscita dell'ugello possa essere ingurgitata dal diffusore, per posizionarsi nel divergente; successivamente, con rallentamento del flusso, essa sarà riportata subito dopo la gola del diffusore.

Le distribuzioni dei rapporti di pressioni che si stabiliscono durante le fasi di avviamento sono riportate in figura.

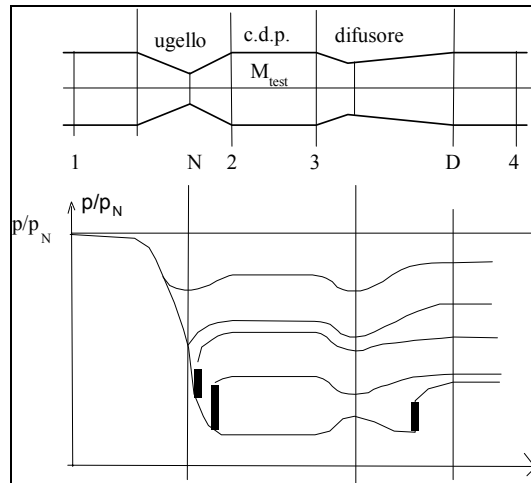
Per avere una idea degli ordini di grandezza, con $A_{test} = 1 \text{ m}^2$ e $M_{test} = 1.414$

(Nota 1.414 è la radice quadrata di 2, vedremo in seguito l'importanza di questo valore, comodo per la similitudine supersonica)

- Risulta dall'isentropica: $A/A^* = 1.123$ per cui è $A_N = 0.890 \text{ m}^2$.

- Il Mach a valle di una OUN (con M_x a monte pari a 1.414) è $M_y = 0.725$, a questo corrisponde dall'isentropica un valore di $A/A^* = 1.080$ per cui è $A_D = 0.926 m^2$.

Tipiche distribuzioni di pressioni durante l'avviamento di un tunnel supersonico

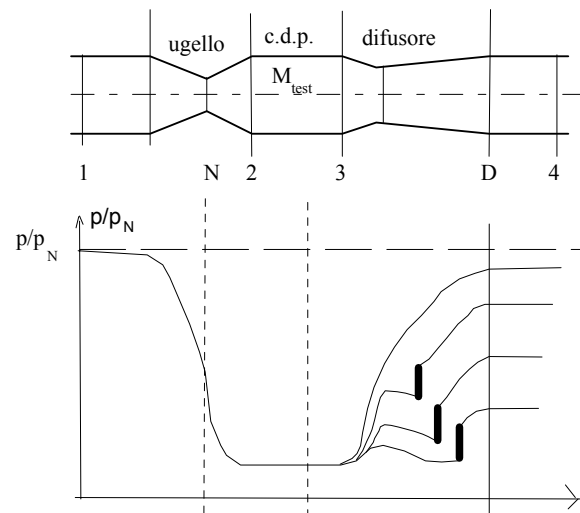


3.2.1.7.2 Tunnel supersonico a geometria variabile

Come per la prese d'aria, per Mach di prova più elevati, conviene ricorrere a diffusori con area di gola variabile.

Durante l'avviamento la gola del diffusore viene allargata al massimo in modo da superare di poco il Mach di prova con una OUN che scivola nel divergente del diffusore. Successivamente la sezione di gola del diffusore viene ridotta in modo da posizionare la OUN subito a valle della sua sezione di gola.

Nella figura, si mostrano i tipici diagrammi di pressione durante l'avviamento di un tunnel supersonico a geometria variabile.



3.2.1.7.3 Applicazioni

Esempio 3.8

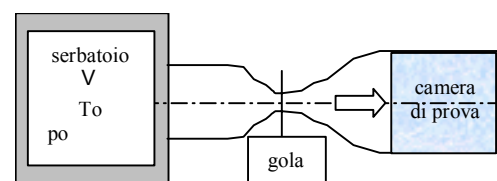
Devi fare il progetto preliminare di un tunnel a *blow-down* che scarica nell'atmosfera (**14.7 psia**)

Le specifiche sono:

- area della camera di prova $A_T = 1.0 \text{ ft}^2$,
- Mach di prova $M_T = 2.0$,
- Il serbatoio di ristagno può essere pressurizzato fino a $p_o = 150 \text{ psia}$ e riscaldata fino a 150°F [$T_o = 150 + 460 = 610^\circ\text{R}$]

Determinare l'area di gola ed il volume del serbatoio di ristagno per permettere un tempo di prova di 30 secondi.

Consideriamo lo schema della figura.



Le condizioni di progetto ovviamente si riferiscono al regime isentropico.

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **IS**, caso **M** immettendo il valore $M_T = 2.0$ si ottiene la schermata:

MACH	T RATIO	P RATIO	A RATIO	IMPULSE RATIO
2.0000	0.5560	0.1278	1.6875	1.1227

poiché $A_T/A^*=0.1.6875$, l'area della sezione della camera di prova è quindi

$$A^* = \frac{A_T}{A_T/A^*} = \frac{1.0}{1.6875} = 0.5966 \quad [\text{ft}^2]$$

nota la pressione in camera di prova è: $p_T = \frac{p_T}{p_o} p_o = (0.1278)(14.7) = 1.8787 \quad [\text{psia}]$

Il Mach in camera di prova di $M_T=2$ sarà mantenuto fino a quando la pressione del serbatoio diminuisce al punto caratteristico (4) che corrisponde ad una OUN nella sezione di uscita: $M_T=M_x=2$ con $p_y = p_B = 14.7$

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **NS**, caso **U** immettendo il valore del $M_T=M_x=2$, si ottiene la schermata:

M1	M2	P2/P1	T2/T1	RHO 2/1	PO2/PO1
2.0000	0.5774	4.500	1.6875	2.6667	0.7209
STAGNATION TEMPERATURE IS CONSTANT ACROSS A NORMAL SHOCK					
THE CHANGE IN ENTROPY IS DELS/CP=0.0935					

In queste condizioni $M_{(4)}=M_y=0.5774$, $p_y/p_x=4.5$ la pressione del serbatoio è:

$$[p_o]_{\min, \text{funz}} = \frac{1}{p_x/p_o} \frac{1}{p_y/p_x} \frac{p_y}{p_B} p_b = \left(\frac{1}{0.1278} \right) \left(\frac{1}{4.5} \right) (1)(14.7) = 25.561 \quad [\text{psia}]$$

il tempo impiegato per raggiungere nel serbatoio la condizione di $[p_o]_{\min, \text{funz}} = 25.561$ psia viene calcolato con l'ipotesi di isentropia, questa ipotesi fornirà un valore conservativo per il volume del serbatoio.

Nella (...)

$$t = \left\{ \sqrt{\frac{1}{\gamma R_{\text{gas}}}} \left[\frac{\gamma+1}{2} \right]^{\frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)}} \frac{2V}{A^*(\gamma-1)} \frac{1}{\sqrt{T_{o, \text{iniz}}}} \right\} \left[\left(\frac{p_o}{p_{o, \text{iniziale}}} \right)^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} - 1 \right]$$

per aria in unità BG:

$$t = 0.1762 \frac{V}{A^*} \frac{1}{\sqrt{T_{o, \text{iniz}}}} \left[\left(\frac{p_o}{p_{o, \text{iniziale}}} \right)^{-0.143} - 1 \right]$$

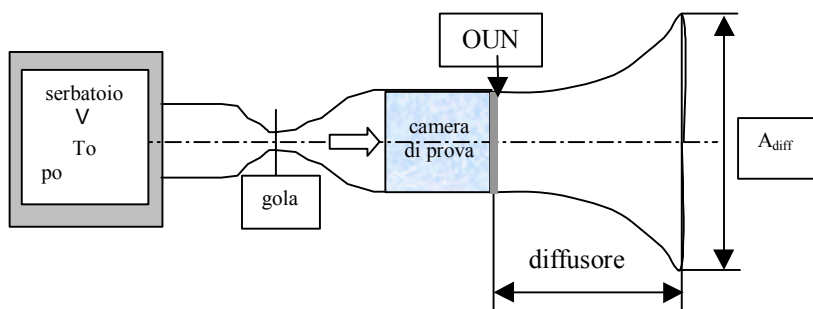
si pone $t=30.0$ secondi e si risolve per il volume V :

$$V = \frac{A^* \sqrt{T_{o, \text{iniz}}}}{0.1762} \frac{t}{\left(\frac{p_o}{p_{o, \text{iniziale}}} \right)^{-0.143} - 1} = \frac{(0.5926)(\sqrt{610})}{(0.1762)} \frac{(30)}{\left[\left(\frac{25.56}{150} \right)^{-0.143} - 1 \right]} = 8654 \quad [\text{ft}^3]$$



Esempio 3.9

Sbirciando i progetti della concorrenza Vi viene la voglia di verificare le prestazioni del vostro tunnel aggiungendo un poco di ferraglia costituita da un tratto di condotto che funziona da diffusore con un rapporto di area di



$(A_{\text{diff}}/A^*)3.375$. Il vostro tunnel ora sembra come a lato.

Si useranno i dati del problema precedente:

$$V=8654 \text{ ft}^2 \quad A^*=0.5926 \text{ ft}^2 \quad A_T=1.0 \text{ ft}^2 \quad p_T/p_o=0.12780 \quad M_{(4)}=M_y=0.5774 \quad p_y/p_x=4.5$$

come nel caso precedente le prove si possono fare fino a quando esiste una OUN alla fine della camera di prova. In queste condizioni vogliamo determinare le condizioni all'uscita del diffusore.

Il rapporto area-diffusore e area-camera di prova è $A_{\text{diff}}/A_T = (A_{\text{diff}}/A^*) (A^*/A_T) = (3.375)/(1.6875) = 2$

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **IS**, caso **AC** immettendo il valore $M_T = 0.5774$ e il rapporto di aree **2** si ottiene la schermata:

M1	M2	A2/A1	T2/T1	P2/P1
0.5774	0.2467	2.0000	1.0539	1.2015

Quindi alla fine del diffusore si ha un $M_{\text{diff}}=0.2467$ ed un rapporto di pressione isentropica $p_{\text{diff}}/p_y=1.202$

In queste condizioni $M_{(4)}=M_{\text{idd}}=0.2467$, $p_y/p_x=4.5$ $p_{\text{diff}}/p_y=1.202$ la pressione minima di funzionamento del serbatoio è:

$$[p_o]_{\text{min,funz}} = \frac{1}{p_x/p_o} \frac{1}{p_y/p_x} \frac{p_y}{p_{\text{diff}}} \frac{p_{\text{diff}}}{p_B} p_B = \left(\frac{1}{0.1278} \right) \left(\frac{1}{4.5} \right) \left(\frac{1}{1.202} \right) (1)(14.7) = 21.27 \text{ [psia]}$$

il tempo impiegato per raggiungere nel serbatoio la condizione di $[p_o]_{\text{min,funz}} = 21.27$ psia viene calcolato con l'ipotesi di isentropia, questa ipotesi fornirà un valore conservativo per il volume del serbatoio.

Ne deriva, come nel caso precedente **per aria in unità BG**:

$$t = 0.1762 \frac{V}{A^*} \frac{1}{\sqrt{T_{o,\text{iniz}}}} \left[\left(\frac{p_o}{p_{o,\text{iniziale}}} \right)^{-0.143} - 1 \right]$$

$$t = 0.1762 \frac{(8654)}{(0.5926)} \frac{1}{\sqrt{610}} \left[\left(\frac{21.27}{150} \right)^{-0.143} - 1 \right] = 33.53 \text{ [secondi]}$$

L'uso del diffusore ha fatto aumentare il tempo di prova del 10%.



Esempio 3.10

Dovete fare il progetto preliminare di un tunnel supersonico a circuito chiuso e funzionamento continuo con diffusore a sezione fissa (non variabile durante l'avviamento).

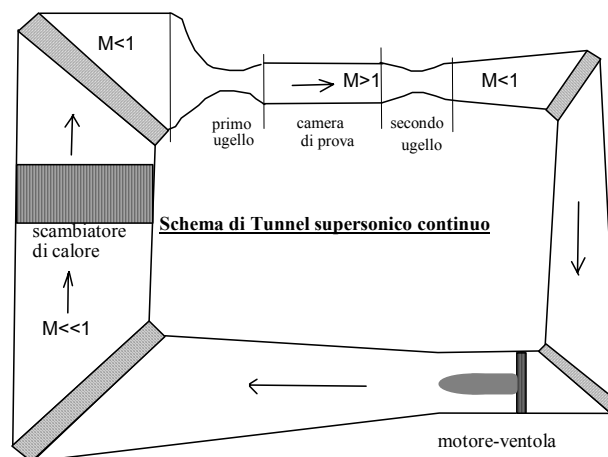
Le specifiche sono:

$$M_T=2 \quad A_T=0.5 \text{ m}^2$$

$$p_T=40 \text{ kPa} \quad T_T=250 \text{ K}$$

Determinare:

- le condizioni di ristagno richieste a monte della sezione di prova
- la portata massica richiesta
- l'area di gola A^*
- la massima perdita di pressione di ristagno durante l'avviamento (diffusore fisso)
- nel caso di diffusore a geometria variabile, discutere la sequenza di avviamento.



Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **IS**, caso **M** immettendo il valore $M_T = 2.0$ si ottiene la schermata:

MACH	T RATIO	P RATIO	A RATIO	IMPULSE RATIO
------	---------	---------	---------	---------------

2.0000 0.5556 0.1278 1.6875 1.1227

Si richiedono quindi (prima gola):

$$A_T/A^*_1 = 1.68751 \qquad p_T/p_{01} = 0.1278 \qquad T_T/T_{01} = 0.5556$$

Le condizioni di gola e di ristagno (a monte della camera di prova) sono:

- $A^*_1 = A_T/[A_T/A^*_1] = 0.5/1.6875 = 0.2963 \quad [\text{m}^2]$
- $p_{01} = p_T/[p_T/p_{01}] = 40/0.1278 = 313.0 \quad [\text{kPa}]$
- $T_{01} = T_T/[T_T/T_{01}] = 250/0.5556 = 450.0 \quad [\text{K}]$

la portata massica è:

$$\dot{m} = \left\{ \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \sqrt{\frac{\gamma}{\Re_{\text{gas}}}} \right\} \frac{A^* p_o}{\sqrt{T_o}}$$

per l'aria, unità SI usando le condizioni di ristagno (...):

$$\dot{m} = \underbrace{0.04041}_{\text{s.i.}} \frac{A^* p_o}{\sqrt{T_o}} = 0.04041 \frac{(0.2963)(313.0)}{\sqrt{(450)}} = 0.1767 \quad [\text{kg/s}]$$

La massima perdita di pressione di ristagno sarà realizzata durante l'avviamento quando l'OUN è posizionata nella camera di prova (massimo valore del Mach=2).

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **NS**, caso **U** immettendo il valore del $M_1=M_x=2$, si ottiene la schermata:

M1	M2	P2/P1	T2/T1	RHO 2/1	PO2/PO1
2.0000	0.5774	4.500	1.6875	2.6667	0.7209

La massima perdita è quindi:

$$\Delta p_o = p_{oy} - p_{ox} = p_{ox} [p_{oy}/p_{ox} - 1] = (313) [(0.7209) - 1] = (313) [-0.2791] = -86.36 \quad [\text{kPa}]$$

L'uso del diffusore a geometria fissa richiede una seconda gola sufficientemente larga da far passare la portata massima ad una pressione di ristagno minore: $p_{oy} = p_{ox} (p_{oy}/p_{ox}) = (313) (0.7209) = 225.6417 \quad [\text{kPa}]$

Dalla (...) si ha:

$$\frac{A_y^*}{A_x^*} = \frac{p_{ox}}{p_{oy}}$$

per cui:

$$A_y^* = A_x^* \frac{p_{ox}}{p_{oy}} = (0.2963) \left(\frac{1}{0.7209} \right) = 0.4110 \quad [\text{m}^2]$$

Il funzionamento continuo a geometria costante prevede una OUN che svanisce nella seconda gola essendo

$$\frac{A_y^*}{A_x^*} = \frac{0.4110}{0.2963} = 1.3874 \quad [\text{quasi 39\% più grande della prima gola}]$$

il mach a monte dell'OUN sarà la soluzione supersonica di un flusso isentropico con rapporto di area 1.3874

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **IS**, caso **A** il valore di A/A^* **1.3874** si ottiene la schermata:

MACH	T RATIO	P RATIO	A RATIO	IMPULSE RATIO
0.4766	0.9565	0.8560	1.3874	1.2345
MACH	T RATIO	P RATIO	A RATIO	IMPULSE RATIO
1.7509	0.6199	0.1876	1.3874	1.0862

quindi il Mach a monte dell'OUN è $M_x = 1.7509$

questo causa una perdita di pressione di ristagno che si può calcolare:

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **NS**, caso **U** immettendo il valore del $M_x = 1.7509$, si ottiene la schermata:

M1	M2	P2/P1	T2/T1	RHO 2/1	PO2/PO1
1.7509	0.6279	3.4099	1.4952	2.2805	0.8342

da cui $p_{oy} = (p_{oy}/p_{ox}) p_{ox} = 0.8342 \cdot 313 = 261.1046$

la perdita è quindi $\Delta p_o = p_{oy} - p_{ox} = 261.1046 - 313 = -51.8954 \text{ [kPa]}$
da paragonare al caso precedente (-86.36)

L'uso di un diffusore a geometria variabile dovrebbe prevedere una seconda gola leggermente più larga di 0.4110 m^2 per far èassare l'OUN nella parte del secondo divergente. Successivamente la seconda gola si dovrebbe ridurre (senza attrito) a 0.2963 m^2 per realizzare un funzionamento completamente isentropico. Nella realtà gli effetti viscosi alterano i valori ma in concetti rimangono validi.



Esempio 3.11

Stimare la potenza richiesta al compressore del tunnel supersonico prima considerato nella versione a divergente fisso.

stimare l'effetto di assenza del diffusore

assumere un rendimento isentropico di compressione del 83%

Trascuriamo le perdite d'urto.

caso dell'avviamento con OUN nella sezione di prova: $MT=2$, $p_{ox} = 313 \text{ kPa}$, $D_p = 86.36 \text{ kPa}$

Il compressore deve essere progettato per una portata di aria di 0.1767 kg/s ,

- ingresso $p_{o,in} = (313 - 86.36) = 225.64 \text{ kPa}$
- uscita $p_{o,out} = 313 \text{ kPa}$

Consideriamo lo scambiatore di calore posto a monte del compressore

il rapporto isentropico delle temperatura di ristagno di ingresso al compressore è

$$\frac{T_{o,ex}}{T_{o,in}} = \left(\frac{p_{o,ex}}{p_{o,in}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (3.78)$$

la definizione di rendimento di compressione isentropico è

$$\eta_{comp,isen} = \frac{H_{isen} - H_{in}}{H_{ex} - H_{in}} = \frac{T_{o,isen} - T_{o,in}}{T_{o,ex} - T_{o,in}} = \frac{T_{o,in}}{T_{o,ex} - T_{o,in}} \left(\frac{T_{o,isen}}{T_{o,in}} - 1 \right) = \frac{T_{o,in}}{T_{o,ex} - T_{o,in}} \left(\left[\frac{p_{o,ex}}{p_{o,in}} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right) \quad (3.79)$$

da cui si ricava:

$$T_{o,in} = \frac{T_{o,ex}}{1 + \frac{1}{\eta_{comp,isen}} \left(\left[\frac{p_{o,ex}}{p_{o,in}} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right)} = \frac{450}{1 + \frac{(313/225.69)^{0.2857} - 1}{0.83}} = 402.5 \text{ [K]} \quad (3.80)$$

La potenza richiesta è quindi:

$$\dot{W}_{\text{comp}} = \dot{m} c_p (T_{o,\text{ex}} - T_{o,\text{in}}) = (0.1767)(1003.5) \left[402.5 \left(\left(\frac{313}{225.64} \right)^{0.2857} - 1 \right) \right] = 8429 \quad [\text{W}] = 8.429 \quad [\text{kW}] \text{????}$$

Con la OUN nella gola del secondo diffusore si ha $M_x = 1.7509$ $\Delta p = 49.08 \text{ kPa}$

$$T_{o,\text{in}} = \frac{T_{o,\text{ex}}}{1 + \frac{1}{\eta_{\text{comp,isent}}} \left(\left[\frac{p_{o,\text{ex}}}{p_{o,\text{in}}} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right)} = \frac{450}{1 + \frac{(313/263.92)^{0.2857} - 1}{0.83}} = 424.5 \quad [\text{K}] \quad (3.81)$$

ne risulta:

$$\dot{W}_{\text{comp}} = 4.525 \text{ kW} \quad \text{riduzione del 46\%}$$

Con lo scambiatore a valle del compressore sarebbe stato:

- la potenza di avviamento $\dot{W}_{\text{comp, avv}} = 9.423 \quad [\text{kW}]$
- la Potenza continua $\dot{W}_{\text{comp, cont}} = 4.8 \quad [\text{kW}]$

Ovviamente la potenza termica è pari a quella del compressore



Esercizio 3.9

Si deve progettare un tunnel supersonico (aria) a circuito chiuso continuo con le seguenti specifiche per la camera di prova (pedice_T):

$$M_T = 2.5 \quad A_T = 180 \text{ cm}^2 \quad p_T = 30 \text{ kPa}, \quad T_T = 230 \text{ K}$$

con diffusore a geometria fissa

Trovare:

1. l'area di gola della prima contrazione e quella della seconda del diffusore [68.27 cm²] [136.8 cm²]
2. portata massica [6.23 kg/s]
3. La potenza necessaria per l'avviamento [581.26 kW]
4. La potenza necessaria per le condizioni operative [401.84 kW]
- 5.



3.2.2 Moto unidimensionale con scambio di calore - Curva di Rayleigh

Consideriamo il volume di controllo per il moto di un fluido in un condotto a sezione costante soggetto a scambi di energia sotto forma di calore con l'ambiente, sotto le ipotesi di moto unidimensionale.

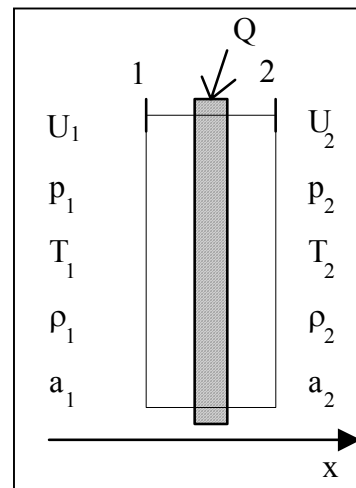
Le equazioni di bilancio che regolano tale problema sono:

Continuità: $\rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 \quad (3.82)$

Quantità di Moto: $p_1 + \rho_1 U_1^2 = p_2 + \rho_2 U_2^2 \quad (3.83)$

Energia: $q + \left(h_1 + \frac{U_1^2}{2} \right) = \left(h_2 + \frac{U_2^2}{2} \right) \Leftrightarrow q = H_2 - H_1 \quad (3.84)$

avendo indicato con $q = \frac{\dot{Q}}{\rho U A}$ l'energia addotta/sottratta per unità di portata



di massa che fluisce nel volume di controllo.

Assegnate le condizioni in (1) ed il "q", per trovare le condizioni in (2) occorre risolvere il sistema delle tre equazioni con l'aggiunta delle due equazioni di stato per il fluido.

Nel caso di gas piuccheperfetto, è possibile ricavare soluzioni in forma chiusa.

L'equazione dell'energia (3.84), espressa in funzione delle temperature di ristagno, diventa:

$$q = c_p (T_{o2} - T_{o1}) \quad (3.85)$$

i.e. **l'adduzione/sottrazione di calore fa variare la temperatura di ristagno.**

Per trovare i rapporti tra gli stati (2) ed (1) di tutte le proprietà in funzione di M_1 e di M_2 notiamo che:

$$\rho U^2 = \rho a^2 M^2 = \rho \frac{\gamma R}{T} M^2 = \gamma p M^2 \quad (3.86)$$

Sicché dalla (3.83) otteniamo:

$$p_2 - p_1 = \rho_1 U_1^2 - \rho_2 U_2^2 = \gamma p_1 M_1^2 - \gamma p_2 M_2^2 \quad (3.87)$$

ovvero:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \quad (3.88)$$

Dall'equazione di stato, dalla continuità e dalla definizione della velocità del suono ricaviamo:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_2}{p_1} \frac{U_2}{U_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{M_2}{M_1} \frac{a_2}{a_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (3.89)$$

per cui dalla (3.89):

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right]^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \quad (3.90)$$

Dall'equazione di stato si ottiene:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} \quad (3.91)$$

ovvero usando le (3.88) e (3.90):

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \right) \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 \quad (3.92)$$

I rapporti dei parametri di ristagno sono ottenuti dalle rispettive definizioni e dai rapporti già trovati:

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right) \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \frac{T_{o2}}{T_{o1}} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right) \quad (3.93)$$

La differenza di entropia nelle condizioni di ristagno è:

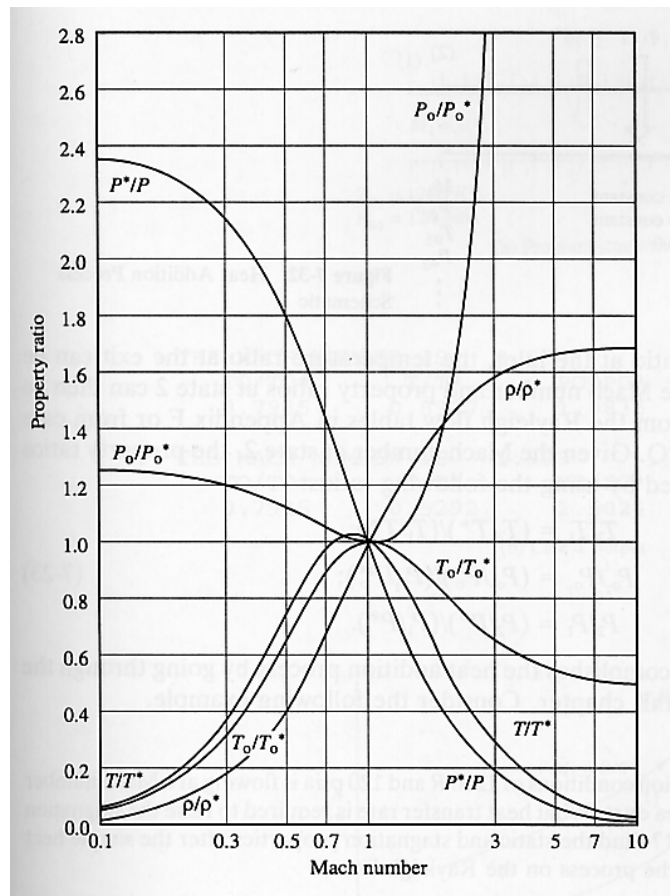
$$\frac{s_2 - s_1}{c_p} = \ln \left[\frac{T_{o2}}{T_{o1}} \right] - \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \ln \left[\frac{p_{o2}}{p_{o1}} \right] \quad (3.94)$$

Da cui usando le (3.93):

$$\frac{s_2 - s_1}{c_p} = \ln \left[\left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \right] \quad (3.95)$$

Tutti questi rapporti dipendono dai numeri di Mach a monte (M_1) ed a valle (M_2) del volume di controllo.

La strategia usata per tabellare o diagrammare tali rapporti è di riportarli in funzione di $M_1=M$ e $M_2=1$, ovvero di rapportare ogni proprietà, alla generica sezione, al suo valore in condizioni critiche ovvero alla ipotetica sezione sonica (denotato con un asterisco).



In conclusione sono quindi facilmente ottenibili le seguenti formule.

Notazione:

$$\Psi = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Forme differenziali

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{1 + \gamma M^2}{1 - M^2} \Psi \frac{dT_o}{T_o}$$

$$\frac{dU}{U} = \frac{\Psi}{1 - M^2} \frac{dT_o}{T_o}$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{1 - \gamma M^2}{1 - M^2} \Psi \frac{dT_o}{T_o}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{\Psi}{1 - M^2} \frac{dT_o}{T_o}$$

$$\frac{dp}{p} = - \frac{\gamma M^2}{1 - M^2} \Psi \frac{dT_o}{T_o}$$

$$\frac{dp_o}{p_o} = - \frac{\gamma M^2}{2} \frac{dT_o}{T_o}$$

$$\frac{dF}{F} = 0$$

$$\frac{ds}{c_p} = \Psi \frac{dT_o}{T_o}$$

Rapporti delle proprietà

$$\frac{T_o}{T_o^*} = \frac{2(\gamma + 1)M^2}{(1 + \gamma M^2)} \Psi$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M^2} \left(\frac{1 + \gamma M^2}{1 + \gamma} \right)$$

$$\frac{T}{T^*} = M^2 \left(\frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right)^2$$

$$\frac{U}{U^*} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{(1 + \gamma M^2)}$$

$$\frac{p_o}{p_o^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2}$$

$$\frac{s - s^*}{c_p} = \ln \left[\left(\frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma}} M^2 \right]$$

$$A = A^* = \text{costante}$$

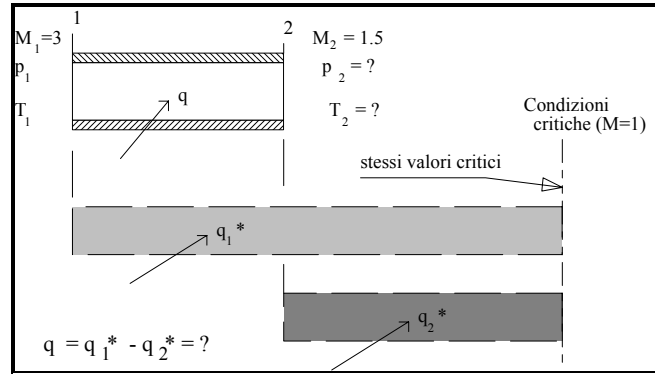
$$f_{\text{Fanning}} = 0$$

$$F = F^*$$

La strategia da usare per l'uso delle condizioni critiche è descritta schematicamente nella figura a destra.

Considerare per ogni problema il passaggio ipotetico attraverso la condizione critica (mediante addizione/sottrazione di calore).

Questa strategia si adatta a quasi tutti i problemi inerenti a tali moti.



Problema:

Quanto calore occorre aggiungere/sottrarre per decelerare la corrente supersonica da $M_1=3$ a $M_2=1.5$?

Strategia: il calore è pari alla differenza tra [quello necessario per arrivare dallo stato (1) a quello critico] meno [quello necessari per andare dallo stato critico allo stato (2)]

Soluzione: assumiamo aria con:

$$T_1 = 300 (^{\circ}\text{K}) \quad ; \quad p_1 = 1 (\text{bar})$$

$$M_1 = 3 \xrightarrow{\text{Fanno}} \begin{cases} T_{01}/T_0^* = 0.65307 \\ T_1/T^* = 0.28028 \\ p_1/p^* = 0.17647 \end{cases} \quad M_2 = 1.5 \xrightarrow{\text{Fanno}} \begin{cases} T_{02}/T_0^* = 0.90928 \\ T_2/T^* = 0.75250 \\ p_2/p^* = 0.57831 \end{cases}$$

$$M_1 = 3 \xrightarrow{\text{Isentropica}} T_1/T_{01} = 0.357 \quad \Rightarrow \quad T_{01} = \frac{T_1}{T_1/T_{01}} = \frac{300}{0.357} = 840 (^{\circ}\text{K})$$

$$T_{01} = \frac{T_1}{0.357} = \frac{300}{0.357} = 840 (^{\circ}\text{K}) \quad T_0^* = \frac{T_{01}}{T_{01}/T_0^*} = \frac{840}{0.65307} = 1287 (^{\circ}\text{K})$$

$$T_{02} = (T_0^*) \times (0.90928) = (1287) \times (0.90928) = 1170 (^{\circ}\text{K})$$

$$q = q_2^* - q_1^* = [c_p (T_{02} - T_0^*)] - [c_p (T_{01} - T_0^*)] \\ = c_p (T_{02} - T_{01}) = 1004.5 (1170 - 840) = 117983 (\text{J/kg})$$

Risposta al quesito:

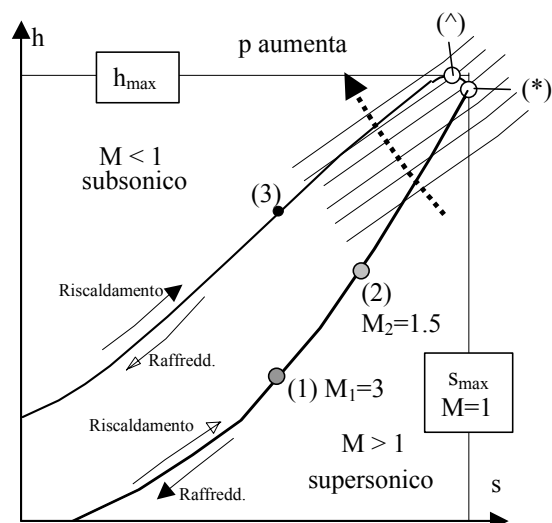
occorre aggiungere circa 118 [kJ/Kg]

Le condizioni allo stato (2) sono:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2/T^*}{T_1/T^*} = \frac{0.75250}{0.28028} = 2.6848 \quad \rightarrow$$

$$T_2 = T_1 \times (2.6848) = (300) \times (2.6848) = 2639 (^{\circ}\text{K})$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2/p^*}{p_1/p^*} = \frac{0.57831}{0.17647} = 3.2771 \quad \rightarrow \quad p_2 = p_1 \times (3.2771) = (1) \times (3.2771) = 3.2771 (\text{bar})$$



Gli stati termo-fluidodinamici inerenti a questo problema sono illustrati dalla curva di Rayleigh nel piano T-s:

$$G = \rho U = \text{costante}$$

$$I = p + \rho U^2 = p + G U = \text{costante}$$

Ovviamente il ramo superiore corrisponde al regime subsonico, quello inferiore al regime supersonico.

Dall'analisi di questa curva discendono le seguenti considerazioni:

In conclusione le fenomenologie che si verificano si possono sintetizzare come segue:

Quando si aggiunge calore:

	flussi subsonici $M_1 < 1$	flussi supersonici $M_1 > 1$
Numero di Mach	aumenta	diminuisce
Pressione	diminuisce	aumenta
Temperatura & Entalpia	aumenta per $M_1 < 1/\sqrt{\gamma}$ diminuisce per $M_1 > 1/\sqrt{\gamma}$	aumenta
Temperatura di ristagno	aumenta	aumenta
Pressione di ristagno	diminuisce	diminuisce
Densità	diminuisce	aumenta
Velocità	aumenta	diminuisce

Gli andamenti derivanti dalla sottrazione di calore sono speculari.

Da questo discende che:

- **l'adduzione di calore** spinge verso le condizioni soniche, i.e. **decelera un flusso supersonico, accelera un flusso subsonico**
- **la sottrazione di calore** allontana dalle condizioni soniche, i.e. **accelera un flusso supersonico, decelera un flusso subsonico**

La curva di Rayleigh mostra:

- un massimo verticale (^) che corrisponde alla massima entalpia ($h_{\max}$ o massima temperatura) che giace sul ramo subsonico;
- un massimo orizzontale (*) che corrisponde alla massima entropia ($s_{\max}$) che divide i due rami subsonico/supersonico.

E' semplice dimostrare che nel punto (^) $s_{\max}$ si realizzano condizioni soniche ($M=1$).

Nell'intorno di tale punto, essendo la entropia massima, deve valere, $ds=0$.

Se consideriamo che la curva di Rayleigh è soggetta alla continuità:

$$G = \rho U = \text{costante} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dU}{U} = 0 \Rightarrow dU = -\frac{U}{\rho} d\rho \quad (3.96)$$

ed al bilancio della Quantità di moto:

$$p + \rho U^2 = p + (\rho U)U = p + G U = \text{costante} \Rightarrow dp + G dU = 0 \quad (3.97)$$

Eliminando tra le due espressioni dU , si ottiene:

$$dp + G dU = dp - G \frac{U}{\rho} d\rho = dp - \rho U \frac{U}{\rho} d\rho = dp - U^2 d\rho = 0 \Rightarrow \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\text{Rayleigh}} = U^2 \quad (3.98)$$

Ma essendo in quell'intorno $s=\text{costante}$, la derivata $dp/d\rho$ è pari al quadrato della velocità del suono, per cui **nel punto di massima entropia** si verifica: $U=a$ cioè $M=1$.

Nel punto di massima entalpia (^) si verifica che $dh=0$, cioè $h=\text{costante}$.

Tale punto appartiene alla curva di Rayleigh per la quale deve essere:

$$p + \rho U^2 = p + \frac{(\rho U)^2}{\rho} = p + v G^2 = \text{costante} \Rightarrow \left(\frac{dp}{dv} \right)_{\text{Rayleigh}} = -G^2 = -\rho^2 U^2 = -\frac{U^2}{v^2} \quad (3.99)$$

Ma per $h=\text{costante}$ e per un gas piuccheperfetto ($h = c_p T$; $p v = RT$) sarà $T = \text{costante}$, per cui:

$$\left(\frac{dp}{dv} \right)_h = \left(\frac{dp}{dv} \right)_T = -\frac{RT}{v^2} = -\frac{\gamma RT}{\gamma v^2} = -\frac{1}{\gamma} \frac{a^2}{v^2} \quad (3.100)$$

Dovendo le due condizioni verificarsi simultaneamente sarà:

$$-\frac{U^2}{v^2} = -\frac{1}{\gamma} \frac{a^2}{v^2} \Rightarrow M^2 = \frac{1}{\gamma} \quad (3.101)$$

E' interessante analizzare cosa avviene allorquando si addiziona calore ad un flusso subsonico, a partire, ad esempio, dalle condizioni (1) della figura precedente.

L'energia addotta sotto forma di calore tenderà a fare aumentare sia l'entalpia termodinamica che quella cinetica, fino a quando, arrivati nel punto di massimo (tangente orizzontale), l'entalpia raggiunge il suo massimo e quindi non può più aumentare.

Accade allora, stranamente, che l'ulteriore adduzione di calore fa mutare gli effetti: si realizza, infatti, un aumento soltanto dell'energia cinetica a scapito di una diminuzione di quella entalpica.

Questo si può spiegare notando che in tale tratto [dallo stato (^) allo stato (*)] si verifica una notevole diminuzione delle pressioni, il flusso è quindi costretto ad accelerare notevolmente; l'energia necessaria a tale incremento di velocità è maggiore di quella che viene addotta dall'esterno, sicché parte di essa viene prelevata dall'energia termodinamica, con conseguente diminuzione dell'entalpia e quindi della temperatura.

Nota che tra il punto (^) $h_{\max}$ ed il punto (*) $s_{\max}$ la tangente alla curva di Rayleigh ha pendenza negativa [$dh/ds < 0$].

Essendo $h = c_p T$ ($c_p = \text{costante}$) sarà anche $(dT/ds) < 0$, il che sembrerebbe violare le regole di stabilità termodinamica. Occorre notare, però, che:

- nel nostro caso è: $\left(\frac{dT}{ds} \right)_{\text{Rayleigh}} < 0$
- nel caso della stabilità termodinamica deve essere: $\left(\frac{dT}{ds} \right)_{\text{volume specifico}} \geq 0$

Ovviamente le due derivate parziali sono differenti, essendo il vincolo della curva di Rayleigh una combinazione di "p" e "v" [$p + v g^2 = \text{costante}$].

Per completare l'analisi, notiamo che l'adduzione/sottrazione di calore può essere, teoricamente, un modo per accelerare un flusso subsonico fino a farlo diventare supersonico, o viceversa decelerare un flusso supersonico; il tutto in un condotto a sezione costante.

Ovviamente occorrerà passare sempre per le condizioni soniche che imporranno un brusco cambiamento nella strategia di adduzione/sottrazione di calore.

Notiamo infine che, come nel caso dell'Onda d'Urto, l'adduzione di calore ad un flusso-subsonico o supersonico fa sempre diminuire la sua pressione di ristagno.

Tutti questi effetti sono di primaria importanza nel progetto di motori a getto e nei sistemi di laser gasdinamici.



Esercizio 3.10

Plotta la curva di Rayleigh dimensionale con una temperatura iniziale di 500 °K e pressione iniziale di 7 atm.



.3.2.2.1 Applicazioni – tabelle virtuali

L'uso di **COMPQ**, dopo aver fissato il valore del γ , con l'opzione **RA** offre un menu di scelte:

```

RAYLEIGH FLOW SELECTED
INPUT PARAMETERS ARE:
      MACH NUMBER           M
      TO/TO*                 T
      HEAT TRANSFER          HT
ENTER THE DESIRED LETTER(s)?
  
```

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **RA**, caso **M** immettendo il valore $M_1 = 0.7$ si ottiene la schermata:

TO/TO*	T/T*	PO/PO*	P/P*	RHO/RHO*
0.9085	0.9929	1.0431	1.4235	1.4337

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **RA**, caso **T** immettendo il valore $T_0/T_0^* = 0.5$ si ottiene la schermata:

THE MACH NUMBER IS	0.384			
TO/TO*	T/T*	PO/PO*	P/P*	RHO/RHO*
0.4999	0.5827	1.1636	1.9900	3.4150

THE MACH NUMBER IS	13.033			
TO/TO*	T/T*	PO/PO*	P/P*	RHO/RHO*
0.5000	0.0172	1.343E+03	1.005E-02	5.858E-01

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, opzione **RA**, caso **HT** appare la schermata

```

ENTER THE INITIAL MACH NUMBER AND THE STAGNATION TEMP (K OR R)?
  
```

immettendo il valore **0.5,1000.** si ottiene la schermata:

```

ENTER THE CHANGE IN STAGNATION TEMP (+ ADD, - REJ) ?
  
```

immettendo il valore **200.** si ottiene la schermata:

```

HEAT TRANSFER PROCESS COMPUTATIONS
      M1      M2      TO1      DELTO
      0.5000   0.6100   1000     200

      TO2/TO1  T2/T1  PO2/PO1  P2/P1  RHO2/RHO1
      1.2000   1.1727  0.9620  0.8876  0.7569
  
```



Esempio 3.12

Aria con **condizioni iniziali di ristagno**: di temperatura = 1200 R e pressione = 120 psia, scorre in un condotto a sezione costante con Mach iniziale di 0,4

- **Quanta energia specifica (per unità di portata di massa) occorre aggiungere per innalzare la temperatura di ristagno fino a 1800 R?**
- **Determinare le proprietà finali.**

Premettiamo che le proprietà iniziali si ricavano dall'isentropica:

Da COMPQ $\gamma=1.4$, opzione **IS** caso **M** immettendo **0.4** si ottiene: la schermata

MACH	T RATIO	P RATIO	A RATIO	IMPULSE RATIO
0.4000	0.9690	0.8956	1.5901	1.3749

Da cui le proprietà iniziali sono calcolabili:

$$p_1 = (p_1/p_{01}) (p_{01}) = (0.8956) (120) = 107.5 \text{ psia}$$

$$T_1 = (T_1/T_{01}) (T_{01}) = (0.9690) (1200) = 1162.8 \text{ R}$$

Due possibili procedimenti per ricercare la soluzione:

a) procedimento diretto

Da COMPQ, $\gamma=1.4$, opzione **RA**, caso **HT** appare la schermata

ENTER THE INITIAL MACH NUMBER AND THE STAGNATION TEMP (K OR R)?

immettendo il valore **0.4, 1200**, si ottiene la schermata:

ENTER THE CHANGE IN STAGNATION TEMP (+ ADD, - REJ) ?

immettendo il valore **600**, si ottiene la schermata:

HEAT TRANSFER PROCESS COMPUTATIONS

M1	M2	TO1	DELTO	
0.4000	0.5775	1200	600	
TO2/TO1	T2/T1	PO2/PO1	P2/P1	RHO2/RHO1
1.5000	1.4512	0.9368	0.8344	0.5750

Ne derivano finali:

$$M2 = 0.577$$

$$T_{02} = 1800 \text{ R}$$

$$T_2 = (T_1)(T_2/T_1) = (1.4512) (1162.8) = 1688.4 \text{ R}$$

$$p_{02} = (p_{02}/p_{01}) (p_{01}) = (0.937) (120) = 112.4 \text{ psia}$$

$$p_2 = (p_2/p_{01}) (p_{01}) = (0.834) (120) = 89.7 \text{ psia}$$

b) procedimento a due steps:

Il calore necessario è: $q_{1-2} = c_p(T_{02} - T_{01}) = (0.24) (1800 - 1200) = 144 \text{ Btu/lbm}$

Da COMPQ, $\gamma=1.4$, opzione **RA**, caso **M** immettendo il valore $M_1 = 0.4$ si ottiene la schermata:

TO/TO*	T/T*	PO/PO*	P/P*	RHO/RHO*
0.5290	0.6151	1.1566	1.9608	3.1875

Per cui dopo l'aggiunta di calore $T_{02}/T^* = (T_{02}/T_{01})(T_{01}/T_o^*) = (1800)/(1200)(0.529) = 0.7935$

Da COMPQ, $\gamma=1.4$, opzione **RA**, caso **T** immettendo il valore $T_o/T_o^* = 0.7935$ si ottiene la schermata:

THE MACH NUMBER IS	0.577			
TO/TO*	T/T*	PO/PO*	P/P*	RHO/RHO*
0.7935	0.8927	1.0835	1.6362	1.83300
THE MACH NUMBER IS	1.999			
TO/TO*	T/T*	PO/PO*	P/P*	RHO/RHO*
0.7935	0.5292	1.5024	0.3638	0.6876

i due casi ovviamente coincidono perché:

$$\begin{aligned}
 T_{02}/T_{01} &= (T_{02}/T_o^*) / (T_{01}/T_o^*) = 0.793 / 0.529 = \mathbf{1.5} \\
 T_2/T_1 &= (T_2/T^*) / (T_1/T^*) = 0.893 / 0.615 = \mathbf{1.452} \\
 p_{02}/p_{01} &= (p_{02}/p_o^*) / (p_{01}/p_o^*) = 1.084/1.157 = \mathbf{0.937} \\
 p_2/p_1 &= (p_2/p^*) / (p_1/p^*) = 1.6273/1.961 = \mathbf{0.834}
 \end{aligned}$$

Le proprietà finali sono ovviamente le stesse di quelle calcolate per il caso (a).



Esercizio 3.11

Aria entra in un condotto raffreddato ad acqua con una temperatura di ristagno di 800 K ed un Mach di 0.4

La sua entalpia di ristagno è ridotta di 300 kJ/kg,

Determinare le condizioni all'uscita $[M_2=0.2915, \quad T_{02}= 501 \quad t_2=492.56]$



Esercizio 3.12

Aria entra in una camera di combustione con una temperatura di ristagno di 800 K ed un Mach di 0.4

Quanta energia si può aggiungere alla corrente senza strozzarla? $[712.3 \text{ kJ/kg}]$

Quanto carburante JA $[H_v=42800 \text{ J/(Kg-k)}]$ si può iniettare per unità di portata d'aria? $[0.0167]$



Esercizio 3.13

Per la camera di combustione di un *ramjet* avente un diametro di 4 inches ed una $T_{0,\text{iniziale}}$ di 350K si vuole determinare la quantità di calore da aggiungere in modo da:

- quadruplicare la temperatura di ristagno
- avere un Mach di uscita ≤ 9

Assumere $\gamma=1.3$ e $R_{\text{gas}}= 287.04 \text{ J/(kg-K)}$

Determinare

- Il calore specifico (per portata unitaria di gas) $[1306 \text{ kJ/kg}]$
- Il Mach iniziale $[0.25]$



Esercizio 3.14

Aria lascia il diffusore subsonico di un *ramjet* con una pressione statica di 55.16 kPa. Tra l'uscita del

Diffusore viene spruzzato un combustibile con un rapporto $f= 1/29$ (combustibile/aria).

Il combustibile, che ha un potere calorifico specifico di combustione di $\Delta H_c=41867 \text{ kJ/kg}$, viene vaporizzato e misto ad aria entra nella camera di combustione con:

Temperatura media 333.3 K

Velocità media 73.15 m/s

Assumendo che nella camera di combustione il gas sia termodinamicamente simile all'aria, determina:

- la temperatura di ristagno all'uscita 1724.8 K
- il Mach all'uscita 0.68
- la temperatura all'uscita 1583.2 K
- la perdita di pressione di ristagno $- 8.53 \text{ kPa}$
- la variazione di entropia specifica 1.69 kJ/(kg-K)
- la velocità all'uscita 542.1 m/s



3.2.3 Moti unidimensionali con attrito - curva di Fanno

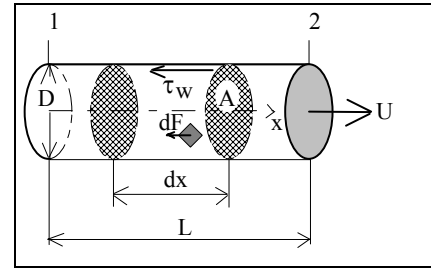
Consideriamo il flusso compressibile di un fluido in un condotto a sezione costante, adiabatico, stazionario, senza onde d'urto, con attrito, sotto le ipotesi di moto unidimensionale.

Le equazioni di bilancio sono:

$$\text{Continuità:} \quad \rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 = G \quad (3.102)$$

$$\text{Energia:} \quad h_1 + \frac{U_1^2}{2} = h_2 + \frac{U_2^2}{2} = H_0 \quad (3.103)$$

$$\text{Quantità di Moto:} \quad \oint_S (\rho \underline{V}) \cdot \underline{n} dS = - \oint_S (p \underline{U}) \cdot \underline{n} dS + \oint_S \underline{\tau}_d \cdot \underline{n} dS + dF \quad (3.104)$$



Con l'ipotesi di unidimensionalità, lo sforzo alla parete è funzione solo dell'ascissa "x".

Supponendo trascurabili i contributi nelle sezioni di entrata e di uscita, la componente dell'equazione lungo l'asse "x" si semplifica:

$$-\rho_1 U_1^2 A + \rho_2 U_2^2 A = p_1 A - p_2 A - \int_0^L \pi D \tau_w dx - dF \quad (3.105)$$

Essendo $A = \pi D^2/4 = \text{costante}$, il bilancio di Quantità di Moto diventa:

$$(p_2 - p_1) + (\rho_1 U_1^2 - \rho_2 U_2^2) = -\frac{4}{D} \int_0^L \tau_w dx - dF \left(\frac{4}{\pi D^2} \right) \quad (3.106)$$

Prendendo il limite per $dx \rightarrow 0$ l'equazione prende la forma differenziale:

$$dp + d(\rho U^2) = -\frac{4}{D} \tau_w dx - dF \left(\frac{4}{\pi D^2} \right) \quad (3.107)$$

ovvero:

$$dp + d(GU) = dp + G dU = dp + \rho U dU = -\frac{4}{D} \left[\tau_w dx - \frac{dF}{\pi D} \right] \quad (3.108)$$

definendo infine il **coefficiente di Fanning**:

$$f = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho U^2} \left(\tau_w + \frac{1}{\pi D} \frac{dF}{dx} \right) \quad (3.109)$$

abbiamo:

$$\boxed{dp + \rho U dU = -\frac{1}{2} \rho U^2 \left(\frac{4f dx}{D} \right)} \quad (3.110)$$

Questa equazione determina l'effetto dell'attrito sul moto. Essa può essere posta in termini del numero di Mach.

Dalla continuità e dall'equazione di stato:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{U} + \frac{d\rho}{\rho} &= 0 \\ \frac{dp}{p} &= \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{dU}{U} + \frac{dT}{T} \quad (3.111)$$

Dall'energia:

$$h + \frac{1}{2} U^2 = c_p T + \frac{1}{2} U^2 = H_o \rightarrow c_p dT + \frac{1}{2} d(U^2) = 0 \quad (3.112)$$

dividendo per $c_p T$ ed usando la definizione di M^2 :

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) M^2 \frac{dU}{U} \quad (3.113)$$

Dalla definizione del numero di Mach:

$$M = \frac{U}{a} = \frac{U}{(\gamma R T)^{1/2}} \Rightarrow \frac{dU}{U} = \frac{dM}{M} + \frac{1}{2} \frac{dT}{T} \quad (3.114)$$

ovvero:

$$\frac{dU}{U} = \frac{dM}{M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} ; \quad \frac{dT}{T} = \frac{(1-\gamma) M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} \quad (3.115)$$

Sostituendo nel bilancio differenziale della quantità di moto si ottiene:

$$\left(\frac{4f dx}{D} \right) = \frac{2(1-M^2)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{\gamma M^3} \quad (3.116)$$

Di solito questa equazione viene integrata tra la sezione generica e quella sonica: cioè tra M ed $M^*=1$ e corrispondentemente tra $x=0$ ed $x=L^*$. Tale integrale risulta:

$$\int_0^{L^*} \left(\frac{4f}{D} \right) dx = \int_M^1 \frac{2(1-M^2)}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{\gamma M^3} = \left[-\frac{1}{\gamma M^2} - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right) \right]_M^1 \quad (3.117)$$

Esplicitando i limiti di integrazione, si ottiene:

$$\frac{4\bar{f}L^*}{D} = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right) \quad (3.118)$$

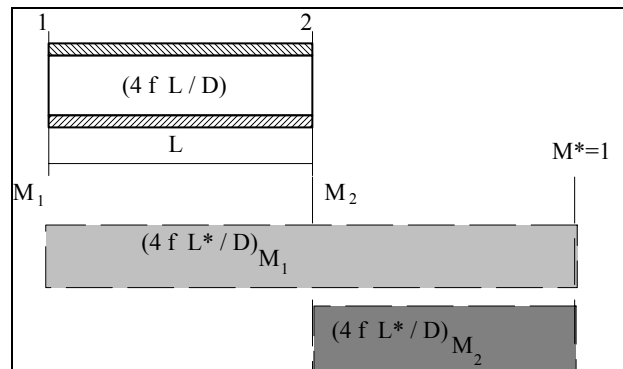
dove il valore medio del coefficiente di attrito " f " è definito come:

$$\bar{f} = \frac{1}{L^*} \int_0^{L^*} f dx \quad (3.119)$$

Ovviamente con la stessa logica seguita per l'analisi del moto alla Rayleigh, il valore di $(4\bar{f}L^*/D)$ necessario a realizzare la variazione di Mach tra due sezioni aventi all'entrata M_1 ed all'uscita M_2 è dato da quello necessario per arrivare alle condizioni critiche meno quello necessario per ritornare dalle condizioni critiche allo stato (2).

Ovvero:

$$\left(\frac{4\bar{f}L}{D} \right) = \left(\frac{4\bar{f}L^*}{D} \right)_1 - \left(\frac{4\bar{f}L^*}{D} \right)_2 \quad (3.120)$$



Per cui:

$$\left(\frac{4fL}{D} \right) = \frac{1}{\gamma M_1^2} \left(\frac{M_2^2 - M_1^2}{M_2^2} \right) + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left(\frac{M_1^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)}{M_2^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)} \right) \quad (3.121)$$

Gli altri rapporti si calcolano facilmente.

Essendo il flusso adiabatico, risulta che l'entalpia totale H_0 e quindi la temperatura di ristagno T_0 sono costanti:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_0/T_1}{T_0/T_2} \stackrel{\text{isen tropica}}{=} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \quad (3.122)$$

Dall'equazione di stato e dalla continuità:

$$p = \rho RT \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\gamma R T_2}{\gamma R T_1} = \frac{g U_1}{g U_2} \frac{a_2}{a_1} \frac{a_2}{a_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \quad (3.123)$$

ovvero:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2}} \quad (3.124)$$

Dall'equazione di stato :

$$p = \rho RT \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 T_2}{\rho_1 T_1} \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{T_2}{T_1} \quad (3.125)$$

per cui:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.126)$$

Per le pressioni di ristagno:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{(p_{02}/p_2)_{\text{isentr.}}}{(p_{01}/p_1)_{\text{isentr.}}} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)_{\text{Fanno}} \quad (3.127)$$

sostituendo:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (3.128)$$

Per l'entropia:

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \gamma \ln \left[\frac{T_{02}}{T_{01}} \right] - (\gamma - 1) \ln \left[\frac{p_{02}}{p_{01}} \right] = -(\gamma - 1) \ln \left[\frac{p_{02}}{p_{01}} \right] \quad (3.129)$$

sostituendo:

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \left[\frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2}} \right] \quad (3.130)$$

Infine per la funzione impulso

$$F = A(p + \rho U^2) = pA(1 + \gamma M^2) \quad (3.131)$$

risulta:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{(1 + \gamma M_2^2)}{(1 + \gamma M_1^2)} = \frac{M_1}{M_2} \frac{(1 + \gamma M_2^2)}{(1 + \gamma M_1^2)} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2}} \quad (3.132)$$

Analogamente a quanto fatto per la curva di Rayleigh, tutti i rapporti sono di solito espressi in termine dei valori ad una generica sezione ($M_1=M$) e di quelli alla sezione sonica ($M_2=M^*=1$):

Ne deriva:

$$\begin{aligned} \frac{T}{T^*} &= \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} & \frac{p}{p^*} &= \frac{1}{M} \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2}} & \frac{\rho}{\rho^*} &= \frac{U^*}{U} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{p_o}{p_o^*} &= \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} & \frac{s - s^*}{c_v} &= \ln \left[\frac{1}{M} \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right]^{\frac{\gamma + 1}{2}} \right] & & (3.133) \\ \frac{F}{F^*} &= \frac{1}{M} \frac{(1 + \gamma M^2)}{\sqrt{(1 + \gamma)(2 + (\gamma - 1)M^2)}} & \left(\frac{4fL^*}{D} \right) &= \frac{1 - M^2}{\gamma M} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left(\frac{(\gamma + 1)M^2}{(2 + (\gamma - 1)M^2)} \right) \end{aligned}$$

Tutti questi rapporti sono diagrammati, per $\gamma = 1.4$, nella figura.

I valori numerici relativi sono forniti dalle **Tabelle di Fanno**.

Dall'esame dei diagrammi notiamo che per un dato valore di $(4fL^*/D)$ e di F/F^* esistono due valori di Mach, di cui uno subsonico ed un'altro supersonico.

Il coefficiente di attrito "f" dipende dal regime di moto (laminare/turbolento), dal numero di Mach, dal numero di Reynolds, dalla rugosità superficiale e da altri fattori (fluido/materiale).

Una stima dei valori di "f", **per tubi**, può essere ottenuta dall'abaco di Moody (appendice B), valido in regime incompressibile,, che viene riportato nella pagina seguente.

Come linea guida riferiamo che in regime subsonico ($M < 1$) il valore di "f" varia tra:

$$\begin{aligned} f &= 0.005 & \text{per } Re_D = 5 \cdot 10^4 \\ f &= 0.0039 & \text{per } Re_D = 2 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

Per il campo supersonico le cose sono più complicate perché molti sono i fattori in gioco.

Per dare un'idea della situazione citiamo che da esperimenti su tubi con:

- L/D tra 10 e 50,
- valori di Mach tra 1.2 e 3 ,
- valori di Re_D tra 25000 e 700000

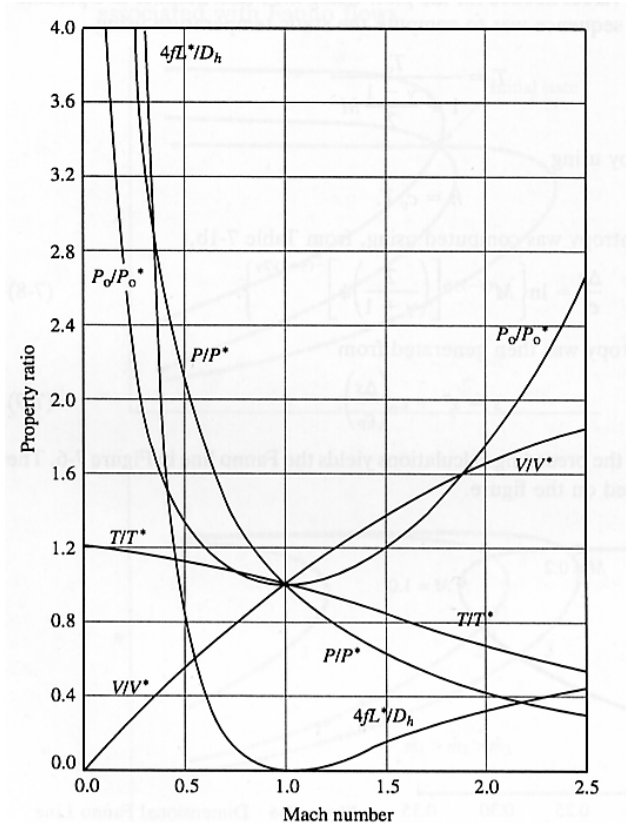
si sono riscontrati valori di "f" tra 0.003 e 0.002.

Gli stessi tubi per flusso incompressibile avevano dato valori di "f" tra 0.0065 e 0.003.

Si potrebbe concludere che in supersonica i valori di "f" sono circa pari alla metà di quelli che si misurano in regimi incompressibili (i.e.dall'abaco di Moody), ma si consiglia molta cautela.

In definitiva la seguente tabella riassume le formule più importanti nei problemi alla Fanno:

Notazioni: $\psi = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$, f_F = coefficiente di Fanning, $\mathcal{D}$: diametro idraulico



Forma differenziali

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{U} &= \frac{\gamma M^2}{2(1-M^2)} \left(4f_F \frac{dx}{D} \right) \\
\frac{dT}{T} &= -\frac{\gamma(\gamma-1)M^4}{2(1-M^2)} \left(4f_F \frac{dx}{D} \right) \\
\frac{d\rho}{\rho} &= -\frac{\gamma M^2}{2(1-M^2)} \left(4f_F \frac{dx}{D} \right) \\
\frac{dp}{p} &= -\frac{\gamma M^2 [1 + (\gamma-1)M^2]}{2(1-M^2)} \left(4f_F \frac{dx}{D} \right) \\
\frac{dp_o}{p_o} &= -\frac{\gamma M^2}{2} \left(4f_F \frac{dx}{D} \right) \\
\frac{dF}{F} &= \frac{dF}{F} = -\frac{\gamma M^2}{2(1+\gamma M^2)} \left(4f_F \frac{dx}{D} \right) \\
\frac{ds}{c_p} &= -\frac{(\gamma-1)M^2}{2} \left(4f_F \frac{dx}{D} \right)
\end{aligned}$$

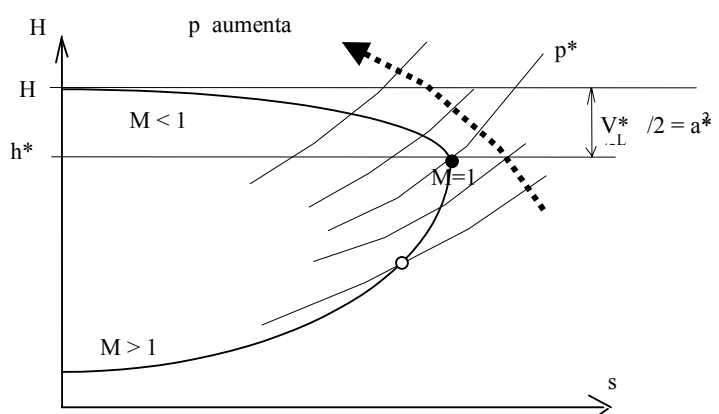
Rapporti di proprietà

$$\begin{aligned}
\frac{p}{p^*} &= \frac{1}{M} \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \Psi \right]^{-\frac{1}{2}} \\
\frac{\rho}{\rho^*} &= \frac{1}{M} \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \Psi \right]^{-\frac{1}{2}} \\
\frac{T}{T^*} &= \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \Psi \right]^{-1} \\
\frac{U}{U^*} &= M \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \Psi \right]^{-\frac{1}{2}} \\
\frac{p_o}{p_o^*} &= \frac{1}{M} \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \Psi \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \\
\frac{I}{I^*} &= \frac{F}{F^*} = \frac{1+\gamma M^2}{M\sqrt{2(\gamma+1)\Psi}} \\
\left(4f_F \frac{L^*}{D} \right) &= -\frac{1-M^2}{2M^2} + \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} \right) \ln \left[M^2 \left[\frac{2\Psi}{\gamma+1} \right]^{-1} \right] \\
A &= A^* = \text{costante} \\
T_o &= T_o^* = \text{costante} \\
\dot{m} &= \dot{m}^* = \text{costante}
\end{aligned}$$

Gli stati relativi al moto in un condotto con attrito sono rappresentati nel piano termodinamico h-s **dalla curva di Fanno**.

Per ottenere la relazione che caratterizza tali stati, notiamo che dalla equazione dell'energia e dalla continuità si ottiene facilmente:

$$\begin{aligned}
h + \frac{U^2}{2} &= h + \frac{\rho^2 U^2}{2\rho^2} = \\
&= h + \frac{g^2}{2\rho^2} = c_p T + \frac{g^2}{2} v^2 = \quad (3.134) \\
&= H_0
\end{aligned}$$



La relazione (h-p) o (T-v) definisce la **Curva di Fanno**.

La curva presenta, nel piano "h-s" un asintoto verticale corrispondente al massimo dell'entropia, che si può dimostrare corrispondere alle condizioni soniche.

Infatti dalla continuità risulta:

$$g = \rho U = \text{cost.} \Rightarrow dU = -\frac{U}{\rho} d\rho \quad (3.135)$$

dalla continuità risulta:

$$h + \frac{1}{2} U^2 = \text{cost} \Rightarrow dh = -U dU \quad (3.136)$$

Ma essendo l'entropia massima, nell'intorno del punto sarà $ds=0$, cioè

$$dh = T ds + v dp = \frac{dp}{\rho} \quad (3.137)$$

Quindi sarà:

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{\rho} (U)^2 \Rightarrow \frac{dp}{d\rho} \equiv a^2 = U^2 \quad (3.138)$$

Il punto sonico divide quindi la curva di Fanno in due rami, il superiore corrisponde alla parte subsonica, quello inferiore alla parte supersonica. Dall'esame delle relazioni risultano i seguenti trends:

	Ingresso subsonico	Ingresso supersonico
numero di Mach	aumenta	diminuisce
pressione	diminuisce	aumenta
temperatura	diminuisce	aumenta
pressione di ristagno	diminuisce	diminuisce
densità	diminuisce	aumenta
velocità	aumenta	diminuisce
funzione impulso	diminuisce	diminuisce

E' interessante calcolare la massima lunghezza di un tubo al variare del Mach all'ingresso.

Ipotizziamo, per tutti i casi, un coefficiente di attrito $f = 0.0025$.

M	0	0.25	0.50	0.75	1	1.5	2	3	∞
$4fL^*/D$	∞	8.4834	1.06908	0.12728	0	0.13605	0.30499	0.5222	.82153
$L_{\max}/D$	∞	848	107	12	0	14	30	52	82

E' interessante notare che per ingresso supersonico, la lunghezza non può essere maggiore di 82 diametri. Cosa accade se la lunghezza del tubo è maggiore di quella massima?

Supponiamo $M_1 = 0.75$, $f = 0.0025$ ed $L/D = 20$.

Dai dati risulta $(4fL/D) = 2$; dalla tabella per $M_1 = 0.75$ risulta $(4fL^*/D) = 0.12728$, i.e. $L^*/D = 12$

Essendo $L/D = 20 > L^*/D = 12$, non si riesce a far passare il flusso di massa (che è massimo in condizioni soniche).

Allora si dovrà verificare un fenomeno dello strozzamento: un **disturbo forte** risalirà la corrente per modificare il Mach all'ingresso (M_1) in modo tale da far passare la massima portata possibile, che corrisponderà al fatto che in (2) si avranno le condizioni soniche $M_2=1$

La soluzione quindi si ottiene imponendo che $(4fL^*/D) = 0.2$

Ovviamente essendo le condizioni all'ingresso inizialmente subsoniche andremo a ricercare nel regime subsonico a quale valore di Mach corrisponde $(4fL^*/D) = 0.2$, dalle tabelle risulta: $M_1=0.7$.

Lo strozzamento ha fatto diminuire il Mach di ingresso da 0.75 a 0.7.

Possiamo leggere questo fenomeno in altro modo: l'attrito fa sviluppare sulle pareti uno strato limite con conseguente spessore di spostamento che fa restringere la sezione per il passaggio del flusso: in subsonica un restringimento di area fa diminuire il Mach (il contrario in supersonica).

La teoria di Fanno è esplicitata. di solito, per un attrito diffuso, si può estendere tale teoria a perdite di carico locali " F_L " (corpi che producono resistenza, ovvero gomiti, griglie, valvole ecc..) sommando al coefficiente ($4fL/D$) la perdita di carico locale sul tratto " dx ": $f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}$.

3.2.3.1 Applicazioni

Da COMPQ l'opzione **FA** fornisce le tabelle virtuali che usano il fattore di fanning $f_{\text{Fanning}} = \frac{\tau_{\text{wall}}}{\frac{1}{2}\rho U^2}$

vi sono 4 casi:

- il caso **M** richiede l'input del numero di Mach
- il caso **F** richiede l'input del fattore $4f_F L/D$
- il caso **P** richiede l'input del rapporto p/p^*
- il caso **DA** richiede l'input del Mach iniziale e l'incremento di $4f_F L/D$



Esempio 3.13

Da COMPQ, $\gamma=1.4$, immettendo l'opzione **FA**, appare la di schermata:

```
FANNO FLOW SELECTED
INPUT PARAMETERS ARE:
  MACH NUMBER      M
  4fL/D            F
  P/PSTAR          P
  DUCT ADDITION    DA
THE FANNING FRICTION FACTOR IS USED IN ALL FANNO COMPUTATION
ENTER THE DESIRED LETTER(S) ?
```

immetto **M** appare la schermata:

```
ENTER THE MACH NUMBER?      immetto 0.2 appare la schermata

THE MACH NUMBER IS          0.2000
4fL/D      T/T*      P/P*      PO/PO*      RHO/RHO*
14.5333    1.1905    5.4554    2.9635    4.5826
STAGNATION TEMPERATURE IS CONSTANT FOR A FANNO FLOW
```

+++++

Da COMPQ, $\gamma=1.4$, immettendo l'opzione **FA**, e poi **F** appare la di schermata:

```
ENTER THE VALUE OF 4fL/D ?      immetto 10 , appare la schermata
```

```

                THE MACH NUMBER IS          0.2000
  4fL/D      T/T*      P/P*      PO/PO*      RHO/RHO*
  9.9995    1.1870    4.6583    2.5564    3.9244

NO SUPERSONIC SOLUTION EXIST FOR THE SELECTED VALUE OF 4fL/D
THE MAXIMUM VALUE OF 4fL/D IS 0.82150 FOR GAMMA = 1.4
STAGNATION TEMPERATURE IS CONSTANT FOR A FANNO FLOW
```

+++++

Da COMPQ, $\gamma=1.4$, immettendo l'opzione **FA**, e poi **F** appare la di schermata:

```
ENTER THE VALUE OF 4fL/D ?      immetto 0.5 , appare la schermata
```

```

                THE MACH NUMBER IS          0.5977
  4fL/D      T/T*      P/P*      PO/PO*      RHO/RHO*
  0.5000    1.2000    1.7706    1.1909    1.5809
```

THE MACH NUMBER IS **2.8602**

4fL/D	T/T*	P/P*	PO/PO*	RHO/RHO*
0.5000	0.4552	0.2359	3.7067	0.5182

THE MAXIMUM VALUE OF 4fL/D IS 0.82150 FOR GAMMA = 1.4
 STAGNATION TEMPERATURE IS CONSTANT FOR A FANNO FLOW

+++++

Da COMPQ, $\gamma=1.4$, immettendo l'opzione FA, e poi P appare la di schermata:

ENTER THE VALUE OF 4fL/D ? immetto **2.0**, appare la schermata

THE MACH NUMBER IS **0.5328**

4fL/D	T/T*	P/P*	PO/PO*	RHO/RHO*
0.8315	1.1355	2.0000	1.2818	1.7613

STAGNATION TEMPERATURE IS CONSTANT FOR A FANNO FLOW

+++++

Da COMPQ, $\gamma=1.4$, immettendo l'opzione FA, e poi DA appare la schermata:

ENTER THE MACH NUMBER AND THE 4fL/D INCREMENT ? immetto **0.5, 1.0**, appare la schermata

M1	<4fL/D>1	D<4fL/D>	<4fL/D>2
0.5000	1.0691	1.0000	0.0691

AT STATE 2 THE MACH NUMBER IS 0.8037

T2/T1	P2/P1	PO2/PO1	RHO2/RHO1
0.9299	0.6000	0.7738	0.6452

STAGNATION TEMPERATURE IS CONSTANT FOR A FANNO FLOW

+++++

Da COMPQ, $\gamma=1.4$, immettendo l'opzione FA, e poi DA appare la schermata:

ENTER THE MACH NUMBER AND THE 4fL/D INCREMENT ? immetto **1.5, 0.1**, appare la schermata

M1	<4fL/D>1	D<4fL/D>	<4fL/D>2
1.5000	0.1361	0.1000	0.0361

AT STATE 2 THE MACH NUMBER IS 1.2084

T2/T1	P2/P1	PO2/PO1	RHO2/RHO1
1.1222	1.3150	0.8782	1.1717

STAGNATION TEMPERATURE IS CONSTANT FOR A FANNO FLOW



Esercizio 3.15

il Mach iniziale (sezione (1) di un condotto a sezione costante con attrito è di **0.2**, la pressione statica è **200** kPa e la temperatura è **300** K. il diametro del condotto è **0.1** m e il fattore di attrito di fanning è **0.005**. determina il Mach e le proprietà termodinamiche **50** metri più a valle.

determinare le condizioni di ristagno (isentropiche) alla sezione iniziale (1)

Da COMPQ, $\gamma=1.4$, opzione IS, caso M immettendo il valore $M_{(1)} = 0.2$ si ottiene la schermata:

MACH	T RATIO	P RATIO	A RATIO	IMPULSE RATIO
0.2000	0.9921	0.9725	2.9635	2.4004

le condizioni di ristagno nella sezione (1) sono:

$$T_{01} = T_1 / (T_1/T_{01}) = 300 / 0.9921 = 302.4 \quad \text{K}$$

$$p_{01} = p_1 / (p_1/p_{01}) = 200 / 0.9725 = 205.7 \quad \text{kPa}$$

Da COMPQ, $\gamma=1.4$, immettendo l'opzione **FA**, **M** appare la schermata:

ENTER THE MACH NUMBER? immetto 0.2 appare la schermata

THE MACH NUMBER IS	0.2000			
4fL/D	T/T*	P/P*	PO/PO*	RHO/RHO*
14.5333	1.1905	5.4554	2.9635	4.5826

il valore di $4fL/D$ da aggiungere alla condizione (1) è $4 \cdot 0.005 \cdot 50 / 0.1 = 10$

Da COMPQ, $\gamma=1.4$, immettendo l'opzione **FA**, e poi **DA** appare la schermata:

ENTER THE MACH NUMBER AND THE $4fL/D$ INCREMENT ? immetto **0.2, 10**, appare la schermata

M1	<4fL/D>1	D<4fL/D>	<4fL/D>2
0.2000	14.5333	10.000	4.5333

AT STATE 2 THE MACH NUMBER IS 0.3178

T2/T1	P2/P1	PO2/PO1	RHO2/RHO1
0.9880	0.6255	0.6524	0.6331

STAGNATION TEMPERATURE IS CONSTANT FOR A FANNO FLOW

da cui le proprietà alla sezione (2) sono:

$$\begin{aligned} M_2 &= 0.3178 \\ T_2 &= T_1 (T_2/T_1) = (300) (0.9880) = 296.4 \quad \text{K} \\ p_2 &= p_1 (p_2/p_1) = (200) (0.6255) = 125.1 \quad \text{kPa} \\ T_{02} &= T_{01} = 302.4 \quad \text{K} \\ p_{02} &= p_{01} (p_{02}/p_{01}) = (205.7) (0.6524) = 134.2 \quad \text{kPa} \end{aligned}$$

Nota la perdita di pressione di ristagno da (1) a (2) è $134.2 - 205.7 = -71.5 \quad \text{kPa}$



Esercizio 3.16

il Mach finale di un condotto a sezione costante con attrito è di **0.7**, la pressione statica è **150 kPa** e la temperatura è **300 K**. il diametro del condotto è **0.05 m** e il fattore di attrito di fanning è **0.004**. determina il Mach e le proprietà termodinamiche **25 metri** più a monte.

il problema è simile al precedente solo stavolta occorre risalire l'efflusso

il valore del $\Delta <4fL/D>$ è **negativo** : $(4) (0.004) (-25)/(0.05) = -8$

Da COMPQ, $\gamma=1.4$, immettendo l'opzione **FA**, e poi **DA** appare la schermata:

ENTER THE MACH NUMBER AND THE $4fL/D$ INCREMENT ? immetto **0.7, -7**, appare la schermata

M1	<4fL/D>1	D<4fL/D>	<4fL/D>2
0.7000	0.2081	-8.000	8.2081

AT STATE 2 THE MACH NUMBER IS 0.2533

T2/T1	P2/P1	PO2/PO1	RHO2/RHO1
1.0841	2.8770	2.1188	2.6538

STAGNATION TEMPERATURE IS CONSTANT FOR A FANNO FLOW

le proprietà alla sezione (2) si calcolano come nell'esempio precedente.



Esercizio 3.17

Plotta la curva di Fanno per un moto con $T_0=300$ K e pressione di ristagno iniziale di 100 kPa

Il Mach iniziale è 0.2

altri da saad pag. 212 e seg.



Esercizio 3.18

Aria scorre in un condotto avente un diametro interno di 0.1 m, in condizioni adiabatiche. $[D=\mathcal{D}]$

- Calcolare la lunghezza del condotto per far aumentare il Mach da 0.5 a 0.9 se $f_F=0.005$.

[5.273 m]



Esercizio 3.19

Aria scorre adiabaticamente in un condotto in cui vi è un oggetto con un coefficiente di resistenza, riferito alla sezione del condotto, di $C_D=1.0$.

Immediatamente si misura un Mach=0.5 e una pressione di 200 kPa.

Calcolare la caduta di pressione causata dall'oggetto [-57.4 kPa]



Esercizio 3.20

Si sta analizzando un razzo a propellente solido che presenta un condotto a sezione costante [*blast-tube*] nella gola dell'ugello. Siano:

diametro della gola = 0.075 m,

$p = 6.895$ mPa,

$T = 3333.3$ K,

$\gamma = 1.2$,

$\mathfrak{R}_{\text{gas}} = 322.82$ J/(kg-K),

$f = 0.005$

Determinare la riduzione di portata massica risultante da un *blast-tube* lungo 3 m, rispetto alla condizione di assenza dello stesso.

3.2.4 Soluzione dell'Onda d'Urto Normale come intersezione delle curve di Rayleigh e di Fanno

Abbiamo visto che l'Onda d'Urto Normale poteva esser considerata come un fenomeno che realizza una trasformazione termo-fluidodinamica in cui vi è una brusca conversione di energia cinetica in energia termodinamica.

Questa trasformazione è regolata dalle equazioni:

$$\text{Continuità:} \quad \rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 = G \quad (3.139)$$

$$\text{Quantità di Moto:} \quad p_1 + \rho_1 U_1^2 = p_2 + \rho_2 U_2^2 = I \quad (3.140)$$

$$\text{Energia:} \quad h_1 + \frac{U_1^2}{2} = h_2 + \frac{U_2^2}{2} = H_0 \quad (3.141)$$

Abbiamo anche visto che la curva di Rayleigh rappresentava stati termo-fluidodinamici regolati dalle seguenti equazioni:

$$\text{Continuità:} \quad \rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 = G \quad (3.142)$$

$$\text{Quantità di Moto:} \quad p_1 + \rho_1 U_1^2 = p_2 + \rho_2 U_2^2 = I \quad (3.143)$$

e che la curva di Fanno rappresentava stati termo-fluidodinamici regolati dalle seguenti equazioni:

$$\text{Continuità:} \quad \rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 = G \quad (3.144)$$

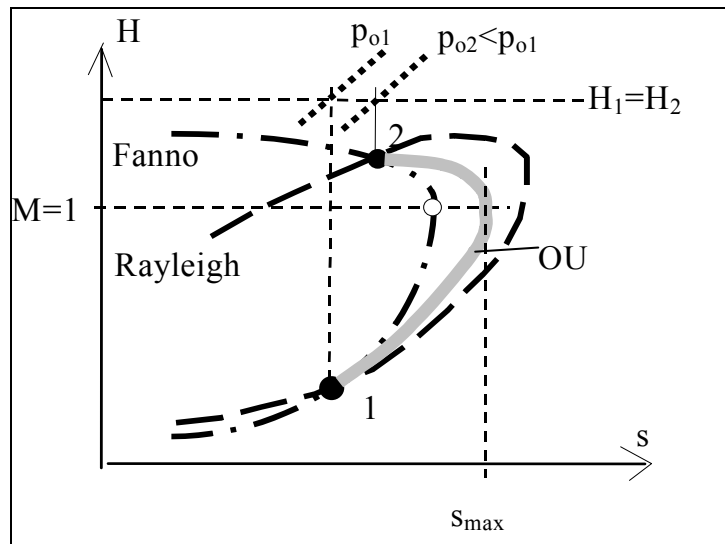
$$\text{Energia:} \quad h_1 + \frac{U_1^2}{2} = h_2 + \frac{U_2^2}{2} = H_0 \quad (3.145)$$

Ne consegue, abbastanza logicamente, che per uno stato a monte di un' Onda d'Urto Normale, condizioni iniziali (1), possiamo determinare le costanti "G", "H" ed "I".

Per le equazioni di bilancio tali costanti devono permanere nello stato (2) a valle dell' Onda d'Urto Normale.

Per cui se consideriamo la Curva di Rayleigh che passa per il punto (1) e quella di Fanno che passa per il punto (1), l'intersezione delle due curve soddisferà le condizioni richieste dall' Onda d'Urto Normale e quindi ne rappresenterà le condizioni a valle (2).

Tale ragionamento è illustrato nella figura.



Ma l'analisi della figura, in cui è stata tracciata, *ad arte*, una ipotetica curva che rappresenta l'OUN come *media* tra le curve di Fanno e di Rayleigh, può spiegare certe caratteristiche che si ritrovano nell'analisi della **struttura dell'OUN**.

Questo è un classico esercizio di integrazione delle Navier-Stokes unidimensionali complete tra lo stato a monte e quello a valle dell'OUN, che viene considerata non come una discontinuità ma come un regione continua sia pure di piccolo spessore (poche cammini liberi molecolari).

Nell'integrazione numerica si rivela che l'entropia, nel passare tra monte a valle, aumenta, presenta un massimo e poi diminuisce, per raggiungere a valle un valore maggiore di quello di partenza.

Proprio come si nota nella figura.

La spiegazione fisica è ardua per un numerico, agevole per un buon fluidodinamico.

Nell'OUN avvengono processi di conversione di energia (da cinetica ordinata, a termica disordinata) per mezzo di processi irreversibili.

- Fenomeni di attrito e di dissipazione fanno diminuire l'energia cinetica e fanno aumentare quella termica (Fanno) e quindi l'entropia.
- Fenomeni di scambio termico (Rayleigh) trasmettono energia tra gli strati interni dell'OUN (e quindi l'entropia) ma badano a che globalmente, l'OUN sia adiabatica.

Ovviamente il processo deve far diminuire il Mach, *in modo continuo*, da supersonico a subsonico, si deve quindi passare attraverso una condizione sonica ($M=1$) in cui (stante $G=\text{costante}$) deve essere necessariamente $ds=0$ ovvero s massima.



Esercizio 3.21

Iniziando da Mach 0.5 e successivamente da Mach 2.0, fluido $\gamma=1.4$:

diagramma nel piano $T/T_{0\text{iniziale}} - \Delta s$ fino a che non si verifichi strozzamento, i seguenti processi:

1. moto isentropico,
2. moto adiabatico con attrito in condotto con sezione costante
3. moto senza attrito con adduzione/sottrazione di calore in condotto a sezione costante

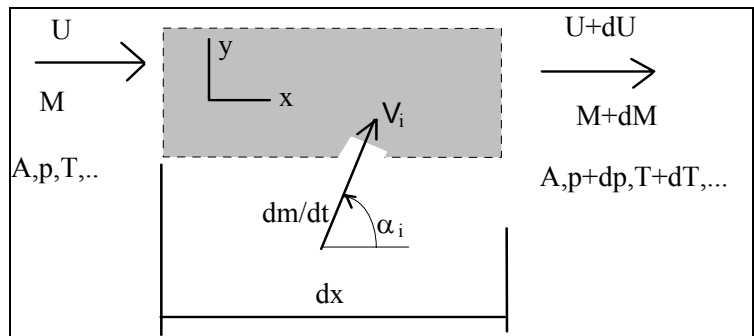


3.2.5 Moto unidimensionale con adduzione di massa

Nel caso sulle superfici del volume di controllo sia presente (vedi figura) una sola forza generalizzata costituita da adduzione/sottrazione di massa, le equazioni si modificano (forma integrale e forma differenziale) come:

Massa:

$$\dot{m} = \rho U A \quad (3.146)$$



in forma differenziale ($A=\text{cost.}$):

$$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = \frac{dp}{\rho} + \frac{dU}{U} + \frac{dA}{A} \quad (3.147)$$

QdM:

$$\dot{m}\Delta V + \Delta \dot{m}V - \dot{m}V_i \cos \alpha_i = -A\Delta p - \delta F_D - \tau_w A_w \quad (3.148)$$

in forma differenziale facendo uso della continuità

$$dp + \rho U dU + \rho U^2 \left(1 - \frac{V_i \cos \alpha_i}{U} \right) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0 \quad (3.149)$$

ovvero ponendo $\frac{V_i \cos \alpha_i}{U} = Y$ e ricordando che $\rho U^2 = \gamma p M^2$ si ricava:

$$\frac{dp}{p} + \gamma M^2 \frac{dU}{U} + \gamma M^2 (1 - Y) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0 \quad (3.150)$$

Energia:

$$\Delta H = \Delta \left(h + \frac{V^2}{2} \right) = - \frac{\dot{d}m}{\dot{m}} \left(h - h_i + \frac{V^2 - V_i^2}{2} \right) \quad (3.151)$$

Nel caso l'addizione di massa sia l'unica forza che modifica il moto, assumendo che la variazione di entalpia di ristagno sia pari a quella del fluido addizionato, e ponendo $\Psi = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$ ne discendono le seguenti relazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{M} &= \frac{(1+\gamma M^2)(1-Y)}{1-M^2} \Psi \frac{\dot{d}m}{\dot{m}} & V &= \frac{(1+\gamma M^2 - \gamma Y^2)}{1-M^2} \frac{\dot{d}m}{\dot{m}} \\ \frac{dT}{T} &= \frac{(\gamma-1)M^2(1+\gamma M^2)}{1-M^2} (1-Y) \frac{\dot{d}m}{\dot{m}} & \frac{dp}{\rho} &= - \frac{(\gamma+1)M^2}{1-M^2} (1-Y) \frac{\dot{d}m}{\dot{m}} \\ \frac{dp}{p} &= - \frac{\gamma M^2 [2\Psi(1-Y) + Y]}{1-M^2} \frac{\dot{d}m}{\dot{m}} & \frac{dp_o}{p_o} &= - \gamma M^2 (1-Y) \frac{\dot{d}m}{\dot{m}} \\ \frac{ds}{c_p} &= - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp_o}{p_o} = (\gamma-1)M^2 (1-Y) \frac{\dot{d}m}{\dot{m}} & \frac{dF}{F} &= Y \frac{\gamma M^2}{1+\gamma M^2} \frac{\dot{d}m}{\dot{m}} \end{aligned}$$

Da notare:

1. che quasi tutte le variazioni (tranne pressione e funzione impulso F) dipendono dal segno di (1-Y)
2. che vi sarà sempre un aumento della funzione impulso F se $Y \neq 0$ (si produce una forza opposta alla direzione del flusso)

Vi sono molte applicazioni di interesse in cui la massa viene addotta/sottratta normalmente alla direzione della corrente ($Y=0$) in questo caso le forme differenziali possono essere integrate per ottenere i seguenti rapporti di proprietà rispetto a quelle critiche ($M=1$):

$$\begin{aligned} \frac{\dot{m}}{\dot{m}^*} &= \frac{M \sqrt{2(1+\gamma) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)}}{1+\gamma M^2} & \frac{p}{p^*} &= \frac{(1+\gamma)}{1+\gamma M^2} & \frac{s-s^*}{R} &= \ln \left\{ \frac{p_o}{p_o^*} \right\} \\ \frac{\rho}{\rho^*} &= \frac{2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)}{1+\gamma M^2} & \frac{T}{T^*} &= \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{-1} \\ \frac{V}{a^*} &= M \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{-1/2} & \frac{p_o}{p_o^*} &= \frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2} \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \end{aligned}$$

Tabella riassuntiva scambio di massa (Y=0)

Notazione: $\psi = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$

Forma differenziali

Rapporti di proprietà

$$\begin{aligned} \frac{dM^2}{M^2} &= \frac{2(1+\gamma M^2)}{1-M^2} \Psi \left(\frac{\dot{dm}}{\dot{m}} \right) \\ \frac{dU}{U} &= \frac{1+\gamma M^2}{2(1-M^2)} \left(\frac{\dot{dm}}{\dot{m}} \right) \\ \frac{dT}{T} &= -\frac{(1+\gamma M^2)(\gamma-1)M^2}{2(1-M^2)} \left(\frac{\dot{dm}}{\dot{m}} \right) \\ \frac{d\rho}{\rho} &= -\frac{(\gamma+1)M^2}{2(1-M^2)} \left(\frac{\dot{dm}}{\dot{m}} \right) \\ \frac{dp}{p} &= -\frac{2\gamma M^2}{(1-M^2)} \Psi \left(\frac{\dot{dm}}{\dot{m}} \right) \\ \frac{dp_o}{p_o} &= -\gamma M^2 \left(\frac{\dot{dm}}{\dot{m}} \right) \\ \frac{dF}{F} &= \frac{dI}{I} = 0 \\ \frac{ds}{c_p} &= (\gamma-1)M^2 \left(\frac{\dot{dm}}{\dot{m}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{p^*} &= \frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2} \\ \frac{\rho}{\rho^*} &= \frac{2\Psi}{1+\gamma M^2} \\ \frac{T}{T^*} &= \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \Psi \right]^{-1} \\ \frac{U}{U^*} &= M \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \Psi \right]^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{p_o}{p_o^*} &= \frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2} \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \Psi \right]^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)}} \\ \frac{\Delta s}{c_p} &= \ln \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \Psi \right]^{-1} \left(\frac{1+\gamma M^2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\dot{m}}{\dot{m}^*} \right) = -\frac{M \sqrt{2(1+\gamma)} \Psi}{1+\gamma M^2}$$

$$A=A^*=costante$$

$$T_o=T_o^*=costante$$

$$F=F^*=I=I^*=costante$$

Le considerazioni da fare sul processo di addizione/sottrazione di massa ($Y=0$) sono rappresentabili nel piano adimensionale T-S riportato sotto.

Le condizioni soniche si raggiungono ovviamente nel punto di massima entropia.

Le condizioni subsoniche sono associate a stati con largo rapporto di entalpia, mentre quelli subsonici sono associati a basse entalpie termodinamiche.

A differenza con Fanno e Rayleigh, lo stato di ristagno ($V=M=0$) corrisponde ad una condizione con entropia finita.

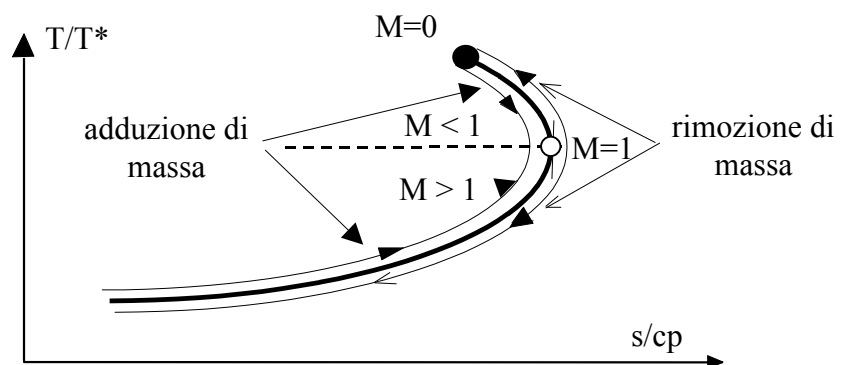
Le condizioni soniche possono essere superate soltanto variando l'addizione/sottrazione di massa.

In entrambi i regimi l'addizione di massa muove verso condizioni soniche; al contrario la sottrazione di massa allontana dalle condizioni soniche: il significato di $\dot{m}^*$ che ne discende è semplice: $\dot{m}^*$ è la portata per cui si realizza $M=1$, ovvero la massima possibile.

In teoria l'addizione/sottrazione di massa è una alternativa alla variazione di area per accelerare/ritardare un flusso.

Esempi di applicazioni: traspiration cooling, camera di combustione di razzi a propellente solido ecc...

Nel piano T-s la curva del moto con scambio di massa appare come a lato.



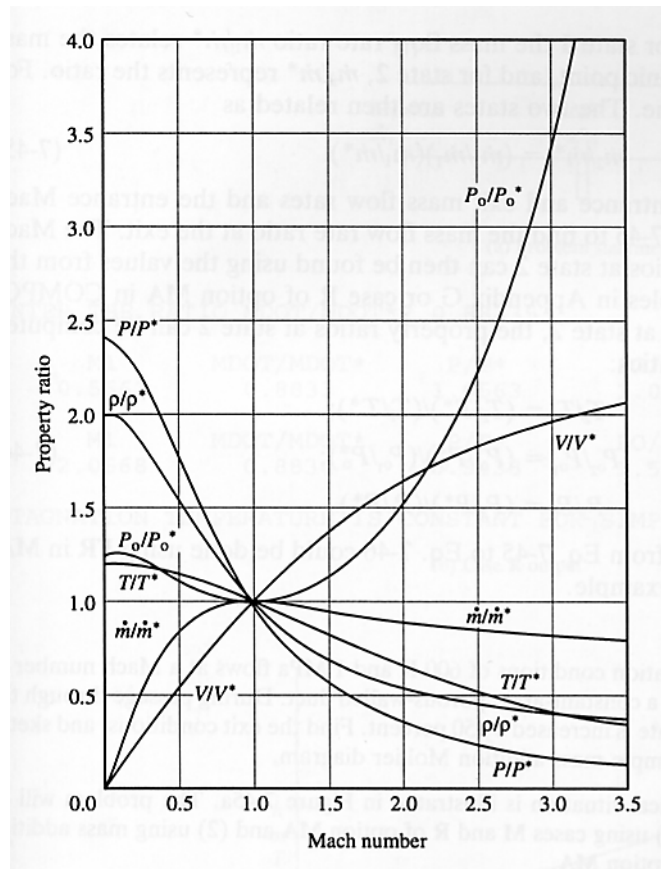
Nota: il rapporto $\dot{m}/\dot{m}^*$ è a doppio valore rispetto al mach. Ad ogni valore di $\dot{m}/\dot{m}^*$ corrispondono due valori di M, uno subsonico ed uno supersonico.

Uguagliando i due valori di $\dot{m}/\dot{m}^*$ per i due casi subsonico e supersonico si ottiene l'eguaglianza:

$$M_x \frac{\sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_x^2}}{1 + \gamma M_x^2} = M_y \frac{\sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_y^2}}{1 + \gamma M_y^2}$$

che corrisponde alla relazione che lega i Mach a monte ed a valle di un'OUN.

Il valore asintotico per M tendente ad infinito di $\dot{m}/\dot{m}^*$ è $\frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}$; che per l'aria vale 0.6985.



3.2.5.1 Applicazioni

L'uso di COMPQ dopo avere immesso il valore di γ , con La scelta del caso **MA** presenta il seguente menù:

```

FLOW WITH MASS ADDITION OR REMOVAL SELECTED,
INPUT PARAMETERS ARE:
    MACH NUMBER           M
    MDOT/MDOT*            R
    FLOW RATE CHANGE      FR
SELECT THE DESIRED LETTER(S)?

```

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, caso **MA**, immettendo l'opzione **M** risulta la seguente schermata:

ENTER THE MACH NUMBER? Immettendo **0.3** appare la seguente schermata:

M1	MDOT/MDOT*	P/P*	PO/PO*	RHO/RHO*	T/T*
0.3000	0.5889	2.1314	1.1985	1.8080	1.1788

STAGNATION TEMPERATURE IS CONSTANT FOR SIMPLE MASS ADDITION

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, caso **MA**, immettendo l'opzione **R** risulta la seguente schermata:

ENTER THE RATIO MDOT/MDOT*? Immettendo **0.88335** appare la seguente schermata:

M1	MDOT/MDOT*	P/P*	PO/PO*	RHO/RHO*	T/T*
0.5663	0.8833	1.6563	1.0877	1.4688	1.1277

M1	MDOT/MDOT*	P/P*	PO/PO*	RHO/RHO*	T/T*
2.0668	0.8834	0.3438	1.5771	0.5313	0.6471

STAGNATION TEMPERATURE IS CONSTANT FOR SIMPLE MASS ADDITION

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, caso **MA**, immettendo l'opzione **FR** risulta la seguente schermata:

ENTER THE RATIO MACH NUMBER AND MDOT2/MDOT1?

Immettendo **0.3 , 1.5** appare la seguente schermata:

M1	m2/m1	(m/m*)1	(m/m*)2	
0.3000	1.5000	0.5889	0.8834	
M2	P2/P1	PO2/PO1	T2/T1	RHO2/RHO1
0.5665	0.7770	0.9075	0.9566	0.8122

STAGNATION TEMPERATURE IS CONSTANT FOR SIMPLE MASS ADDITION



Esempio 3.14

Aria con condizioni di ristagno iniziali di 600 K e 1 MPa entra a Mach 0.3 in un condotto poroso a sezione costante. Durante il passaggio la portata massica della corrente aumenta del 50%. Determinare le condizioni di uscita e mostra sul diagramma di Mollier il processo

Il rapporto m_2/m_1 è $(1.5)/(1) = 1.5$

Le condizioni statiche all'ingresso si determinano dall'isentropica:

$$T_1 = (T_1/T_{01}) (T_{01}) = (0.9863)(600) = 589.4 \text{ K}$$

$$p_1 = (p_1/p_{01}) (p_{01}) = (0.9395)(1) = 939.5 \text{ kPa}$$

Da **COMPQ**, $\gamma=1.4$, caso **MA**, immettendo l'opzione **FR** risulta la seguente schermata:

ENTER THE RATIO MACH NUMBER AND MDOT2/MDOT1? Immettendo **0.3,1.5** appare la seguente schermata:

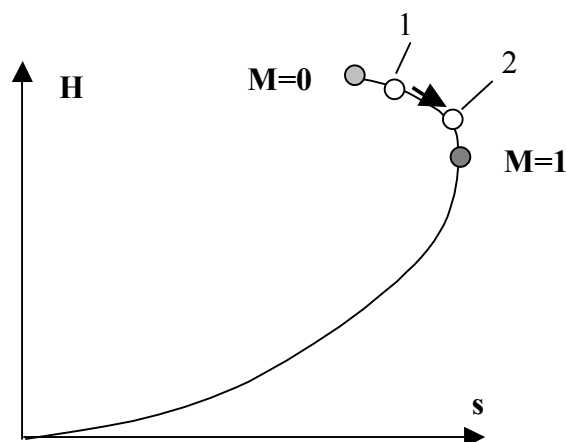
M1	m2/m1	(m/m*)1	(m/m*)2
0.3000	1.5000	0.5889	0.8834

M2	P2/P1	PO2/PO1	T2/T1	RHO2/RHO1
0.5665	0.7770	0.9075	0.9566	0.8122

STAGNATION TEMPERATURE IS CONSTANT FOR SIMPLE MASS ADDITION

I dati all'uscita sono:

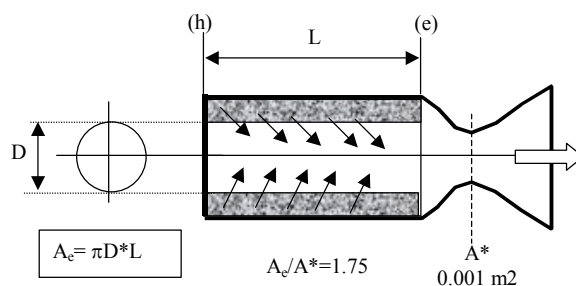
$$\begin{aligned} M_2 &= 0.5663 \\ T_{O1} &= T_{O2} = 600 \text{ K} \\ T_2 &= (T_2/T_1) (T_1) = (0.95660)(589.4) = 563.9 \text{ K} \\ p_{O2} &= (p_{O2}/p_{O1}) (p_{O1}) = (0.9075)(1) = 0.9075 \text{ MPa} \\ p_{O2} &= (p_{O2}/p_1) (p_1) = (0.7770)(0.9395) = 0.7301 \text{ MPa} \end{aligned}$$



Esempio 3.15

Un razzo a propellente solido come in figura ha una portata massica di 5 kg/s
Con i dati di tabella per il gas, determinare:
il Me, la $p_{o,e}$ la p_h - p_e .

proprietà	valore	unità
γ	1.26	---
Peso molecolare	22.0	Kg/(kg-mole)
Temperatura di ristagno	4000	K
Costante del gas	337.9	J/(kg-K)



Nel problema sono assegnate: l'area di gola, la temperatura di ristagno e la portata massica.

Risolvendo la (...) per la pressione di ristagno si ricava la $p_o(e)$:

$$p_{o,e} = \dot{m} \sqrt{\frac{\mathcal{R}_{gas}}{\gamma}} \dots \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{\sqrt{T_o}}{A^*} \quad \equiv \quad 9.5801 \quad \text{MPa}$$

Da COMPQ caso isentropico IS opzione rapporto delle aree A immettendo $A/A^*=1.75$ si ricava:

$$M_e = 0.3615$$

Da COMPQ caso MA opzione M immettendo $M_e = 0.3615$ Si ricava: $p_{oe}/p_o^* = 1.1645$

da cui: $p_o^* = 0.82268 \text{ mPa} = p_{oh}$ poiché p_o è costante

Calcolo le condizione alla sezione (head-end) dove $\dot{m}=0$

Da COMPQ caso MA opzione R immettendo $\dot{m}=0$ Si ricava $p_{0h}/p_0^*=1.2499$

Da cui: $p_{oh}=10.2826 \text{ [Mpa]}=p_h$ poiché $U=\dot{m}=0$ sulla parete solida di testa

Dall'isentropica mi calcolo la pressione statica alla sezione (e):

Da COMPQ caso IS opzione M immettendo $Me=0.3615$ ricavo $p_e/p_{oe}=0.9216$
 Da cui ricavo $p_e = (9.58) (9.216) = 8.896 \text{ MPa}$

La variazione di pressione statica è quindi: $\Delta p_o = p_e - p_h = 8.8296 - 10.2826 = -1.4537 \text{ MPa}$

(perdita del 14% di pressione tra testa ed uscita del grano)

3.2.6 Moti unidimensionali isotermi con attrito

Il moto di un gas in un oleodotto interrato è il classico problema che motiva la risoluzione di questo moto.

E' da rilevare che tale tipo di moto è difficilmente credibile per la parte supersonica, per la quale la temperatura di parete è funzione, tramite il fattore di recupero, della temperatura di ristagno [tali concetti saranno analizzati nell'ambito dello strato limite compressibile], per cui si ritrova una illogicità.

Le equazioni sono le stesse di quelle di Fanno con la sola differenza che stavolta non è costante l'entalpia di ristagno, ma la temperatura statica $T=T_c$.

Ne risulta che rapportando la definizione di temperatura di ristagno tra due stati (1) e (2) risulta:

$$\frac{T_{o2}}{T_{o1}} = \frac{T_c \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)}{T_c \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)} \quad (3.152)$$

Rapportando l'equazione di stato:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 R T_c}{\rho_1 R T_c} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \stackrel{\text{Continuità}}{=} \frac{U_1}{U_2} \stackrel{\substack{T=\text{cost.} \\ a=\text{cost.}}}{=} \frac{M_1}{M_2} \quad (3.153)$$

Rapportando le definizioni di pressioni di ristagno:

$$\frac{p_{o2}}{p_{o1}} = \frac{p_2}{p_1} \left[\frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.154)$$

Rapportando le definizioni della funzione impulso:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{(1 + \gamma M_2^2)}{(1 + \gamma M_1^2)} = \frac{M_1}{M_2} \frac{(1 + \gamma M_2^2)}{(1 + \gamma M_1^2)} \quad (3.155)$$

Per l'entropia usando le condizioni statiche:

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \gamma \ln \left[\frac{T_2}{T_1} \right] - (\gamma - 1) \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \right] = (\gamma - 1) \ln \left[\frac{M_2}{M_1} \right] \quad (3.156)$$

Il collegamento con il parametro d'attrito deve venire necessariamente dall'equazione di equilibrio:

$$(p_2 - p_1) + (\rho_1 U_1^2 - \rho_1 U_2^2) = -\frac{4}{D} \int_0^L \tau_w dx \quad (3.157)$$

Che in forma differenziale diventa:

$$dp + d(\rho U^2) = -\frac{4}{D} \tau_w dx \quad (3.158)$$

ovvero:

$$dp + d(gU) = dp + g dU = dp + \rho U dU = -\frac{4}{D} \tau_w dx \quad (3.159)$$

definendo: $f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2}$ abbiamo:

$$dp + \rho U dU = -\frac{1}{2} \rho U^2 \left(\frac{4f dx}{D} \right) \quad (3.160)$$

Ma dall' equazione di stato e dalla continuità risulta:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dU}{U} = -\frac{dM}{M} = -\frac{1}{2} \frac{dM^2}{M^2} \quad (3.161)$$

per cui ponendo tutto in termini di p e M si ha:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma M^2}{2(1-\gamma M^2)} \left(\frac{4f dx}{D} \right) \quad (3.162)$$

ovvero ponendo tutto in termini di M^2 si ha:

$$\left(\frac{4f dx}{D} \right) = \frac{(1-\gamma M^2)}{\gamma M^4} dM^2 \quad (3.163)$$

Questa può essere integrata tra l'origine ed il punto in cui si realizza il massimo flusso di massa.

Il massimo flusso di massa si ritrova nella sezione in cui si realizza la massima ascissa curvilinea senza alterare le condizione a monte, cioè laddove l'ascissa "x" è la massima possibile; differenziando la (3.162):

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2pD}{4f} \frac{(1-\gamma M^2)}{\gamma M^2} = 0 \quad (3.164)$$

Questo si realizza per

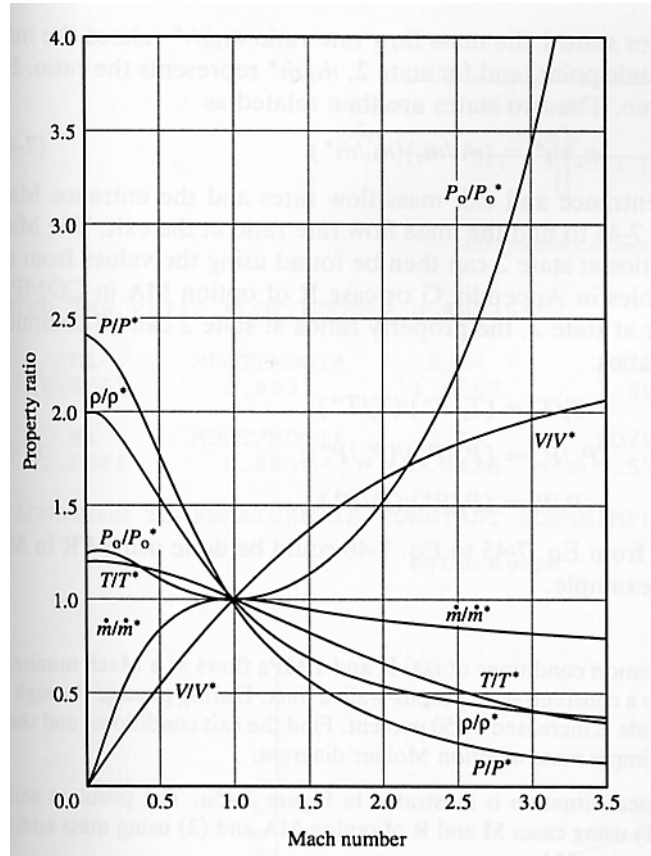
$$M = \sqrt{1/\gamma} \quad (3.165)$$

I limiti di integrazione sono allora:

$$\int_0^{L_{\max}} \frac{4f}{D} dx = \int_{M^2}^{1/\gamma} \frac{(1-\gamma M^2)}{\gamma M^4} dM^2 \quad (3.166)$$

per dare:

$$\frac{4fL_{\max}}{D} = \frac{(1-\gamma M^2)}{\gamma M^2} + \ln(\gamma M^2) \quad (3.167)$$



Denotando con l'apice " * " le proprietà a

$M = 1/\sqrt{\gamma}$ si ottengono i rapporti:

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{p}{p^*} = \frac{V^*}{V} = \frac{1}{M\sqrt{\gamma}}$$

$$\frac{p_o}{p_o^*} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{2\gamma}{3\gamma-1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{M}$$

$$\frac{T_o}{T_o^*} = \frac{2\gamma}{3\gamma-1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$$

$$\frac{F}{F^*} = \frac{1 + \gamma M^2}{2M\sqrt{\gamma}}$$

$$\frac{s^* - s}{c_v} = (\gamma - 1) \ln \left[\frac{1}{M\sqrt{\gamma}} \right]$$

I valori di questi rapporti sono riportati nei diagrammi della figura a lato.

Dall'esame delle relazioni appaiono i seguenti andamenti:

	$M < 1/\sqrt{\gamma}$ (subsonico)	$M > 1/\sqrt{\gamma}$ (supersonico)
Pressione	diminuisce	aumenta
Densità	diminuisce	aumenta
Velocità	aumenta	diminuisce
Numero di Mach	aumenta	diminuisce
Temperatura di ristagno	aumenta	diminuisce
Pressione di ristagno	diminuisce	$\begin{cases} \text{aumenta per } M < \sqrt{2/(\gamma+1)} \\ \text{diminuisce per } M > \sqrt{2/(\gamma+1)} \end{cases}$

In pratica il Numero di Mach tende sempre verso il valore limite di $M = 1/\sqrt{\gamma}$, che rappresenta per i moti isotermi quello che $M=1$ rappresentava per Fanno.

- Nelle zone dove $M < 1/\sqrt{\gamma}$ si deve **fornire calore alla corrente** affinché si mantenga isoterma.
- Nelle zone dove $M > 1/\sqrt{\gamma}$ si deve **sottrarre calore alla corrente** affinché si mantenga isoterma.

Tabella riassuntiva isoterma con attrito

Notazioni: $\frac{dT}{T} = -\frac{\gamma(\gamma-1)M^4}{2(1-M^2)} \left(4f_F \frac{dx}{D} \right)$, f_F = coefficiente di Fanning, D : diametro idraulico

Forma differenziali

Rapporti di proprietà

$$\begin{aligned} \frac{dM^2}{M^2} &= \frac{\gamma M^2}{2(1-M^2)} \left(4f_F \frac{dx}{D} \right) & \frac{p}{p^*} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma} M} \\ \frac{dT_o}{T_o} &= -\frac{\gamma(\gamma-1)M^4}{2(1-\gamma M^2)\Psi} \left(4f_F \frac{dx}{D} \right) & \frac{\rho}{\rho^*} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma} M} \\ \frac{dp_o}{p_o} &= \frac{\gamma M^2 \Psi}{2(\gamma M^2 - 1) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)} \left(4f_F \frac{dx}{D} \right) & \frac{T_o}{T_o^*} &= \left(\frac{2\gamma}{3\gamma-1} \right) \Psi \\ \frac{ds}{c_p} &= -\frac{(\gamma-1)M^2}{2(1-\gamma M^2)} \left(4f_F \frac{dx}{D} \right) & \frac{U}{U^*} &= \sqrt{\gamma} M \\ \frac{dQ}{c_p} &= -\frac{\gamma(\gamma-1)M^4}{2(1-\gamma M^2)\Psi} \left(4f_F \frac{dx}{D} \right) & \frac{p_o}{p_o^*} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma} M} \left[\left(\frac{2\gamma}{3\gamma+1} \right) \Psi \right]^{\frac{\gamma}{(\gamma-1)}} \\ & & \frac{I}{I^*} &= \frac{F}{F^*} = \frac{1+\gamma M^2}{2\sqrt{\gamma} M} \\ & & \left(4f_F \frac{L^*}{D} \right) &= \frac{1-\gamma M^2}{\gamma M^2} + \ln[\gamma M^2] \\ & & A &= A^* = \text{costante} \\ & & T &= T^* = \text{costante} \\ & & \dot{m} &= \dot{m}^* = \text{costante} \end{aligned}$$

.3.2.6.1 Applicazioni

Da COMPQ l'opzione **PL** fornisce le tabelle virtuali che usano il fattore di fanning $f_{\text{Fanning}} = \frac{\tau_{\text{wall}}}{\frac{1}{2}\rho U^2}$

vi sono 3 casi:

- il caso **M** richiede l'input del numero di Mach
- il caso **F** richiede l'input del fattore $4f_F L/D$
- il caso **DA** richiede l'input del Mach iniziale e l'incremento di $4f_F L/D$



Da COMPQ, $\gamma=1.4$, immettendo l'opzione **PL**, appare la di schermata:

```
FANNO FLOW SELECTED
INPUT PARAMETERS ARE:
  MACH NUMBER          M
  4fL/D                 F
  DUCT ADDITION         DA
THE FANNING FRICTION FACTOR IS USED IN ALL FANNO COMPUTATION
```

ENTER THE DESIRED LETTER(S) ?

immetto **M** appare la schermata:

ENTER THE MACH NUMBER? immetto **0.3** appare la schermata

M	P/P*	TO/TO*	PO/PO*	4FL/D	T/T*
0.3000	2.8172	0.8907	1.8791	4.8650	1.0000



Da COMPQ, $\gamma=1.4$, immettendo l'opzione **PL**, e poi **DA** appare la di schermata:

ENTER THE MACH NUMBER AND THE 4fL/D INCREMENT ? immetto **0.2, 10.**, appare la schermata

M1	<4fL/D>1	D<4fL/D>	<4fL/D>2
0.2000	13.9743	10.000	3.9747

AT STATE 2 THE MACH NUMBER IS 0.8037

T2/T1	TO2/TO1	P2/P1	PO2/PO1	RHO2/RHO1
1.000	1.0126	0.6219	0.6498	0.6219



Esempio 3.16

Gas metano entra in un gasdotto a $M=0.05$ e $p=30$ psia, $T=520$ R

Trovare le condizioni dopo $4fL/D = 250$

Quali le variazioni nella temperatura di ristagno e nella pressione di ristagno?

Le condizioni di ristagno all'ingresso si determinino dall'isentropica.

Da COMPQ caso IS opzione M immettendo 0.05 si ricava $T_1/T_{01}=0.9996$ $p_1/p_{01}=0.9984$

Da cui:

$$\begin{aligned} T_{01} &= (T_1) / (T_1/T_{01}) = (520)/(0.9996) = 520.21 \quad \text{R} \\ p_{01} &= (p_1) / (p_1/p_{01}) = (30)/(0.9984) = 30.048 \quad \text{psia} \end{aligned}$$

Da COMPQ, $\gamma=1.4$, immettendo l'opzione **PL**, e poi **DA** appare la di schermata:

ENTER THE MACH NUMBER AND THE 4fL/D INCREMENT ? immetto **0.05, 250.**, appare la schermata

M1	<4fL/D>1	D<4fL/D>	<4fL/D>2
0.05000	296.3164	250.0000	46.3164

AT STATE 2 THE MACH NUMBER IS 0.8037

T2/T1	TO2/TO1	P2/P1	PO2/PO1	RHO2/RHO1
1.000	1.0020	0.4113	0.4146	0.4113

ne discende:

$$\begin{aligned} T_2 &= 520 \text{ R} \\ T_{02} &= (T_{02}/T_{01})(T_{01}) = (1.0020)(520.21) = 521.25 \text{ R} \\ p_{02} &= (p_{02}/p_{01})(p_{01}) = (0.4146)(30.048) = 12.455 \text{ psia} \\ p_2 &= (p_2/p_1)(p_1) = (0.4113)(30.00) = 12.333 \text{ psia} \end{aligned}$$



Esercizio 3.22

Gas metano entra in un gasdotto avente un diametro di 1 ft e lungo 25000 ft, interrato, la cui temperatura è costante e pari a $T=55$ °F.

All'ingresso la velocità media è 50 ft/s e la pressione statica è 2 psia.

Il gasdotto è ultra liscio (Hint: devi usare l'abaco di Moody (appendice B) per trovare f_l)

Trovare le condizioni di uscita

$$[M_2=0.05 \quad T_2=515 \text{ R} \quad , \quad T_{02}=515.1 \quad , \quad p_2=17.07 \quad , \quad p_{02}=17.9]$$

3.3 MOTI GENERALIZZATI

Finora abbiamo considerato moti quasi-unidimensionali semplici.

Moti cioè in cui la *driving force* è una sola delle quantità:

- $dA/A =$ variazione di Area
- $dT_o/T_o =$ variazione di entalpia totale (Rayleigh)
- $4fL/D =$ attrito alla parete (Fanno); estendibile alla presenza di una resistenza concentrata
"4 $f L/D + 2 F_D / \gamma M^2 p A$ "
- $\dot{dm}/m =$ adduzione di massa.

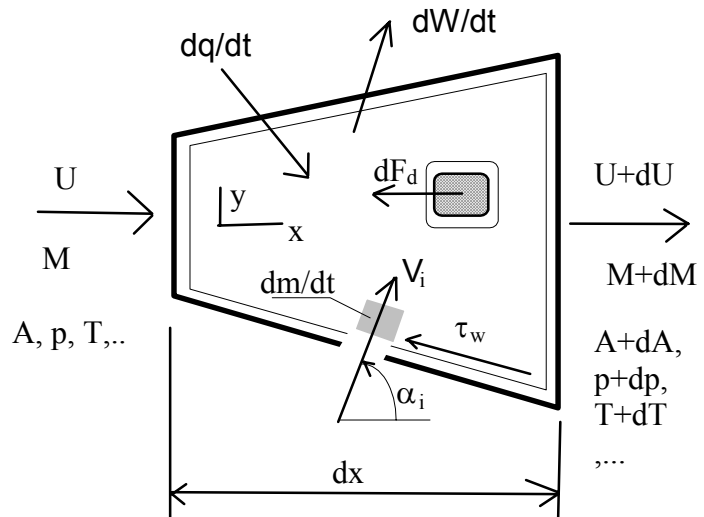
In situazioni di reale interesse però potranno essere simultaneamente presenti più di una sola *driving force*, come per il volume di controllo della figura a lato.

Vogliamo vedere come è possibile risolvere tali problemi.

Supponiamo condizioni di:

- moto quasi unidimensionale e stazionario
- continuità delle *driving forces* e delle variabili termofluidodinamiche rispetto alla variabile assiale "x"

Nelle analisi fatte nel capitolo 3, abbiamo ricavato delle relazioni che esprimevano i differenziali logaritmici dei parametri del moto quasi-unidimensionale in termini di queste *driving forces*.



Con le notazioni:

$$dE = -\frac{\gamma M^2}{2} \left(4f_F \frac{dx}{D} + 2 dC_D \frac{S}{A} \right) ; \quad R = \frac{V_i \cos \alpha_i}{U} \quad (3.168)$$

$$F = -\gamma M^2 (1 - R) \frac{\dot{dm}}{m} ; \quad \Psi = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Nota: D è il diametro equivalente del condotto, e nel seguito con "I" si indica la funzione impulso.

Tutte queste relazioni possono essere messe in una singola equazione lineare espressa in forma matriciale come:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \gamma M^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\gamma-1}{2} M^2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma M^2}{1+\gamma M^2} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma M^2}{2\Psi} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp/p \\ d\rho/\rho \\ dT/T \\ dU/U \\ \frac{dM^2}{M^2} \\ \frac{dp_o}{p_o} \\ \frac{dI}{I} \\ \frac{ds}{c_v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dm/m - dA/A \\ E+F \\ \frac{dT_o}{T_o} \\ \frac{dA}{A} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.169)$$

Questo sistema può essere invertito per fornire:

$$\begin{bmatrix} \frac{dp}{p} \\ \frac{d\rho}{\rho} \\ \frac{dT}{T} \\ \frac{dU}{U} \\ \frac{dM^2}{M^2} \\ \frac{dp_o}{p_o} \\ \frac{dI}{I} \\ \frac{ds}{c_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma M^2}{\gamma M^2 - 1} & -\frac{\gamma(\gamma-1)M^4}{2(M^2-1)} & \frac{\gamma M^2}{\gamma M^2 - 1} & -\frac{1+M^2(\gamma-1)}{M^2-1} & \frac{\gamma M^2 \Psi}{M^2-1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{M^2-1} & -\frac{(\gamma-1)M^2}{2(M^2-1)} & \frac{M^2}{M^2-1} & -\frac{1}{M^2-1} & \frac{\gamma M^2}{1+\gamma M^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\gamma-1)M^2}{M^2-1} & -\frac{(\gamma-1)M^2(\gamma M^2-1)}{2(M^2-1)} & \frac{(\gamma-1)M^2}{M^2-1} & -\frac{(\gamma-1)M^2}{M^2-1} & \frac{(\gamma M^2-1)\Psi}{2(M^2-1)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{M^2-1} & \frac{(\gamma-1)M^2}{2(M^2-1)} & -\frac{1}{M^2-1} & \frac{1}{M^2-1} & -\frac{\Psi}{M^2-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2\Psi}{M^2-1} & \frac{(\gamma M^2-1)\Psi}{2(M^2-1)} & -\frac{2\Psi}{M^2-1} & \frac{2\Psi}{M^2-1} & \frac{(\gamma M^2+1)\Psi}{M^2-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma M^2}{2^2} & 0 & 1 & -\frac{\gamma M^2}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma M^2}{1+\gamma M^2} & \frac{\gamma M^2}{1+\gamma M^2} & \frac{\gamma M^2}{1+\gamma M^2} & \frac{1}{1+\gamma M^2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(\gamma-1)M^2}{2} & 0 & -\frac{\gamma-1}{\gamma} & \Psi & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{dm}{m} - \frac{dA}{A} \\ E+F \\ \frac{dT_o}{T_o} \\ \frac{dA}{A} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.170)$$

Questo rappresenta un sistema di otto equazioni differenziali per le otto incognite del problema espresse in termini delle 4 driving forces.

Le espressioni che compaiono nei coefficienti della matrice, sono termini funzione di Mach e di γ .

Poichè la variabile indipendente sarà, ad es., l'ascissa "x" queste rappresentano 8 equazioni differenziali del primo ordine da essere risolto ad esempio con Runge Kutta.

Siccome le *driving forces* sono solo 4, si preferisce scindere la risoluzione del problema in termini dei cosiddetti **coefficienti di influenza** (elementi della matrice) relativamente alle solo 4 *driving forces*.

Nella tabella che segue sono inclusi anche i coefficienti di influenza derivanti dalle variazioni della massa molecolare m e dal rapporto dei calori specifici γ (derivanti da reazioni chimico - fisico)

	$\frac{dA}{A}$	$-\frac{2(dE)}{\gamma M^2}$	$\frac{dT_o}{T_o}$	$\frac{\dot{dm}}{\dot{m}}$	$\frac{dm}{m}$	$\frac{d\gamma}{\gamma}$
$\frac{dM^2}{M^2}$	$-\frac{2\Psi}{1-M^2}$	$\frac{\gamma M^2 \Psi}{1-M^2}$	$\frac{(1+\gamma M^2)\Psi}{1-M^2}$	$\frac{2\Psi[(1+\gamma M^2) - R\gamma M^2]}{1-M^2}$	$-\frac{(1+\gamma M^2)}{1-M^2}$	-1
$\frac{dp}{p}$	$\frac{\gamma M^2}{1-M^2}$	$-\frac{\gamma M^2[1+(\gamma-1)]}{2(1-M^2)}$	$-\frac{\gamma M^2 \Psi}{1-M^2}$	$-\frac{\gamma M^2[2\Psi(1-R) + R]}{1-M^2}$	$\frac{\gamma M^2}{2(1-M^2)}$	0
$\frac{d\rho}{\rho}$	$\frac{M^2}{1-M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2(1-M^2)}$	$-\frac{\Psi}{1-M^2}$	$-\frac{[(1+\gamma)M^2 - R\gamma M^2]}{1-M^2}$	$\frac{1}{1-M^2}$	0
$\frac{dT}{T}$	$\frac{(\gamma-1)M^2}{1-M^2}$	$-\frac{\gamma(\gamma-1)M^2}{2(1-M^2)}$	$\frac{(1-\gamma M^2)\Psi}{1-M^2}$	$-\frac{(\gamma-1)M^2[(1+\gamma M^2) - R\gamma M^2]}{1-M^2}$	$\frac{(\gamma-1)M^2}{1-M^2}$	0
$\frac{dU}{U}$	$-\frac{1}{1-M^2}$	$\frac{\gamma M^2}{2(1-M^2)}$	$\frac{\Psi}{1-M^2}$	$\frac{[(1+\gamma M^2) - R\gamma M^2]}{1-M^2}$	$-\frac{1}{1-M^2}$	0
$\frac{dp_o}{p_o}$	0	$-\frac{\gamma M^2}{2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2}$	$-\gamma M^2(1-R)$	$-\frac{(1+\gamma M^2)}{1-M^2} \left(1 + \frac{\gamma}{2\Psi}\right)$	$-\frac{\gamma}{2\Psi}$
$\frac{ds}{c_p}$	0	$\frac{(\gamma-1)M^2}{2}$	Ψ	$(\gamma-1)M^2(1-R)$	0	0

I coefficienti di influenza sono utilizzabili per scrivere le equazioni differenziali che consentono la risoluzione di moti generalizzati.

Ad esempio per ottenere la variazione del Mach, in un problema in cui sono presenti tutte le *driving forces* (note con l'ascissa x), occorre risolvere l'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} \frac{dM^2}{dx} = M^2 \left\{ -\frac{2\Psi}{1-M^2} \frac{1}{A(x)} \frac{dA}{dx} + \frac{\gamma M^2 \Psi}{1-M^2} \left[\left(\frac{4}{D} \right) f(x) + \frac{2}{\gamma M^2 p A(x)} \frac{dF}{dx} \right] \right. \\ \left. + \frac{(1+\gamma M^2)\Psi}{1-M^2} \frac{1}{T_o(x)} \frac{dT_o}{dx} + \frac{2\Psi[(1+\gamma M^2) - R\gamma M^2]}{1-M^2} \frac{1}{\dot{m}(x)} \frac{\dot{dm}}{dx} + \frac{(1+\gamma M^2)}{1-M^2} \frac{dm}{m} - \frac{d\gamma}{\gamma} \right\} \end{aligned} \quad (3.171)$$

che può essere risolta con una qualsiasi routine di integrazione (i.e. Runge Kutta) a partire dal valore iniziale noto del Mach ad $x=0$.

L'integrazione delle equazioni non presenta difficoltà, se non in condizioni soniche ($M=1$) in cui il termine a destra dell'equazione va all'infinito.

Per descrivere gli andamenti e per vedere come ovviare al problema delle condizioni soniche, riscriviamo l'equazione come:

$$\frac{dM^2}{dx} = \frac{G(x)}{1-M^2} \quad (3.172)$$

dove abbiamo posto:

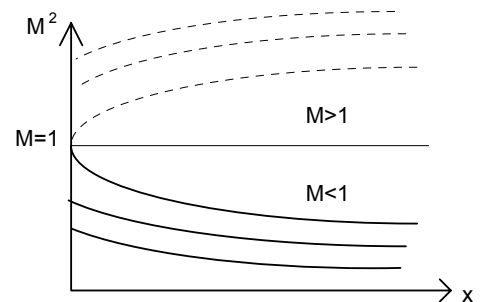
$$\begin{aligned}
 G(x) = M^2 \left\{ -2\Psi \frac{1}{A(x)} \frac{dA}{dx} + \gamma M^2 \Psi \left[\left(\frac{4}{D} \right) f(x) + \frac{2}{\gamma M^2 p A(x)} \frac{dF}{dx} \right] \right. \\
 \left. + (1 + \gamma M^2) \Psi \frac{1}{T_0(x)} \frac{dT_0}{dx} + 2\Psi \left[(1 + \gamma M^2) - R\gamma M^2 \right] \frac{1}{m(x)} \frac{dm}{dx} + \frac{(1 + \gamma M^2)}{1 - M^2} \frac{dm}{m} - \frac{d\gamma}{\gamma} \right\}
 \end{aligned}
 \quad (3.173)$$

Dall'esame di questa equazione vediamo che il numero di Mach varia a seconda delle condizioni riportate nella tabella che segue:

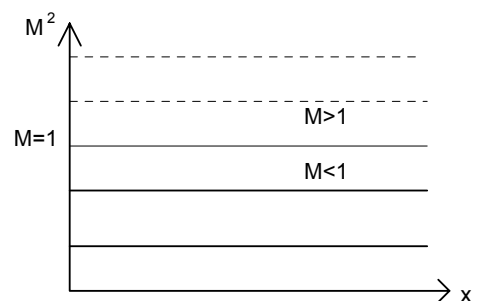
	$M < 1$	$M = 1$	$M > 1$
$G < 0$	diminuisce	infinito	aumenta
$G = 0$	costante	indeterminato	costante
$G > 0$	aumenta	infinito	diminuisce

Consideriamo ora le varie possibilità.

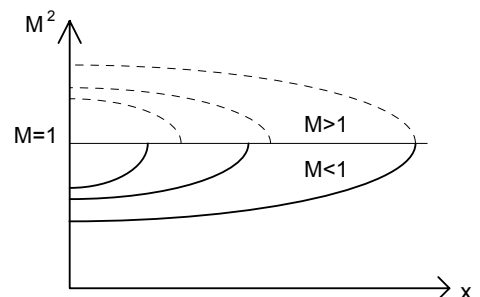
Caso 1: G sempre negativa; se il flusso è inizialmente subsonico, il M diminuisce, se inizialmente supersonico M aumenta.



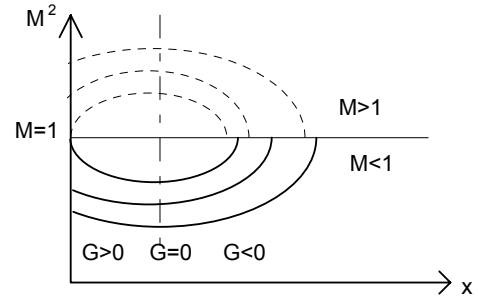
Caso 2: G sempre nullo; il M rimane costante e pari a quello iniziale, sia per condizioni subsoniche che per condizioni supersoniche.



Caso 3: G sempre positiva; se il flusso è inizialmente subsonico, il M aumenta, se inizialmente supersonico M diminuisce. In pratica il flusso tenderà sempre alle condizioni soniche dove si verificherà il fenomeno dello strozzamento (che sarà discusso in seguito).

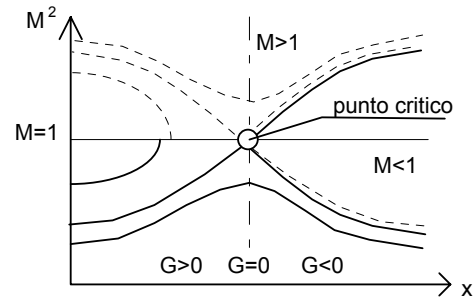


Caso 4: G cambia da positiva a negativa; se il flusso è inizialmente subsonico, M prima decresce, passa per un minimo in cui è $G=0$ e poi aumenta fino alle condizioni critiche (dove si verifica lo strozzamento). Se il flusso è inizialmente supersonico M prima aumenta, raggiunge un massimo a $G=0$, poi diminuisce fino alle condizioni critiche (dove si verifica lo strozzamento).



Caso 5: G cambia da positiva a negativa; in questo caso discutiamo solo un flusso inizialmente subsonico (che è di più reale interesse), per quello inizialmente supersonico ovviamente gli andamenti si invertiranno:

- se il Mach iniziale è sufficientemente basso, M prima aumenta, passa per un massimo e poi diminuisce.
- se il Mach è sufficientemente alto, M aumenta fino a $M=1$ (strozzamento) dopo di che non può più continuare.
- se Mach è tale che si raggiungono le condizioni critiche ($M=1$) proprio laddove è $G=0$ il flusso può continuare in condizioni supersoniche



Passaggio attraverso le condizioni soniche

Esaminando l'equazione:

$$\frac{dM^2}{dx} = \frac{G(x)}{1 - M^2} \quad (3.174)$$

Notiamo che se le condizioni soniche ($M=1$) si devono necessariamente realizzare ad una ascissa x^* per la quale $G(x^*)=0$. In tale sezione si verifica, quindi, una forma indeterminata ($0/0$) che deve assumere un valore finito per permettere la continuazione del flusso; questo continuerà in super/sub-sonico a seconda della singolarità.

La singolarità sonica ($0/0$) può essere esaminata con la regola di L'Hopital che fornisce:

$$\left(\frac{dM^2}{dx} \right)^* = \left\{ \frac{d[G(x)]/dx}{d[1 - M^2]/dx} \right\}^* = \frac{[G'(x^*)]}{-d[M^2(x^*)]/dx} \quad (3.175)$$

Per cui, nel punto critico, conviene sostituire all'equazione originaria (3.174) la forma derivata dalla (3.175):

$$\left(\frac{dM^2}{dx} \right)^* = \pm \sqrt{-[G'(x^*)]} \quad (3.176)$$

Questa determinerà l'andamento del prosieguo (cambiamento/mantenimento di regime sub/supersonico): il segno (+) consentirà un aumento del Mach attraverso la gola, quello (-) una diminuzione.

Ovviamente il passaggio del punto sonico sarà possibile solo se $G'(x^*) \leq 0$.

Il **punto critico è ovviamente un punto di flesso**, e le linee che passano per il punto critico si chiameranno, ovviamente, **curve critiche**.

**Esercizio 3.23**

Aria entra in un condotto convergente senza attrito a Mach 0.7, 310 K, 550 kPa. La sezione di ingresso è doppia di quella di uscita. Si vuole mantenere costante il Mach lungo il condotto.

Determina:

La temperatura di ristagno all'uscita	[149.58 K]
La quantità di calore scambiata	[-191.47 kJ/kg (sottratta)]
La variazione di pressione di ristagno	[+248.59]

**Esercizio 3.24**

Aria entra in un condotto a sezione costante con attrito a Mach 0.4, ed accelera fino a Mach 0.8 a causa dello scambio di calore. Il coefficiente di attrito è costante $f_F=0.005$ e $T_w/T_{01}=3$.

Determina in funzione di $(4f_F x/D)$:

T/T_{01} ,	M ,	p/p_1 ,	T/T_1 ,	p_0/p_{01}
	procedi a passi per	tentativi		

**Esercizio 3.25**

Scrivi/opera un codice di calcolo chiamato **Moti_Gen_Q1d.for** che integra la formulazione di Shapiro con una subroutine alla Runge Kutta del 4.to ordine, laddove l'andamento delle forze generalizzate è descritto da funzioni esterne da definire a seconda del problema. Il codice non ammette punti sonici, ma solo una OUN posta in una sezione specifica.

Il codice integra tutte le proprietà a partire da quelle nella sezione di partenza.

**Esercizio 3.26**

Scrivi/opera un codice di calcolo chiamato **Moti_Gen_Sonici.for** che integra la formulazione di Shapiro con una subroutine alla Runge Kutta del 4.to ordine. L'andamento delle forze generalizzate è descritto da funzioni esterne da definire a seconda del problema. Il codice ammette una OUN posta in una sezione specifica.

Il codice trova automaticamente la sezione critica, a partire da questa il codice risale, integrando a ritroso, alla sezione di partenza, e quindi integra su tutto il campo, riportando i rapporti delle proprietà rispetto a quelle di partenza.



.3.4 CHECK-OUT

A questo punto lo studente diligente dovrebbe essere familiarizzato con i seguenti concetti:

1. moti quasi unidimensionali,
2. moti semplici,
3. moti complessi,
4. il fenomeno dello strozzamento,
5. i diagrammi caratteristici e loro rappresentazione,
6. condotto convergente e condotto convergente-divergente: differenze, diagrammi caratteristici di funzionamento, andamento della portata massica e caratteristiche di funzionamento in funzione del rapporto di pressione,
7. prese d'aria: subsoniche- supersoniche fisse e a geometria variabile, il fenomeno dell'avviamento, il concetto di rendimento,
8. tunnel supersonici, la seconda gola: geometrie fisse e variabili, il problema dell'avviamento
9. moti semplici con scambio di calore, la curva di Rayleigh,
10. moti semplici con attrito: la curva di Fanno,
11. moti semplici con scambio di massa,
12. moti semplici isotermi con attrito,
13. moti generalizzati: il concetto, il metodo di Shapiro: il problema del superamento del punto sonico.

E dovrebbe essere capace, utilizzando le tabelle elettroniche descritte negli esempi, di risolvere problemi semplici ed inoltre di scrivere/operare codici di calcolo che risolvono problemi di interesse pratico con la tecnica dei moti generalizzati