

Capitolo 4

Flussi Esterni Linearizzati

Scopo del capitolo

Trascurando gli effetti viscosi e gravitazionali (problemi potenziali), un profilo a piccolo spessore, piccolo camber, posto in una corrente con un piccolo angolo di attacco, introdurrà un piccolo disturbo al campo asintotico.

In questi casi è possibile ricavare, per ogni regime di moti (subsonico, transonico, supersonico e ipersonico) delle similitudini, teorie capaci di collegare tra loro differenti problemi (forze e geometrie) nell'ambito dello stesso regime.

Ma piccoli disturbi implicheranno la linearizzazione delle equazioni del potenziale solo per i campi subsonici e supersonici. Per gli altri (transonico ed ipersonico) le equazioni rimangono non lineari, e quindi le similitudine saranno limitate, nelle loro applicazioni, dalla necessità della costanza di un parametro di similitudine. Nei limiti degli obiettivi di questo corso, esamineremo in dettaglio soltanto i campi linearizzati (subsonici e supersonici).

Per i campi subsonici mostreremo che sotto le ipotesi di piccole perturbazioni è possibile collegare ogni soluzione comprimibile a quella incomprimibile, estendendo quindi al massimo le metodologie dell'aerodinamica iposonica fino al Mach critico, che sarà individuato in base al valore minimo del coefficiente di pressione sul profilo.

Per i campi supersonici faremo riferimento ad un comodo campo di riferimento con $M_\infty = \sqrt{2}$ e per questo campo (teoria di Ackeret) dimostreremo che il coefficiente di pressione linearizzato è funzione esclusivamente dell'angolo di flusso (deviazione rispetto alla direzione asintotica) il che permetterà in modo molto semplice la determinazione del sistema di forze sul profilo.

Indice del capitolo

Paragrafo	pagina
.4.1 Equazione del potenziale	2
.4.2 Linearizzazione dell'equazione	4
.4.3 Linearizzazione del coefficiente di pressione	8
.4.4 Flussi subsonici linearizzati	9
.4.5 Similitudini Subsoniche	12
.4.5.1 Regola di Similitudine di Gothert	14
.4.5.2 Regola di Similitudine di Prandtl-Glauert	15
.4.5.3 II.a Regola di Similitudine di Prandtl-Glauert	16
.4.6 Correzioni di Compressibilità di Laitone e di Karman-Tsien	18
.4.7 Mach critico (inferiore) di un profilo	20
.4.8 Similitudine per campi tridimensionali compressibili subsonici(*)	22
.4.9 Effetti della compressibilità sulle Ali a Freccia (*)	24
.4.10 Flussi Supersonici Linearizzati – Teoria di Ackeret	28
.4.10.1 Soluzione Generale dell'equazione del potenziale di velocità del disturbo in supersonica	30
.4.11 Profili supersonici (piccoli disturbi)	34
.4.11.1 La teoria di Busemann	38
.4.12 Check-Out	40

4.1 Equazione del potenziale

Consideriamo flussi compressibili stazionari irrotazionali (i.e. non viscosi che si originano da condizioni uniformi, senza discontinuità d'urto curve), con la trascurabilità delle forze di massa.

Per tali campi esisterà una funzione potenziale Φ , tale che: $\underline{V} = \nabla\Phi$, inoltre, per le ipotesi, essi saranno omoentropici ed omoentropici.

Ne deriva che una qualsiasi proprietà termodinamica, ad es. la pressione, è funzione di una sola variabile (essendo l'entropia, $s=\text{costante}$) i.e. $p=p(\rho)$.

Ricordiamo le espressioni delle equazioni che regolano tali moti:

$$\text{Continuità} \quad -\frac{D\rho}{Dt} = \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{V} \quad (4.1)$$

$$\text{Q.d.M. (equilibrio)} \quad \rho \frac{D\underline{V}}{Dt} = -\underline{\nabla}p \quad (4.2)$$

$$\text{Energia} \quad H = \frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{V^2}{2} = \text{costante} \quad (4.3)$$

Queste sono dette equazioni di Eulero

Moltiplicando scalarmente la QdM per la velocità si ricava:

$$\rho \frac{D(V^2/2)}{Dt} = -\underline{V} \cdot \underline{\nabla}p \quad (4.4)$$

quest'ultima equazione, per le ipotesi di stazionarietà, si può scrivere:

$$-\frac{Dp}{Dt} = \rho \underline{V} \cdot \underline{\nabla}(V^2/2) \quad (4.5)$$

Data l'isentropicità $p=p(\rho)$ ne deriva che:

$$\frac{Dp}{Dt} = \left(\frac{dp}{d\rho} \right) \frac{D\rho}{Dt} = -a^2 \frac{D\rho}{Dt} \quad (4.6)$$

ovvero combinando le due espressioni:

$$\rho a^2 \underline{\nabla} \cdot \underline{V} = \rho \underline{V} \cdot \underline{\nabla}(V^2/2) \quad (4.7)$$

si ricava l' **equazione dei moti potenziali compressibili**:

$$\boxed{a^2 \underline{\nabla} \cdot \underline{V} = \underline{V} \cdot \underline{\nabla}(V^2/2)} \quad (4.8)$$

Questa equazione può essere espressa (ricordando l'irrotazionalità, i.e. $U_y=V_x$; $U_z=W_x$; $V_z=W_y$) , **per un sistema di coordinate cartesiane**, in varie rappresentazioni:

- in termini delle componenti di velocità (U, V, W), come:

$$\boxed{\left[a^2 - U^2 \right] \frac{\partial U}{\partial x} + \left[a^2 - V^2 \right] \frac{\partial V}{\partial y} + \left[a^2 - W^2 \right] \frac{\partial W}{\partial z} - 2UV \frac{\partial U}{\partial y} - 2UW \frac{\partial U}{\partial z} - 2VW \frac{\partial V}{\partial z} = 0} \quad (4.9)$$

- in termini del potenziale di velocità, come:

$$\boxed{\left(1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2} \right) \Phi_{xx} + \left(1 - \frac{\Phi_y^2}{a^2} \right) \Phi_{yy} + \left(1 - \frac{\Phi_z^2}{a^2} \right) \Phi_{zz} - 2 \frac{\Phi_x \Phi_y}{a^2} \Phi_{xy} - 2 \frac{\Phi_x \Phi_z}{a^2} \Phi_{xz} - 2 \frac{\Phi_y \Phi_z}{a^2} \Phi_{yz} = 0} \quad (4.10)$$

- ovvero in una forma mista (U, V, W, Φ):

$$\left(1 - \frac{U^2}{a^2}\right)\Phi_{xx} + \left(1 - \frac{V^2}{a^2}\right)\Phi_{yy} + \left(1 - \frac{W^2}{a^2}\right)\Phi_{zz} - 2\frac{UV}{a^2}\Phi_{xy} - 2\frac{UW}{a^2}\Phi_{xz} - 2\frac{VW}{a^2}\Phi_{yz} = 0 \quad (4.11)$$

Queste ultime due prendono il nome di **equazioni del potenziale di velocità** per moti compressibili.

Il sistema si completa con l'equazione dell'energia che, per le ipotesi, si può scrivere, per un gas piuccheper-fetto, come:

$$a^2 + \frac{\gamma-1}{2}V^2 = a_0^2 = \gamma RT_0 \quad (4.12)$$

Dove a_0 e T_0 sono rispettivamente la velocità del suono e la temperatura di ristagno supposte note (pari alle condizioni asintotiche ipotizzate costanti).

In definitiva la risoluzione di tali moti è, in linea di principio, semplice in quanto l'accoppiamento della equazione dell'energia con quella del potenziale porta ad una sola (*mostruosa*) equazione:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\Phi_x^2}{a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2)}\right)\Phi_{xx} + \left(1 - \frac{\Phi_y^2}{a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2)}\right)\Phi_{yy} + \\ & + \left(1 - \frac{\Phi_z^2}{a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2)}\right)\Phi_{zz} - 2\frac{\Phi_x\Phi_y}{a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2)}\Phi_{xy} + \\ & - 2\frac{\Phi_x\Phi_z}{a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2)}\Phi_{xz} - 2\frac{\Phi_y\Phi_z}{a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2)}\Phi_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Un problema si può risolvere con la seguente scaletta:

1. Risolvere l'equazione combinata del potenziale per la Φ , con le condizioni al contorno date per lo specifico problema;
2. Calcolare la velocità e le sue componenti dalla $\underline{V} = \underline{\nabla}\Phi$;
3. Calcolare la velocità del suono dalla equazione dell'energia: $a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2)$;
4. Calcolare il numero di Mach in ogni punto: $M=V/a$
5. Calcolare le altre variabili termodinamiche dalle rispettive equazioni isentropiche essendo note le condizioni di ristagno: T/T_0 , p/p_0 , ρ/ρ_0 in funzione di M .

Questo dimostra l'importanza del potenziale di velocità Φ , dalla cui conoscenza si può determinare tutto il campo termo-fluidodinamico.

Notiamo che l'equazione del potenziale [esatta nei limiti delle ipotesi fatte] è fortemente non lineare.

Essa si applica a tutti i regimi compressibili stazionari potenziali (**subsonico, transonico, supersonico ed ipersonico**).

Osserviamo inoltre che per $a \rightarrow \infty$ (i.e. per $M \rightarrow 0$) essa si riduce alla ben nota **equazione di Laplace (valida in regime incompressibile)**:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0 \quad (4.14)$$

La risoluzione di questi tipi di problemi compressibili usualmente si realizza (alternativamente) con:

1. risoluzione numerica (**esatta**) dell'equazione completa;

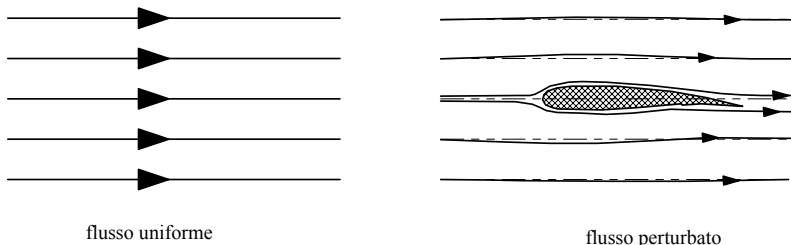
2. soluzione (**approssimata**) dell'equazione in una forma opportunamente linearizzata (per ogni regime);
3. similitudine (**approssimata**) con risoluzioni della equazione di Laplace (campo incompressibile), equazione delle onde (campo supersonico) e con *similitudini speciali* per i campi transonico ed ipersonico.

4.2 Linearizzazione dell'equazione

Vi sono in aerodinamica molti problemi in cui il campo di moto, è di poco alterato ovvero perturbato rispetto a quello asintotico, uniforme

Il classico problema è un profilo aerodinamico, sottile, con piccolo camber, posto ad un piccolo angolo di attacco.

In questo caso il campo di moto sarà caratterizzato da piccole deviazioni rispetto al campo indisturbato.



L'analisi di questi campi può essere quindi fatta con teorie di **piccole perturbazioni**.

Ma in regime compressibile **piccole perturbazioni non implicano necessariamente linearità**.

Vedremo nel seguito che campi transonici e ipersonici, anche con l'ipotesi di piccole perturbazioni, sono campi non-lineari.

Il problema della linearizzazione è strettamente connesso con quello dell'adimensionalizzazione, in quanto si richiede l'analisi degli ordini di grandezza dei vari termini presenti nel problema (equazione, condizioni al contorno, disturbo) per le varie direzioni (tangente, normale).

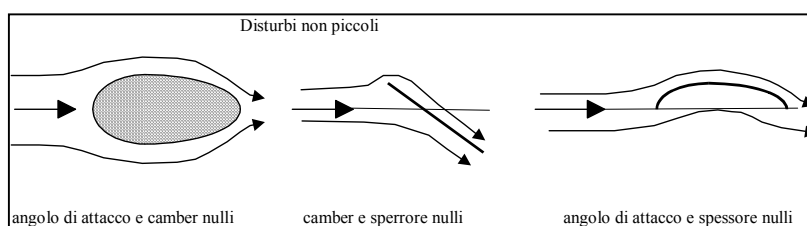
Una teoria completa del processo di linearizzazione generale è alquanto laboriosa (vedi la trattazione di L.G.Napolitano).

Per poter rendere tale processo più abbordabile useremo una trattazione più semplificata, ricorrendo all'analisi degli ordini di grandezza soltanto nei casi di estrema necessità (transonico ed ipersonico).

In genere quindi supporremo (tranne i casi speciali) che la perturbazione è proporzionale al disturbo introdotto dal corpo.

Per un profilo, il disturbo può essere misurato dal maggior valore dei parametri geometrici:

- ❖ angolo di attacco α ,
- ❖ rapporto di spessore $\tau = t_{\max}/c$,
- ❖ rapporto di camber $m = f_{\max}/c$.



In figura sono rappresentati casi tipici dove due di questi parametri sono piccoli, ma il disturbo non è piccolo.

Considereremo quindi un corpo **snello** (i.e. un corpo per il quale $\varepsilon = \max[\alpha, \tau, m] \ll 1$) immerso in un campo uniforme, la cui velocità asintotica $\underline{V}_\infty$ è orientata con l'asse delle "x".

Supponiamo che il campo delle velocità sia di poco perturbato dal corpo, la cui presenza induce un campo di velocità $\underline{V}' = (u', v', w')$ che si sovrappone a quello asintotico uniforme $\underline{V}_\infty \underline{i}$:

$$\underline{V} = \underline{V}_\infty \underline{i} + \underline{V}' \quad \text{ovvero:} \quad \begin{cases} U = V_\infty + u' \\ V = v' \\ W = w' \end{cases} \quad (4.15)$$

In termini di **potenziale (totale) di velocità**, Φ , risulta:

$$\underline{\nabla}\Phi = \underline{V} = (V_\infty + u')\underline{i} + v'\underline{j} + w'\underline{k} \quad (4.16)$$

Introducendo invece un **potenziale di velocità di perturbazione**: ϕ , risulta (**nel seguito denoteremo con un pedice la derivata parziale**):

$$\underline{\nabla}\Phi = \underline{V}_\infty + \underline{\nabla}\phi = (V_\infty + u')\underline{i} + v'\underline{j} + w'\underline{k} \quad (4.17)$$

con

$$\Phi = V_\infty x + \phi(x, y, z) \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \phi_x = u' \\ \phi_y = v' \\ \phi_z = w' \end{cases} \quad (4.18)$$

ovvero :

$$\begin{cases} U = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = V_\infty + \phi_x \\ V = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \phi_y \\ W = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \phi_z \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \phi_{xx} \\ \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \phi_{yy} \\ \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \phi_{zz} \end{cases} \quad (4.19)$$

e così via per le derivate (miste) di ordine superiore.

Sostituendo queste relazioni nell'equazione del potenziale (4.10) di $\Phi = V_\infty x + \phi$, si ha [moltiplicata per a^2]:

$$\left[a^2 - (V_\infty + \phi_x)^2 \right] \phi_{xx} + \left[a^2 - (\phi_y)^2 \right] \phi_{yy} + \left[a^2 - (\phi_z)^2 \right] \phi_{zz} - 2(V_\infty + \phi_x) \phi_y \phi_{xy} - 2(V_\infty + \phi_x) \phi_z \phi_{xz} - 2\phi_y \phi_z \phi_{yz} = 0 \quad (4.20)$$

Questa è detta **equazione del potenziale di velocità di perturbazione**.

Per poter identificare meglio alcuni effetti ed ordini di grandezza, riproduciamo, nell'ordine, questa equazione in termini di velocità:

$$\left[a^2 - (V_\infty + u')^2 \right] \frac{\partial u'}{\partial x} + \left[a^2 - (v')^2 \right] \frac{\partial v'}{\partial y} + \left[a^2 - (w')^2 \right] \frac{\partial w'}{\partial z} - 2(V_\infty + u') v' \frac{\partial u'}{\partial y} - 2(V_\infty + u') w' \frac{\partial u'}{\partial z} - 2v' w' \frac{\partial v'}{\partial z} = 0 \quad (4.21)$$

Causa la omotopia, l'equazione dell'energia si scrive:

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} = \text{costante} = \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} + \frac{V_\infty^2}{2} \quad (4.22)$$

ovvero in termini della velocità di perturbazione:

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{(V_\infty + u')^2 + (v')^2 + (w')^2}{2} = \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} + \frac{V_\infty^2}{2} \quad (4.23)$$

da cui si ricava:

$$a^2 = a_\infty^2 - \frac{\gamma - 1}{2} \left[(u')^2 + 2u'V_\infty + (v')^2 + (w')^2 \right] \quad (4.24)$$

che sostituita nella (4.21), con piccole manipolazioni, fornisce:

$$\begin{aligned}
& \left[1 - M_\infty^2\right] \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = \\
& = M_\infty^2 \left[(\gamma + 1) \frac{u'}{V_\infty} + \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) \left(\frac{u'}{V_\infty} \right)^2 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) \left(\frac{(v')^2 + (w')^2}{V_\infty^2} \right) \right] \frac{\partial u'}{\partial x} + \\
& + M_\infty^2 \left[(\gamma - 1) \frac{u'}{V_\infty} + \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) \left(\frac{v'}{V_\infty} \right)^2 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) \left(\frac{(w')^2 + (u')^2}{V_\infty^2} \right) \right] \frac{\partial v'}{\partial y} + \\
& + M_\infty^2 \left[(\gamma - 1) \frac{u'}{V_\infty} + \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right) \left(\frac{w'}{V_\infty} \right)^2 + \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) \left(\frac{(u')^2 + (v')^2}{V_\infty^2} \right) \right] \frac{\partial w'}{\partial z} + \\
& + M_\infty^2 \left[\frac{v'}{V_\infty} \left(1 + \frac{u'}{V_\infty} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \frac{w'}{V_\infty} \left(1 + \frac{u'}{V_\infty} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) + \frac{u'w'}{V_\infty^2} \left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Dopo un momento di smarrimento, comprendiamo che questa è semplicemente una forma espansa dell'equazione completa del potenziale espressa in termini di velocità di perturbazione.

E' ancora una **equazione esatta per flussi stazionari, isentropici ed irrotazionali**.

Finora infatti non abbiamo fatto alcuna ipotesi sull'ordine di grandezza delle perturbazioni.

Facciamo ora le ipotesi di piccole perturbazioni.

Dopo aver notato che l'equazione (4.25) è espressa in **termini adimensionali rispetto a scale aventi tutte lo stesso ordine di grandezza**, assumiamo che:

❖ le componenti della velocità di perturbazione sono piccole rispetto alla velocità asintotica: i.e.

$$\frac{u'}{V_\infty}; \frac{v'}{V_\infty}; \frac{w'}{V_\infty} \ll 1 \tag{4.26}$$

❖ i prodotti dei termini di perturbazione sono piccoli rispetto a quelli al primo ordine

$$\left(\frac{u'}{V_\infty} \right)^2; \left(\frac{v'}{V_\infty} \right)^2; \left(\frac{w'}{V_\infty} \right)^2; \left(\frac{u'v'}{V_\infty^2} \right); \left(\frac{u'w'}{V_\infty^2} \right); \left(\frac{v'w'}{V_\infty^2} \right) \ll \frac{u'}{V_\infty}; \frac{v'}{V_\infty}; \frac{w'}{V_\infty} \ll 1 \tag{4.27}$$

Con queste ipotesi l'equazione (4.25) assume una forma più umana:

$$\begin{aligned}
\left[1 - M_\infty^2\right] \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = & M_\infty^2 \left[(\gamma + 1) \frac{u'}{V_\infty} \right] \frac{\partial u'}{\partial x} + M_\infty^2 \left[(\gamma - 1) \frac{u'}{V_\infty} \right] \frac{\partial v'}{\partial y} + \\
& + M_\infty^2 \left[(\gamma - 1) \frac{u'}{V_\infty} \right] \frac{\partial w'}{\partial z} + M_\infty^2 \left[\frac{v'}{V_\infty} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) + \frac{w'}{V_\infty} \left(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.28}$$

che scritta in termini misti è:

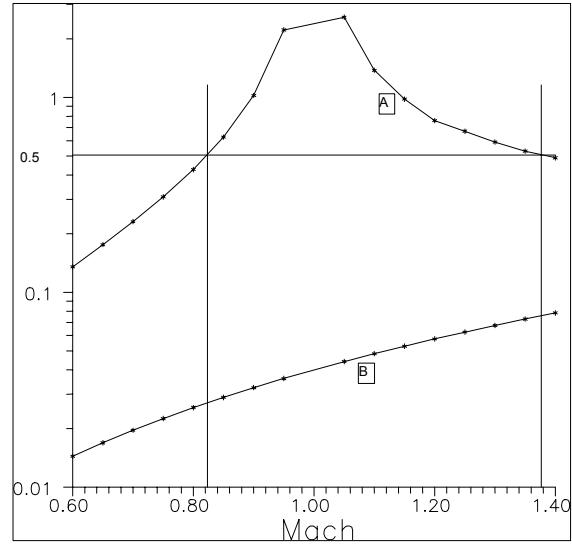
$$\boxed{
\begin{aligned}
\left[1 - M_\infty^2\right] \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = & M_\infty^2 \left[(\gamma + 1) \frac{u'}{V_\infty} \right] \phi_{xx} + M_\infty^2 \left[(\gamma - 1) \frac{u'}{V_\infty} \right] \phi_{yy} + \\
& + M_\infty^2 \left[(\gamma - 1) \frac{u'}{V_\infty} \right] \phi_{zz} + 2M_\infty^2 \left[\frac{v'}{V_\infty} \phi_{xy} + \frac{w'}{V_\infty} \phi_{yz} \right]
\end{aligned}
} \tag{4.29}$$

Siamo ora nelle condizioni migliori per comparare gli ordini di grandezza dei vari termini omologhi, che compaiono a destra e a sinistra di questa equazione.

Per poter fare questo, in una forma ingegneristica piuttosto che con una trattazione rigorosamente scientifica, ipotizziamo che il disturbo sia proporzionale alla perturbazione (presenza del corpo snello) e poiché il corpo è aerodinamicamente messo parallelamente alla direzione della velocità asintotica, ci aspettiamo che la perturbazione u'/V sia di ordine $\varepsilon = \max[\alpha, \tau, m]$, ordine che si presume piccolo.

Assumiamo per la nostra analisi $\varepsilon \leq 0.1$

Riportiamo nel grafico semi-logaritmico a lato i rapporti dei coefficienti delle derivate che compaiono a destra dell'equazione con il coefficiente che compare a sinistra dell'equazione:



$$A = \frac{M_\infty^2 (\gamma + 1) \varepsilon}{1 - M_\infty^2} \quad ; \quad B = \frac{M_\infty^2 (\gamma - 1) \varepsilon}{1} \quad (4.30)$$

1.) Per $0 < M_\infty \leq 0.8$ e per $1.4 < M_\infty$ (si esclude il regime transonico) si ritrova:

$$A = \frac{M_\infty^2 (\gamma + 1) \varepsilon}{1 - M_\infty^2} < 1 \quad (4.31)$$

quindi il termine a destra dell'equazione (4.29) che moltiplica la φ_{xx} è trascurabile rispetto a quello a sinistra dell'equazione che moltiplica la φ_{xx} ;

$$B = \frac{M_\infty^2 (\gamma - 1) \varepsilon}{1} \ll 1 \quad (4.32)$$

quindi i termini a destra dell'equazione (4.29) che moltiplicano le φ_{yy} e φ_{zz} sono trascurabili rispetto a quelli a sinistra che moltiplicano le corrispondenti φ_{yy} e φ_{zz}

2.) Per $M_\infty \leq 5$ (si esclude il regime ipersonico) si ritrova, per corpi snelli, che le perturbazioni laterali sono più piccole di quelle longitudinali

$$2M_\infty^2 \left[\frac{v'}{V_\infty} \varphi_{xy} + \frac{w'}{V_\infty} \varphi_{yz} \right] \approx 0 \quad (4.33)$$

e per $M_\infty \rightarrow 5$ si ha

$$B = M_\infty^2 (\gamma - 1) \varepsilon \rightarrow 1 \quad (4.34)$$

Escludendo quindi i regimi transonico e quello ipersonico, l'equazione (4.29) nella forma linearizzata diventa:

$$\left[1 - M_\infty^2 \right] \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (4.35)$$

ovvero in termini del potenziale di velocità di perturbazione:

$$\left[1 - M_\infty^2 \right] \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \quad (4.36)$$

Questa è chiamata **equazione linearizzata del potenziale di velocità di perturbazione**.

Nota: **questa equazione è approssimata e limitata** in quanto **non rappresenta il regime transonico** (caratterizzato dalla presenza di zone con possibili regimi misti sub-super-subsonico) **né quello ipersonico** (caratterizzato da onde d'urto molto prossime alla superficie e quindi da strati d'urto molto piccoli), per i quali **l'ipotesi di piccole perturbazioni non è sufficiente a linearizzare l'equazione**.

Si ritrova quindi che l'ipotesi di piccole perturbazioni porta a campi linearizzabili soltanto per i regimi subsonico e supersonico

4.3 Linearizzazione del coefficiente di pressione

Il coefficiente di pressione è definito come:

$$c_p \equiv \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} \quad (4.37)$$

Per flussi compressibili e gas piuccheperfetti il c_p prende la forma:

$$c_p \equiv \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty} V_\infty^2} = \frac{p - p_\infty}{\frac{\gamma}{2} p_\infty \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2}} = \frac{p - p_\infty}{\frac{\gamma}{2} p_\infty M_\infty^2} = \frac{p_\infty}{\frac{\gamma}{2} p_\infty M_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right) \quad (4.38)$$

ovvero:

$$c_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right) \quad (4.39)$$

Questa è una diversa rappresentazione, ma rappresenta ancora una forma esatta.

Sotto le ipotesi di piccoli disturbi e di isentropicità si riesce ad ottenere una rappresentazione approssimata, consistente con la teoria sopra esposta.

Dall'adiabaticità:

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} + \frac{V_\infty^2}{2} \rightarrow \frac{\gamma R T}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} = \frac{\gamma R T_\infty}{\gamma - 1} + \frac{V_\infty^2}{2} \quad (4.40)$$

discende:

$$T - T_\infty = \frac{V_\infty^2 - V^2}{2\gamma R / (\gamma - 1)} \rightarrow \frac{T}{T_\infty} - 1 = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V_\infty^2 - V^2}{\gamma R T_\infty} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V_\infty^2 - V^2}{a_\infty^2} \quad (4.41)$$

ovvero essendo

$$V^2 = (V_\infty + u')^2 + (v')^2 + (w')^2 \quad (4.42)$$

si ricava:

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{2u'V_\infty + (u')^2 + (v')^2 + (w')^2}{a_\infty^2} \quad (4.43)$$

ovvero data la piccolezza delle perturbazioni:

$$\frac{T}{T_\infty} \cong 1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{2u'V_\infty}{a_\infty^2} \quad (4.44)$$

Essendo il flusso isentropico, deve valere :

$$p/p_\infty = [T/T_\infty]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (4.45)$$

da cui:

$$p/p_\infty \cong \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{2u'V_\infty}{a_\infty^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.46)$$

ovvero espandendo in serie:

$$p/p_\infty \approx \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{2u'V_\infty}{a_\infty^2} + \dots \right] \approx 1 - \gamma \frac{u'V_\infty}{a_\infty^2} \quad (4.47)$$

Ne deriva, per il coefficiente di pressione:

$$c_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right) = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(1 - \gamma \frac{u'V_\infty}{a_\infty^2} - 1 \right) = -\frac{2u'}{V_\infty} \quad (4.48)$$

L'espressione :

$$c_p = -\frac{2u'}{V_\infty} \quad (4.49)$$

Che fornisce il **coefficiente di pressione linearizzato**, valido e coerente cioè per l'ipotesi di piccole perturbazioni.

Da notare che c_p dipende soltanto dalla componente "x" della velocità di perturbazione.

Una volta noto il c_p i coefficienti delle forze e dei momenti si possono calcolare con semplici integrazioni (pedice "v" per ventre e pedice "d" per dorso):

$$\begin{aligned} \underline{L} &\equiv \oint_S (p_v - p_d) \underline{j} dS & \underline{M} &\equiv \oint_S x(p_v - p_d) \underline{k} dS \\ c_L &\equiv \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c} \cong \int_0^1 (c_{pv} - c_{pd}) d(x/c) & c_M &\equiv \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c^2} \cong \int_0^1 (x/c) (c_{pv} - c_{pd}) d(x/c) \end{aligned} \quad (4.50)$$

.4.4 Flussi subsonici linearizzati

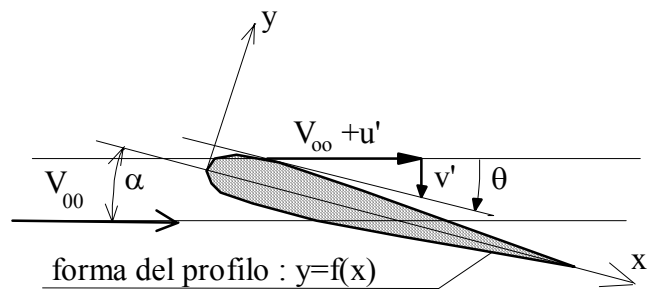
Un tipico problema bidimensionale di aerodinamica esterna subsonica, sotto le ipotesi di piccole perturbazioni consiste nella soluzione dell'equazione lineare:

$$\left[1 - M_\infty^2 \right] \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad (4.51)$$

soggetta alle condizioni al contorno ed asintotiche. Una volta risolta l'equazione per il potenziale di disturbo, il campo delle pressioni può essere calcolato tramite il coefficiente di pressione linearizzato:

$$c_p = -\frac{2u'}{V_\infty} = -2 \frac{\phi_x}{V_\infty} \quad (4.52)$$

e da questo, per integrazione, si possono ottenere tutte le forze aerodinamiche agenti sul profilo.



Date le ipotesi di campo di moto non viscoso, non sono considerati gli effetti dello strato limite, quindi, come le teorie potenziali incompressibili, l'unica condizione al contorno che possiamo applicare è la condizione di tangenza della velocità sulla parete solida del profilo (descritto dalla equazione $y=y_c(x)$ con angolo di attacco " α "):

$$\frac{dy_c}{dx} = \frac{v'}{V_\infty + u'} + \alpha \quad (4.53)$$

Questa è la forma esatta della condizione di tangenza.

Nel caso di piccole perturbazioni si potrà assumere : $u' \ll V_\infty$, $\tan\theta \approx \theta$ da cui la condizione di tangenza (4.53) in forma approssimata diventa:

$$\frac{dy_c}{dx} \cong \frac{v'}{V_\infty} + \alpha \approx \theta + \alpha \rightarrow v' \cong V_\infty \left(\frac{dy_c}{dx} - \alpha \right) \quad (4.54)$$

ovvero in termini del potenziale di velocità del disturbo

$$\boxed{\frac{d\phi}{dy} \cong V_\infty \left(\frac{dy_c}{dx} - \alpha \right)} \quad (4.55)$$

Questa rappresenta la condizione di tangenza consistente con la teoria delle piccole perturbazioni.

La condizione all'infinito richiede l'annullamento del disturbo di velocità, quindi l'andamento a zero del gradiente del potenziale di velocità del disturbo (ovvero delle derivate parziali) a grande distanza dal profilo.



Esempio 4.1

Come esempio di applicazione del metodo delle piccole perturbazioni consideriamo il campo di moto stazionario, irrotazionale, piano su di una parete ondulata come in figura.

Ovviamente si suppone che $h \ll 1$, sicché vale l'ipotesi di piccole perturbazioni. L'equazione del potenziale di disturbo (4.51) è:

$$\beta^2 \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \quad (4.56)$$

con $\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$ e deve essere risolta con le condizioni linearizzate di tangenza a parete (4.55):

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{\text{parete}} = \frac{w}{U_\infty + u}$$

ovvero, attesa la piccolezza del disturbo:

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{y=0} = \frac{w}{U_\infty} = \frac{1}{U_\infty} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{y=0} \quad (4.57)$$

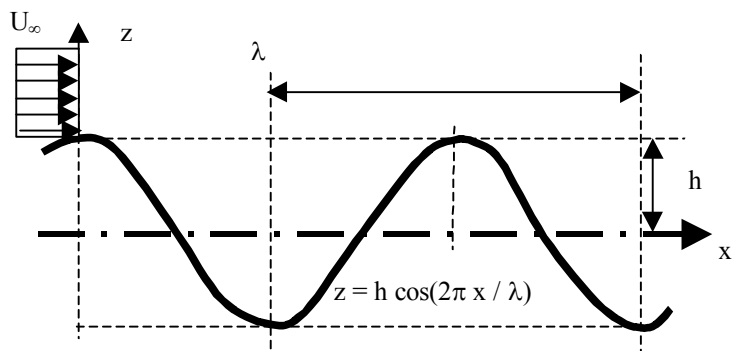
Le condizioni all'infinito devono ammettere che il gradiente del potenziale deve tendere a zero per $z \rightarrow \infty$

La (4.56) può essere risolta con la tecnica di separazione delle variabili.

Assumiamo cioè:

$$\phi(x, z) = X(x) Z(z) \quad (4.58)$$

Sostituiamo la (4.58) nella (4.55) [apici indicano derivate totali]:



$$\beta^2 Z X'' + X Z'' = 0 \quad (4.59)$$

Essendo la X funzione solo di x e la Z funzione solo di z , la (4.59) può essere partizionata in due segmenti che devono essere costanti (posti pari a $-k^2$):

$$\frac{X''}{X} = -\frac{1}{\beta^2} \frac{Z''}{Z} = -k^2 \quad (4.60)$$

Separando le variabili nella (4.60) otteniamo due equazioni:

$$X'' + k^2 X = 0 \quad Z'' - \beta^2 k^2 Z = 0 \quad (4.61)$$

Le cui soluzioni sono:

$$X(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx \quad Z(z) = C_3 \exp[\beta k z] + C_4 \exp[-\beta k z] \quad (4.62)$$

La soluzione del potenziale di disturbo della velocità è quindi:

$$\varphi(x, z) = Z(z) X(x) = (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx)(C_3 \exp[\beta k z] + C_4 \exp[-\beta k z]) \quad (4.63)$$

La condizione all'infinito richiede che $\varphi_z \rightarrow 0$ per $z \rightarrow \infty$ da cui deriva che $C_3 = 0$

La condizione linearizzata sulla parete (4.57) richiede l'eguaglianza ($z=0$):

$$\frac{1}{U_\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{(C_1 \cos kx + C_2 \sin kx)}{U_\infty} (-\beta k C_4) = h \frac{2\pi}{\lambda} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = \frac{dz}{dx} \Big|_{z=0} \quad (4.64)$$

Dall'analisi della (4.64) discende che il coefficiente del coseno deve annullarsi ($C_1=0$), ed ancora:

$$\frac{(-\beta k C_2 C_4)}{U_\infty} \sin(kx) = h \frac{2\pi}{\lambda} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (4.65)$$

Da cui si ricavano:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad ; \quad C_2 C_4 = h \frac{U_\infty}{\beta} \quad (4.66)$$

In definitiva la soluzione per il potenziale di velocità è

$$\varphi(x, z) = \frac{U_\infty h}{\beta} \exp\left[-\frac{2\pi \beta}{\lambda} z\right] \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (4.67)$$

Dalla (4.67) si possono ricavare, per derivazione le espressioni delle componenti di velocità:

$$u(x, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2\pi U_\infty h}{\beta \lambda} \exp\left[-\frac{2\pi \beta}{\lambda} z\right] \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (4.68)$$

$$w(x, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{2\pi U_\infty h}{\lambda} \exp\left[-\frac{2\pi \beta}{\lambda} z\right] \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (4.69)$$

Il coefficiente di pressione linearizzato (4.52) assume l'espressione:

$$C_p(x, z) = -\frac{2u}{U_\infty} = -\frac{4\pi h}{\lambda} \exp\left[-\frac{2\pi \beta}{\lambda} z\right] \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (4.70)$$

e sulla parete ($z=0$) diventa:

$$C_p(x, 0) = -\frac{4\pi h}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (4.71)$$

Esercizio 4.1

Per l'esempio precedente con $[\lambda=0.3 \text{ m}, h=0.03 \text{ m}]$:

1. determina il valore della velocità perturbata w nel punto $x=0.3, z=0.06$ in condizioni iposoniche ($M_\infty=0$)
2. determina il valore della velocità perturbata w nel punto $x=0.3, z=0.06$ in condizioni comprimibili ($M_\infty=0.6$)
3. determina il valore del coefficiente di pressione nel punto $x=0.3, z=0.06$ in condizioni iposoniche ($M_\infty=0$)
4. determina il valore del coefficiente di pressione nel punto $x=0.3, z=0.06$ in condizioni comprimibili ($M_\infty=0.6$)
5. traccia le linee di corrente nel caso incomprimibile ($M_\infty=0$) e nel caso comprimibile ($M_\infty=0.6$) e paragonale.



4.5 Similitudini subsoniche

Vogliamo derivare una legge di similitudine, cioè una relazione capace di correlare un flusso compressibile subsonico attorno ad un dato profilo ad un altro flusso sempre subsonico, ma a differente numero di Mach, attorno allo stesso ovvero ad un altro profilo.

In particolare ricercheremo relazioni che correlano un flusso compressibile attorno al dato profilo, con un equivalente flusso incompressibile [$M_\infty \rightarrow 0$] attorno ad un profilo affine. In tale modo potremo estendere, nei limiti dell'approssimazione dei piccoli disturbi, tutti i dati incompressibili (sperimentali e numerici) a casi compressibili. Per tale scopo dovremo ricercare una trasformazione di variabili capace di ridurre il problema compressibile (nel piano fisico) in un altro incompressibile (nel piano trasformato con apice *)

Assumiamo per entrambi i piani la velocità asintotica, $\underline{V}_\infty$, costante, per cui considereremo soltanto le trasformazioni del disturbo di velocità (o del suo potenziale).

Per semplicità di notazione poniamo:

$$\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2} \quad (4.72)$$

	Compressibile (piano fisico x, y)	Incompressibile (piano trasformato x^*, y^*)
Equazione di campo	$\beta^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$	$\varphi^*_{x^*x^*} + \varphi^*_{y^*y^*} = 0$
Condizione al contorno	$\left[V_\infty \left(\frac{dy_c}{dx} - \alpha \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{\text{sul corpo}}$	$\left[V_\infty \left(\frac{dy^*_c}{dx^*} - \alpha^* \right) = \frac{\partial \varphi^*}{\partial y^*} \right]_{\text{sul corpo trasformato}}$
Coefficiente di pressione	$c_p = -2 \frac{\varphi_x}{V_\infty}$	$c^*_p = -2 \frac{\varphi^*_{x^*}}{V_\infty}$

Consideriamo la seguente trasformazione generale:

$$\begin{aligned} x^* &= n_x x \rightarrow x = x^*/n_x \\ y^* &= n_y y \rightarrow y = y^*/n_y \\ \varphi^* &= n_\varphi \varphi \rightarrow \varphi = \varphi^*/n_\varphi \end{aligned} \quad (4.73)$$

dove n_x, n_y, n_ϕ sono fattori di scala di campo (cioè non dipendenti dal punto).

Ricaviamo le leggi di trasformazioni:

$$\begin{aligned}
 u = \phi_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{n_x}{n_\phi} \frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} = \frac{n_x}{n_\phi} \phi_{x^*}^* = \frac{n_x}{n_\phi} u^* \\
 v = \phi_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{n_y}{n_\phi} \frac{\partial \phi^*}{\partial y^*} = \frac{n_y}{n_\phi} \phi_{y^*}^* = \frac{n_y}{n_\phi} v^* \\
 \frac{\partial u}{\partial x} = \phi_{xx} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{(n_x)^2}{n_\phi} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x^{*2}} = \frac{(n_x)^2}{n_\phi} \phi_{x^*x^*}^* = \frac{(n_x)^2}{n_\phi} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \\
 \frac{\partial v}{\partial y} = \phi_{yy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{(n_y)^2}{n_\phi} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial y^{*2}} = \frac{(n_y)^2}{n_\phi} \phi_{y^*y^*}^* = \frac{(n_y)^2}{n_\phi} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \\
 \frac{dy_c}{dx} &= \frac{n_x}{n_y} \frac{dy_c^*}{dx^*}
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

Sostituendo le (4.58) nel problema compressibile, si ricava:

per l' **Equazione di campo**:

$$\beta^2 \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad \text{diventa} \quad \beta^2 \frac{(n_x)^2}{n_\phi} \phi_{x^*x^*}^* + \frac{(n_y)^2}{n_\phi} \phi_{y^*y^*}^* = 0 \tag{4.75}$$

Ovvero poiché il fattore di scala per il potenziale, n_ϕ , compare in entrambi i termini:

$$\beta^2 \left(\frac{n_x}{n_y} \right)^2 \phi_{x^*x^*}^* + \phi_{y^*y^*}^* = 0 \tag{4.76}$$

per la **Condizione al contorno**:

$$\left[\frac{dy_c}{dx} - \alpha = \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{\text{sul corpo}} \quad \text{diventa} \quad \left[\left(\frac{dy_c}{dx} - \alpha \right) = \frac{1}{V_\infty} \frac{n_y}{n_\phi} \frac{\partial \phi^*}{\partial y^*} = \frac{n_y}{n_\phi} \left(\frac{dy_c^*}{dx^*} - \alpha^* \right) \right]_{\text{sul corpo}} \tag{4.77}$$

Avendo assunto che l'angolo di attacco si trasforma come la tangente al corpo.

per il **Coefficiente di pressione**:

$$c_p = -2 \frac{\phi_x}{V_\infty} \quad \text{diventa} \quad c_p = -2 \left(\frac{n_x}{n_\phi} \right) \frac{\phi_{x^*}^*}{V_\infty} = \frac{n_x}{n_\phi} c_p^* \tag{4.78}$$

Vi sono diverse alternative per le trasformazioni che portano a varie similitudini.

Dall'esame di queste trasformazioni si vede che l'equazione di campo (4.75) è immune dalla scelta di n_ϕ ; per cui per simulare nel campo trasformato un moto incompressibile dobbiamo necessariamente assumere:

$$\boxed{\beta^2 \frac{(n_x)^2}{(n_y)^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{n_y}{n_x}} \tag{4.79}$$

Dalla **condizione di tangenza** (4.77) si deriva che il corpo si trasforma con la legge:

$$\left[\left(\frac{dy_c}{dx} - \alpha \right) = \frac{n_y}{n_\phi} \left(\frac{dy_c^*}{dx^*} - \alpha^* \right) \right]_{\text{sul corpo}} \tag{4.80}$$

ovvero : $(\text{corpo nel campo fisico}) = \frac{n_y}{n_\varphi} (\text{corpo nel campo trasformato})$

Per i coefficienti di pressione dalla (4.78):

$$c_p = \frac{n_x}{n_\varphi} c_p^* \quad (4.81)$$

si deriva che $(\text{forza sul corpo fisico}) = \frac{n_x}{n_\varphi} (\text{forza sul corpo trasformato})$

Ovvero: ponendo arbitrariamente

$$n_x = 1 \quad (4.82)$$

ne discende che per simulare un campo incompressibile occorre necessariamente porre:

$$n_y = \beta \quad (4.83)$$

(Ovviamente si sarebbe potuto assumere alternativamente $n_y = 1$ ed $n_x = 1/\beta$)

Varie similitudini discendono dalla scelta di n_φ .

4.5.1 Regola di similitudine di Gothert

$$n_\varphi = \beta^2 \quad (4.84)$$

ne discende per la forma del corpo:

$$\left[\left(\frac{dy_c}{dx} - \alpha \right) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{dy_c^*}{dx^*} - \alpha^* \right) \right]_{\text{sul corpo}} \quad (4.85)$$

$(\text{corpo nel campo fisico}) = \frac{1}{\beta} (\text{corpo nel campo trasformato})$

ne discende per le forze:

$$c_p = \frac{c_p^*}{\beta^2} \quad (4.86)$$

$(\text{forza sul corpo fisico}) = \frac{1}{\beta^2} (\text{forza sul corpo trasformato})$

Cioè il profilo affine incompressibile ha la stessa scala nella direzione x, ma tutte le proprietà che sono correlate alla direzione y^* (ed alla tangente al corpo) vengono ridotte del fattore:

$$\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2} \quad (4.87)$$

tra queste:

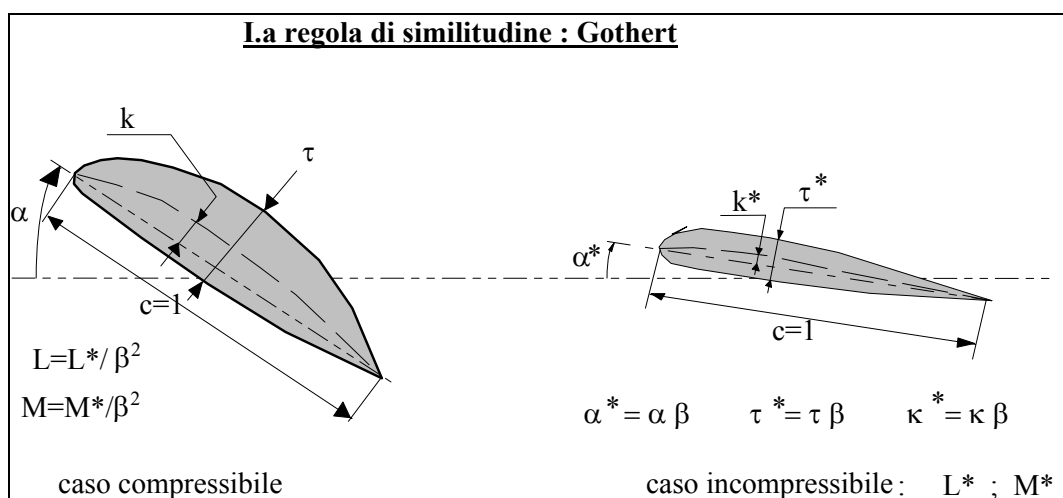
- il rapporto di camber, $m = f_{\max}/c$
- l'angolo di attacco, α
- il rapporto dello spessore massimo, $\tau = t_{\max}/c$

Le forze sono correlate tramite il coefficiente di pressione; ne deriva che Portanza e Momento misurate nel caso compressibile (c_p) sono pari a quelle misurate/calcolate sul profilo affine (deformato) nel caso incompressibile (c_p^*) moltiplicate per il rapporto $1/\beta^2 = 1/(1 - M_\infty^2)$; i.e. la portanza ed il momento nel compressibile saranno maggiori di quelle incompressibili.

In conclusione per la similitudine di Gothert vale la seguente tabella:

	Flusso comprimibile	Flusso incomprimibile
Spessore relativo($\tau = t/c$)	τ	$\tau \sqrt{1 - M_\infty^2}$
Angolo d'attacco (α)	α	$\alpha \sqrt{1 - M_\infty^2}$
Camber relativo ($m = \text{camber}/c$)	m	$m \sqrt{1 - M_\infty^2}$
Coefficiente di pressione (C_p)	C_p	$C_p (1 - M_\infty^2)$
Coefficiente di Portanza (C_l)	C_l	$C_l (1 - M_\infty^2)$

Pittoricamente si ritrova:



Nonostante il rigore della trattazione, viene spontaneo interrogarsi sulla facilità d'uso della legge di Gothert.

In conclusione, infatti, per ritrovare ad esempio la portanza di un dato profilo ad un certo Mach si richiede l'uso di un profilo affine distorto, debitamente più sottile: meno ricurvo e messo ad un angolo di attacco minore.

Una volta misurata/calcolata la portanza di questo profilo in regime incompressibile, si ottiene la portanza del profilo al Mach desiderato, moltiplicandola per il rapporto $1/\beta^2$.

Ovviamente se si vuole la portanza ad un altro Mach, diverso, si dovrà considerare un diverso profilo messo ad un angolo di attacco diverso e dopo la misura della portanza in un moto incompressibile, ricavare quella nel compressibile.

Sono però possibili altre regole di similitudine.

4.5.2 Regola di similitudine di Prandtl-Glauert

$$\boxed{n_\varphi = \beta} \quad (4.88)$$

ne discende per la forma :

$$\boxed{\left[\left(\frac{dy_c}{dx} - \alpha \right) = \left(\frac{dy_c^*}{dx^*} - \alpha^* \right) \right]_{\text{sul corpo}}} \quad (4.89)$$

(corpo nel campo fisico) = (corpo nel campo trasformato)

ne discende per le forze:

$$\boxed{c_p = \frac{c_p^*}{\beta}} \quad (4.90)$$

$$(\text{forza sul corpo fisico}) = \frac{1}{\beta} (\text{forza sul corpo trasformato})$$

Cioè il profilo affine incompressibile ha la stessa forma del profilo compressibile.

Le forze sono correlate tramite il coefficiente di pressione; ne deriva che Portanza e Momento misurate nel caso compressibile (c_p) sono pari a quelle misurate/calcolate sul profilo affine nel caso incompressibile (c_p^*) moltiplicate per il rapporto $1/\beta = 1/\sqrt{1-M_\infty^2}$; i.e. la portanza ed il momento nel compressibile saranno maggiori di quelle incompressibili (a parità di profilo ed assetto).

Ovvia la superiore comodità di questa regola : tutte le misure fatte in campo incompressibile sono estendibili direttamente al comprimibile; chiara e facile l'influenza della compressibilità per uno stesso profilo.

In conclusione per la similitudine di Prandtl-Glauert vale la seguente tabella:

	Flusso comprimibile	Flusso incompressibile
Spessore relativo($\tau = t/c$)	τ	τ
Angolo d'attacco (α)	α	α
Camber relativo ($m = \text{camber}/c$)	m	m
Coefficiente di pressione (C_p)	C_p	$C_p \sqrt{1-M_\infty^2}$
Coefficiente di Portanza (C_l)	C_l	$C_l \sqrt{1-M_\infty^2}$

4.5.3 II.a Regola di similitudine di Prandtl-Glauert

$$\boxed{n_\phi = 1} \quad (4.91)$$

ne discende per la forma :

$$\boxed{\left[\left(\frac{dy_c}{dx} - \alpha \right) = \beta \left(\frac{dy_c^*}{dx^*} - \alpha^* \right) \right]_{\text{sul corpo}}} \quad (4.92)$$

(corpo nel campo fisico) = β (corpo nel campo trasformato)

ne discende per le forze:

$$\boxed{c_p = c_p^*} \quad (4.93)$$

(forza sul corpo fisico) = (forza sul corpo trasformato)

Cioè il profilo affine incompressibile ha la stessa scala nella direzione x, ma tutte le proprietà che sono correlate alla direzione y^* (ed alla tangente al corpo) vengono amplificate del fattore:

$$\boxed{\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}} \quad (4.94)$$

tra queste:

- il rapporto di camber, $m = f_{\max}/c$
- l'angolo di attacco, α
- il rapporto dello spessore massimo, $\tau = t_{\max}/c$

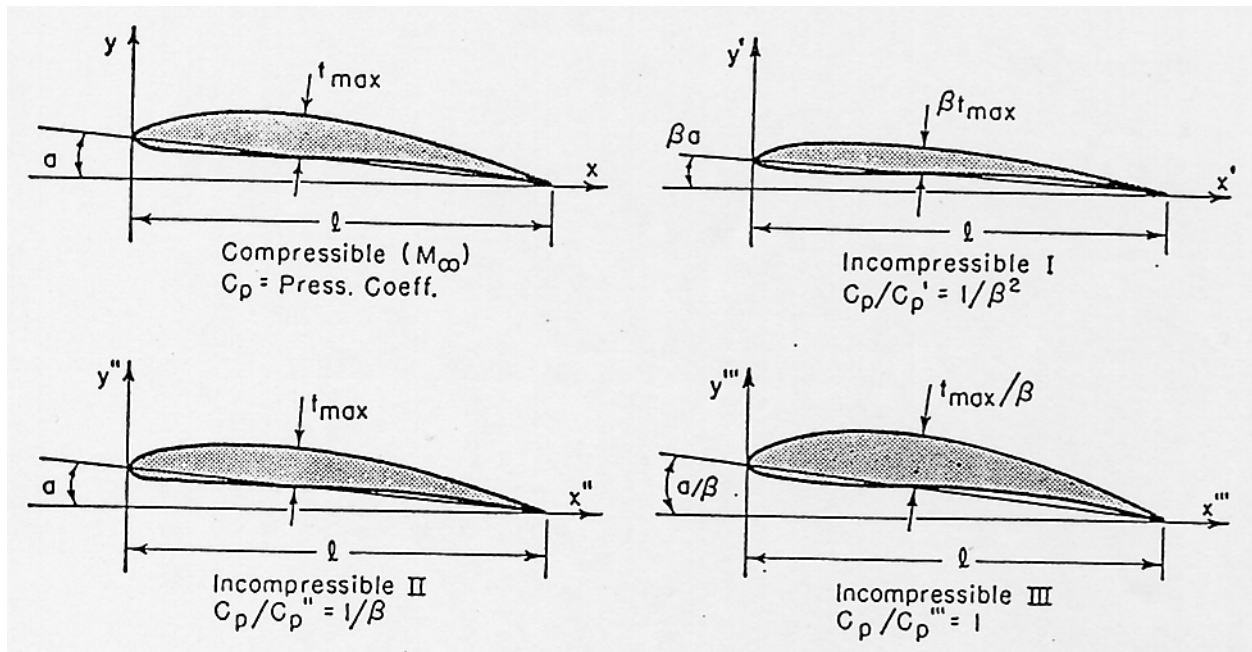
Le forze sono correlate tramite il coefficiente di pressione; ne deriva che Portanza e Momento misurate nel caso compressibile (c_p) sono pari a quelle misurate/calcolate sul profilo affine (deformato) nel caso incompressibile (c_p^*); i.e. la portanza ed il momento nel compressibile saranno uguali a nell'incompressibile.

Ovviamente questa similitudine fornisce le forme di corpi che nell'incompressibile generano le stesse forze del compressibile (utile per predire la separazione dello strato limite).

In conclusione per la seconda similitudine di Prandtl-Glauert vale la seguente tabella:

	Flusso comprimibile	Flusso incompressibile
Spessore relativo($\tau = t/c$)	τ	$\tau/\sqrt{1-M_\infty^2}$
Angolo d'attacco (α)	α	$\alpha/\sqrt{1-M_\infty^2}$
Camber relativo ($m = \text{camber}/c$)	m	$m/\sqrt{1-M_\infty^2}$
Coefficiente di pressione (C_p)	C_p	C_p
Coefficiente di Portanza (C_l)	C_l	C_l

Le tre regole di similitudine sono illustrate (qualitativamente) nella figura che segue.



Queste conclusioni possono essere riassunte schematicamente come:

$$\text{Regola (Gothert)} \quad [c_p]_{M_\infty, \alpha, \tau, k} = \frac{1}{1-M_\infty^2} [c_p]_{0, \beta\alpha, \beta\tau, \beta k} \quad (4.95)$$

$$\text{Regola (Prandtl-Glauert)} \quad [c_p]_{M_\infty, \alpha, \tau, k} = \frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} [c_p]_{0, \alpha, \tau, k} \quad (4.96)$$

$$\text{Regola (II.a Prandtl-Glauert)} \quad [c_p]_{M_\infty, \alpha, \tau, k} = [c_p]_{0, \alpha/\beta, \tau/\beta, k/\beta} \quad (4.97)$$

Ovviamente le stesse formulazioni valgono per c_L e c_M .

Per la cronaca la I e la II regola di Prandtl-Glauert furono originalmente presentate in modo incorretto. Il fallito tentativo di un loro uso per campi assialsimmetrici richiamò l'attenzione ad un'analisi più precisa da parte di Gothert.

Nel prosieguo la dizione "regola/similitudine di Prandtl-Glauert" si riferirà alla I.a regola qui presentata.



Esercizio 4.2

Considera un profilo con:

$$\tau = 0.05 \quad m = 0.02 \quad \alpha = 4^\circ \quad (C_l)_{M=0} = 0.8$$

Usando la similitudine di Gothert determina le prestazioni in regime comprimibile con $M_\infty=0.6$ e quale dovrebbero essere i parametri geometrici del profilo simile

$$[C_{l(M=0.6)}=1.25, \quad \tau_{(M=0.6)}=0.0625, \quad \alpha_{(M=0.6)}=5^\circ, \quad m_{(M=0.6)}=0.025]$$

Usando la similitudine di Prandtl-Glauert determina il C_l dello stesso profilo in regime comprimibile con $M_\infty=0.6$ e quale dovrebbero essere i parametri geometrici del profilo simile se il coefficiente di pressione del profilo fosse pari a 0.8 allo stesso Mach.

$$[\text{I.a regola:} \quad C_{l(M=0.6)}=1.0]$$

$$[\text{II.a regola} \quad \tau_{(M=0.6)}=0.04, \quad \alpha_{(M=0.6)}=3.2^\circ, \quad m_{(M=0.6)}=0.016]$$

4.6 Correzioni di compressibilità di Laitone e di Karman-Tsien

La teoria lineare, ovviamente, è limitata a regioni dove la perturbazione è piccola, ovvero laddove i valori dei coefficienti di pressione c_p sono relativamente piccoli.

La teoria linearizzata ha consentito di introdurre nelle formule di correzione della compressibilità il valore del Mach asintotico M_∞ .

Ovviamente, essendo il fenomeno locale, una migliore approssimazione si potrebbe ottenere introducendo il Mach locale, M_L al posto di quello asintotico, M_∞ .

In questo caso si otterrebbero approssimazioni migliori, ma i risultati sarebbero, rigorosamente, validi puntualmente invece che globalmente.

Questa è l'ipotesi di Laitone il quale assume come punto di partenza:

$$[c_p]_M = \frac{[c_p]_0}{\sqrt{1-M_L^2}} \quad (4.98)$$

L'ipotesi di isentropicità permette di collegare le pressioni locali a quelle asintotiche (costanza della pressione di ristagno):

$$\frac{p_L}{p_\infty} = \frac{p_L/p_0}{p_\infty/p_0} = \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_L^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.99)$$

Questa consente di esprimere il c_p in termini del M_L e quindi di ottenere:

$$M_L^2 = \left(M_\infty^2 + \frac{2}{\gamma-1} \right) \left(1 + \frac{\gamma M_\infty^2}{2} c_p \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{2}{\gamma-1} \quad (4.100)$$

ovvero, linearizzando, per piccoli valori di c_p :

$$M_L^2 \approx \left(M_\infty^2 + \frac{2}{\gamma-1} \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 c_p + \dots \right) - \frac{2}{\gamma-1} \approx M_\infty^2 - \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \right) M_\infty^2 c_p + \dots \quad (4.101)$$

Questa espressione di M_L sostituita nella regola di correzione fornisce la **legge di correzione di Laitone**:

$$[c_p]_M = \frac{[c_p]_0}{\sqrt{1-M_\infty^2} + \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2\right) M_\infty^2}{2\sqrt{1-M_\infty^2}} [c_p]_0} \quad (4.102)$$

espressione che per piccoli valori di $[c_p]_0$ tende a quella di Prandtl-Glauert.

Notare l'influenza che ha il segno di $[c_p]_0$ sulla correzione: **gli effetti della compressibilità sono (localmente) maggiori nelle zone di espansione** (in accordo con gli esperimenti).

Un'altra famosa legge di correzione è quella di **Karman-Tsien**, che utilizza una soluzione nel campo dell'odografo, con l'ipotesi di trasformazione isentropica linearizzata (*tangent gas*).

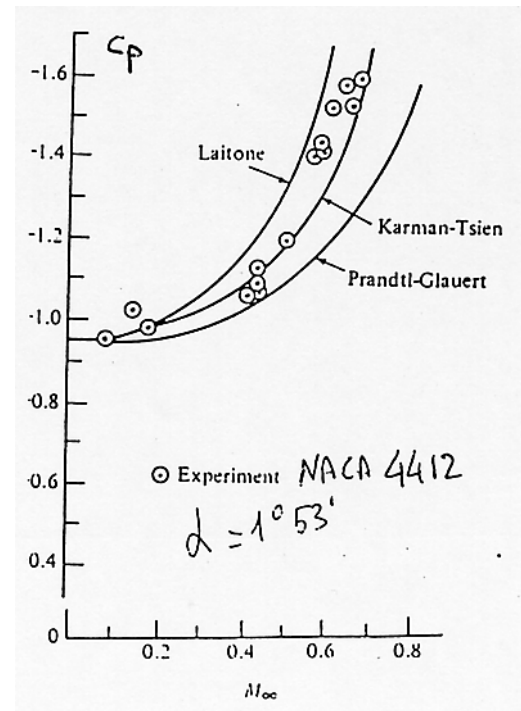
La legge di correzione risultante è sorprendentemente molto simile a quella di Laitone:

$$[c_p]_M = \frac{[c_p]_0}{\sqrt{1-M_\infty^2} + \frac{1}{2} \frac{M_\infty^2}{1+\sqrt{1-M_\infty^2}} [c_p]_0} \quad (4.103)$$

questa relazione è nota come **regola di Karman-Tsien**.

A lato grafici, che dimostrano il confronto delle tre regole esaminate con esperimenti fatti su di un profilo NACA 4412 ad angolo di attacco $\alpha=1^\circ 53'$.

Da questi si evince la superiorità delle regole di Laitone e di Karman-Tsien rispetto a quella di Prandtl-Glauert.



4.7 Mach critico (inferiore) di un profilo

Consideriamo, come nella figura a lato, un profilo che viene provato a diversi valori del Mach asintotico.

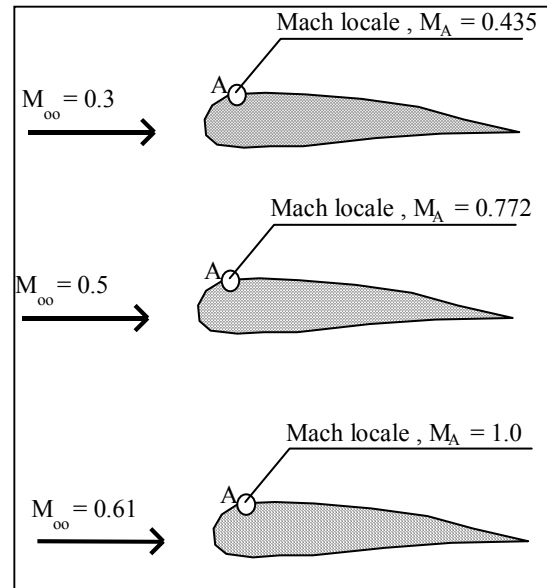
Esisterà un punto del profilo dove la corrente, nell'espandersi, raggiunge la massima velocità (minima pressione): la localizzazione di questo punto ed il valore del rapporto della velocità massima locale rispetto a quella asintotica (i.e il valore del $c_{p,min}$) dipende ovviamente dal profilo.

Il valore del $c_{p,min}$ è proporzionale in prima approssimazione oltre che all'angolo d'attacco, allo spessore (per un cilindro (regime incomprimibile) tale rapporto di velocità è 2).

Ovviamente per moti adiabatici isentropici nel punto di massima velocità si realizzerà il massimo valore locale del numero di Mach locale.

All'aumentare del Mach asintotico, M_∞ , il Mach locale M_A aumenterà di conseguenza.

Esisterà un valore del Mach asintotico per cui il massimo valore del Mach locale diventa unitario.



Questo valore di M_∞ è detto **Mach critico inferiore del profilo**.

Per l'esempio in figura: $M_{cr} = 0.61$.

La regola di similitudine di Prandtl-Glauert

$$[c_p]_{M_\infty} = \frac{[c_p]_0}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \quad (4.104)$$

permette di stimare come il coefficiente di pressione in un punto della superficie di un profilo aumenta all'aumentare del Mach asintotico subsonico nei confronti del valore assunto in campo incompressibile.

Essendo infatti il flusso certamente omoentropico, possiamo correlare le pressioni locali ai Mach locali (essendo costante la pressione di ristagno):

$$\frac{p_A}{p_\infty} = \frac{p_A/p_0}{p_\infty/p_0} = \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_A^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.105)$$

da cui il coefficiente di pressione nel punto A è:

$$c_{pA} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left\{ \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_A^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \quad (4.106)$$

Quando $M_A=1$ il Mach asintotico diventa, per la definizione data sopra, il Mach critico inferiore M_{cr} .

Ne discende la seguente relazione tra il coefficiente di pressione critico ed il Mach critico:

$$c_{p_{cr}} = \frac{2}{\gamma M_{cr}^2} \left\{ \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{cr}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} 1} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right\} \quad (4.107)$$

Questa relazione rappresenta una relazione $c_{p_{cr}} = f(M_{cr})$ che insieme alla relazione di Prandtl Glauert con cui il coefficiente di pressione minimo varia con Mach: i.e. $c_{p_{min}} = g(M_\infty)$, ci consente di determinare facilmente il M_{cr} come intersezione di due curve nel piano c_p/M :

1. ottenuto, per un dato profilo, il valore del $c_{p \min}$ in campo incompressibile ($M=0$)
2. tracciare per questo punto una curva secondo la regola di P-G :

$$[c_p]_{\min, M_\infty} = \frac{[c_p]_0}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} = g(M_\infty) \quad (4.108)$$

3. tracciare la curva $c_{p \text{ cr}} = f(M_{\text{cr}})$
4. l'intersezione delle due curve fornisce il valore del M_{cr}

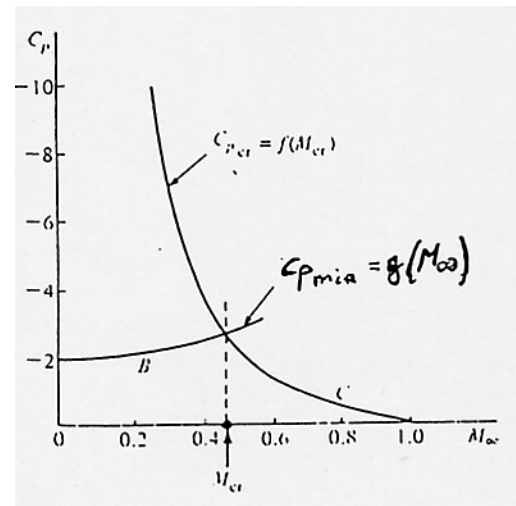
La figura che segue mostra il valore del Mach critico inferiore di un profilo avente un $c_{p, \min \text{ incomp.}}$ pari a (-2).

A valori di $M_\infty > M_{\text{cr}}$, esisterà sul profilo una regione in cui il flusso è localmente supersonico (**sacca supersonica**).

Il Mach locale in questa sacca può diventare abbastanza elevato specialmente sul dorso del profilo, tanto da dover richiedere una compressione per poter soddisfare la condizione di Kutta sul bordo di uscita.

Poiché la supersonica è praticamente incompatibile con compressioni isentropiche, ne nasce un sistema di onde d'urto che oltre a causare una perdita nella pressione di ristagno (in verità non molto grande), deve coesistere con lo strato limite presente sulla parete del profilo.

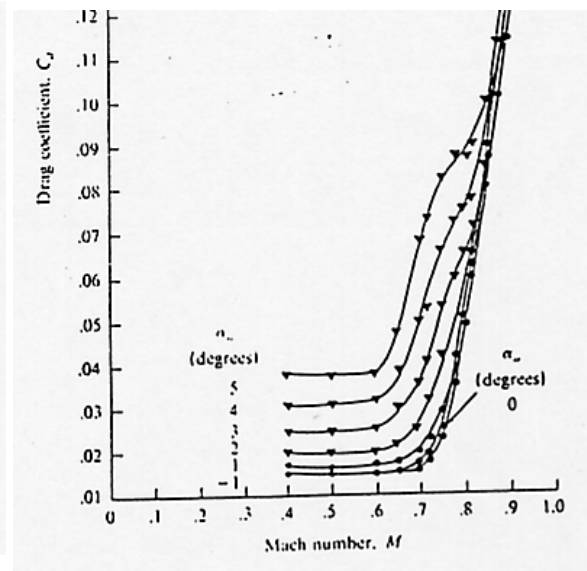
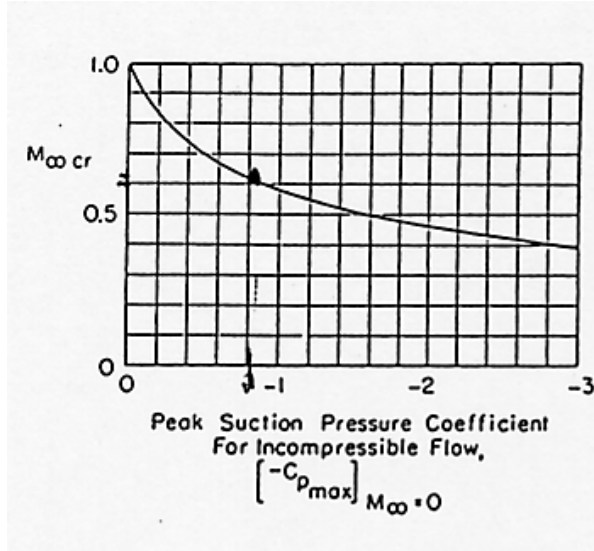
Si genera così una interazione che può causare separazione dello strato limite con ovvie ripercussioni sulla polare del profilo..



Ne discende infatti, in caso di separazione, che la resistenza del profilo aumenta considerevolmente in modo brusco.

Il valore del M_∞ per cui avviene questo brusco aumento della resistenza è chiamato **Mach critico di divergenza della resistenza**, ed è quello di reale interesse in quanto rappresenta la soglia dove inizia il cosiddetto **muro del suono**.

Si riportano di seguito grafici in cui si usa la regola di Karman Tsien per la determinazione del Mach critico inferiore assegnato il valore del picco (negativo) del c_p incompressibile.



4.8 Similitudine per campi tridimensionali compressibili subsonici (*)

La **regola di similitudine di Gothert**, al contrario di quelle di Prandtl-Glauert, può essere estesa a campi linearizzati subsonici potenziali tri-dimensionali.

Con la nomenclatura della figura a lato, denotando con $\mathfrak{R}$ l'allungamento alare, si arriva con la stessa procedura usata per il bidimensionale alla seguente regola di similitudine:

$$[c_p]_{M_\infty, \alpha, \tau, \mathfrak{R}, x/\ell, y/t, z/b} = \frac{1}{1 - M_\infty^2} [c_p]_{0, \beta\alpha, \beta\tau, \beta\mathfrak{R}, x/\ell, \beta y/t, \beta z/b} \quad (4.109)$$

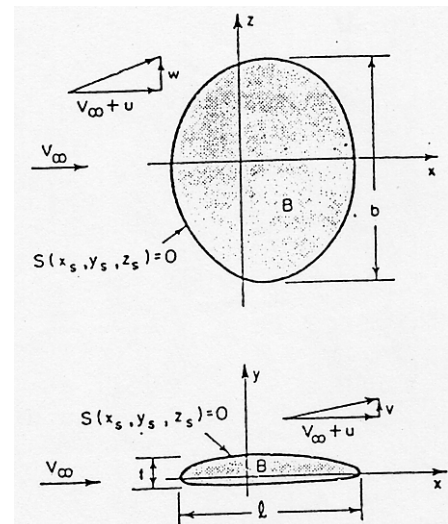
praticamente simile alla I.a regola di Gothert per il caso bidimensionale.

Nei limiti della teoria lineare la relazione per i coefficienti di pressione vale per punti omologhi; per cui la relazione trovata si estende anche ai coefficienti di portanza e di momento:

$$\frac{[c_L]_{M_\infty, \alpha, \tau, \mathfrak{R}}}{[c_L]_{0, \beta\alpha, \beta\tau, \beta\mathfrak{R}}} = \frac{[c_M]_{M_\infty, \alpha, \tau, \mathfrak{R}}}{[c_M]_{0, \beta\alpha, \beta\tau, \beta\mathfrak{R}}} = \frac{1}{1 - M_\infty^2} \quad (4.110)$$

Questa relazione può servire a stimare **gli effetti del Mach su di un'ala con fissati: angolo di attacco, rapporto di spessore ed allungamento**.

Richiamiamo alcune conclusioni delle teorie alari ellittiche incompressibili:



$$\left(\frac{\partial C_{Li}}{\partial \alpha} \right)_{\Re} \cong \frac{(\partial C_{Li}/\partial \alpha)_{\infty}}{1 + \frac{1}{\pi \Re} \left(\frac{\partial C_{Li}}{\partial \alpha} \right)_{\infty}} \quad (4.111)$$

Assumendo per profili sottili all'incirca:

$$(\partial C_{Li}/\partial \alpha)_{\infty} \cong 0.9(2\pi) \quad (4.112)$$

la dipendenza del coefficiente della retta di portanza dall'allungamento è:

$$\left(\frac{\partial C_{Li}}{\partial \alpha} \right)_{\Re} \cong \frac{5.65}{1 + (1.8/\pi \Re)} \quad (4.113)$$

Consideriamo l'identità:

$$\frac{[\partial C_L/\partial \alpha]_{M_{\infty}, \tau, \Re}}{[\partial C_L/\partial \alpha]_{0, \tau, \Re}} = \frac{[\partial C_L/\partial \alpha]_{M_{\infty}, \tau, \Re}}{[\partial C_L/\partial \alpha]_{0, \beta \tau, \beta \Re}} \times \frac{[\partial C_L/\partial \alpha]_{0, \beta \tau, \beta \Re}}{[\partial C_L/\partial \alpha]_{0, \tau, \beta \Re}} \times \frac{[\partial C_L/\partial \alpha]_{0, \tau, \beta \Re}}{[\partial C_L/\partial \alpha]_{0, \tau, \Re}} \quad (4.114)$$

- Il primo rapporto a destra dell'equazione si può ricavare dalla regola di Gothert.
- Il secondo si può ricavare ipotizzando che si tratta del rapporto di due profili affini in campo compressibile, che dipenderà dal rapporto degli angoli di attacco affini, che nella fattispecie è β .
- Il terzo direttamente dalla dipendenza di $C_{L\alpha}$ da $\Re$.

Se ne ricava:

$$\frac{[\partial C_L/\partial \alpha]_{M_{\infty}, \tau, \Re}}{[\partial C_L/\partial \alpha]_{0, \tau, \Re}} = \frac{1}{\beta^2} \times \beta \times \frac{1 + 1.8/\Re}{1 + 1.8/(\beta \Re)} = \frac{1.8 + \Re}{1.8 + \Re \sqrt{1 - M_{\infty}^2}} \quad (4.115)$$

La figura a lato riproduce tale relazione.

Per allungamento infinito la curva si riduce alla regola Prandtl-Glauert per 2D:

$$\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_{M_{\infty}} \approx \frac{\left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_0}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}} \quad (4.116)$$

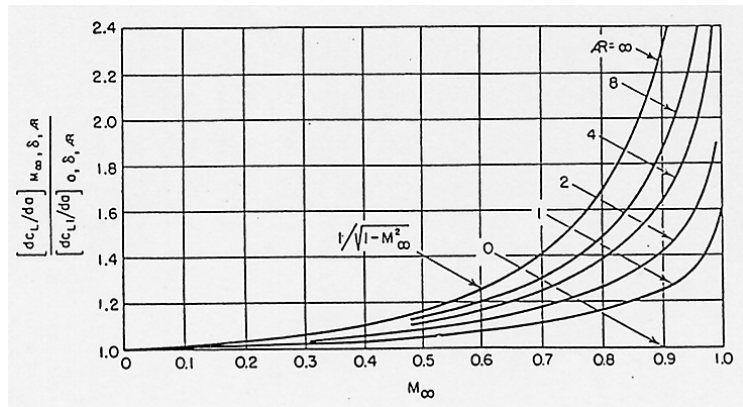
E' interessante notare che per piccoli allungamenti, ad es. $\Re=3$, gli effetti della compressibilità sono all'incirca la metà di quelli per grandi allungamenti.

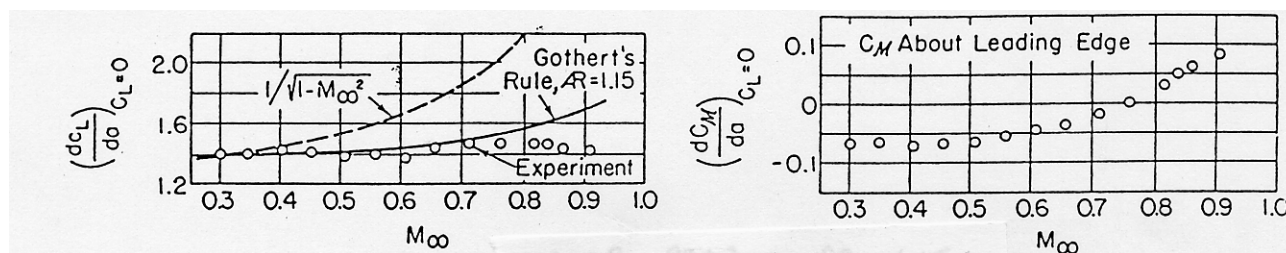
Questo può essere importante per i piani di coda degli aerei (di solito questi hanno basso allungamento) che possono divenire meno efficaci dell'ala ad alti Mach, con ovvi problemi di stabilità longitudinale.

Il trend degli **effetti della compressibilità sull'incidenza indotta** ne deriva semplicemente:

$$\frac{[C_{Dind.}]_{M_{\infty}, \tau, \Re}}{[C_{Dind.}]_{0, \tau, \Re}} = \frac{[C_L]_{M_{\infty}, \tau, \Re}^2}{[C_L]_{0, \tau, \Re}^2} = \left\{ \frac{1.8 + \Re}{1.8 + \Re \sqrt{1 - M_{\infty}^2}} \right\}^2 \quad (4.117)$$

La figura sottostante mostra come la regola sopra trovata correla molto meglio di quella semplice di P-G le misure sperimentali :

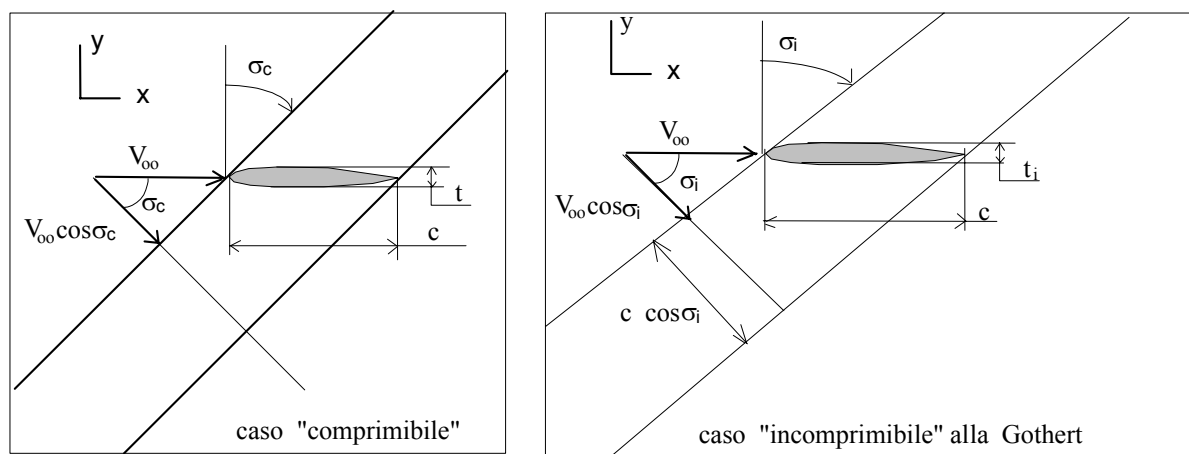




4.9 Effetti della compressibilità sulle Ali a freccia (*)

Uno dei metodi usati per mitigare gli affetti della compressibilità è di porre l'ala con il bordo di attacco ad un angolo non ortogonale alla velocità asintotica.

Consideriamo lo schema della figura, nella quale un'ala di allungamento infinito (e sezione costante) è posta con un'angolo di freccia " σ " rispetto alla corrente.



Considerazioni fisiche ci portano a concludere che la componente della velocità asintotica parallelamente all'asse dell'ala, $V_\infty \sin \sigma_c$, non produrrà (al primo ordine) modifiche sostanziali alla distribuzione delle pressioni, ma soltanto effetti viscosi (ingrossamento dello strato limite), che non interessano in questo contesto.

Ne risulta, per esclusione, che soltanto la componente (della velocità asintotica) normale al bordo di attacco dell'ala, $V_\infty \cos \sigma_c$, produrrà effetti sulla distribuzione delle pressioni.

All'aumentare dell'angolo di freccia si può immaginare che la freccia introduca effetti tridimensionali che, permettendo lo scivolamento del flusso d'aria lungo l'ala, alleviano la corrente nel superare l'ostacolo.

Ne possiamo quindi dedurre dall'angolo di freccia **effetti benefici**:

- diminuisce il Mach effettivo normale all'ala,
- **aumenta l'efficienza aerodinamica - velocità di volo maggiori**,
- maggiore efficienza del propulsore causa la minore interferenza;

ed **effetti non benefici**:

- minore portanza per unità di area, occorre maggiore area,
- problemi di resistenza strutturale,
- costi di costruzione maggiori,
- aumenta lo spessore apparentemente visto dalla corrente effettiva (piccolo effetto geometrico).

L'applicazione delle regola di Gothert presuppone di paragonare un problema compressibile con un caso incomprimibile in cui le dimensioni longitudinali (i.e. la corda " c ") sono rimaste invariate, mentre quelle normali alla direzione del moto sono diminuite di " β ".

Assumendo allungamento infinito, vale:

$$\tau_i = \frac{t_i}{c_i} = \frac{t_c}{c_c} \times \frac{c_c}{c_i} \times \frac{t_i}{t_c} = \frac{t_c}{c_c} \times 1 \times \beta = \beta \tau_c \quad (4.118)$$

$$B_i \equiv \tan \sigma_i = \left[\left(\frac{dx}{dy} \right)_{bda} \right]_{inc} = \left[\left(\frac{dx}{dy} \right)_{bda} \right]_{comp} \times \frac{y_c}{y_i} \times \frac{x_i}{x_c} = \left[\left(\frac{dx}{dy} \right)_{bda} \right]_{comp} \times \frac{1}{\beta} \times 1 = \frac{1}{\beta} \tan \sigma_c \equiv \frac{1}{\beta} B_c \quad (4.119)$$

in punti *omologhi* risulta quindi:

$$\left(\frac{u_c}{V_\infty} \right)_{comp} = \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{u_i}{V_\infty} \right)_{inc} \quad (4.120)$$

Per poter stimare l'influenza della compressibilità, postuliamo che l'ala (ellittica) è composta con profili per i quali, in campo incompressibile, il rapporto della velocità di disturbo (componente x) e della velocità asintotica è proporzionale al rapporto di spessore: $(-c_p)_{max} \propto (u/V_\infty)_{max} \approx t/c = \tau$.

Avendo assunto che nell'ala a freccia l'unica componente della velocità che ha effetto è quella normale all'ala: $V^N = V_\infty \cos \sigma$, notiamo che questa componente vedrà (normalmente) un profilo il cui spessore è sempre "t" ma la cui corda apparente è "c / cos σ", per cui creerà effetti paragonabili ad un profilo avente una rapporto di spessore "τ^N = τ cos σ" che causerà quindi, nelle ipotesi fatte, una velocità di disturbo "u^N = u cos σ"

Ovviamente se l'ala in campo incompressibile è posta con un angolo di freccia σ_i, la stessa considerazione deve applicarsi alle componenti effettive quali: spessore t_i, velocità asintotica V_∞ cos σ_i, disturbo di velocità u_i cos σ_i;

per cui la relazione di proporzionalità diventa:

$$(-c_{p,i})_{max} \propto \left(\frac{u_i / \cos \sigma_i}{V_\infty \cos \sigma_i} \right)_{max} \approx \frac{\tau_i}{(\cos \sigma_i)^2} = \frac{\tau_i^N}{\cos \sigma_i} \quad (4.121)$$

ovvero:

$$\left(\frac{u_i}{V_\infty} \right)_{max} = \left(\frac{t_i}{c_i} \right) \cos \sigma_i = \frac{t_i}{c_i} \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan \sigma_i)^2}} = \frac{\tau_i}{\sqrt{1 + (\tan \sigma_i)^2}} \quad (4.122)$$

Dalle relazioni sopra ritrovate (tra parametri compressibili ed incompressibili) si ricava:

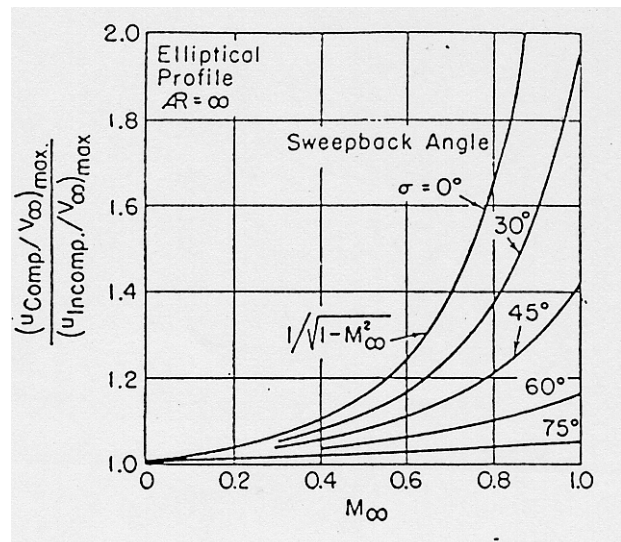
$$\left(\frac{u_c}{V_\infty} \right)_{max} = \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{u_i}{V_\infty} \right)_{max} = \frac{1}{\beta^2} \frac{t}{c_i} \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan \sigma_i)^2}} = \frac{1}{\beta} \frac{t}{c_c} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tan \sigma_c}{\beta} \right)^2}} = \frac{\tau_c}{\sqrt{\beta^2 + (\tan \sigma_c)^2}} \quad (4.123)$$

Per cui il rapporto tra le massime velocità di perturbazione:

$$\frac{(-c_{pc})_{max}}{(-c_{pi})_{max}} \propto \frac{(u_c/V_\infty)_{max}}{(u_i/V_\infty)_{max}} \approx \frac{\sqrt{1 + (\tan \sigma_c)^2}}{\sqrt{1 - M_\infty^2 + (\tan \sigma_c)^2}} \quad (4.124)$$

Questa formula è diagrammata nella figura sovrastante; si nota che passando da M=0 a Mach =0.8, il coefficiente di pressione aumenta del 67% per un'ala dritta ma soltanto del 39% per un'angolo di 30°

Tale analisi può essere usata per dedurre come **l'angolo di freccia influenza il Mach critico inferiore**; i risultati per ali aventi profili con vari rapporti di spessori



sono presentati in figura.

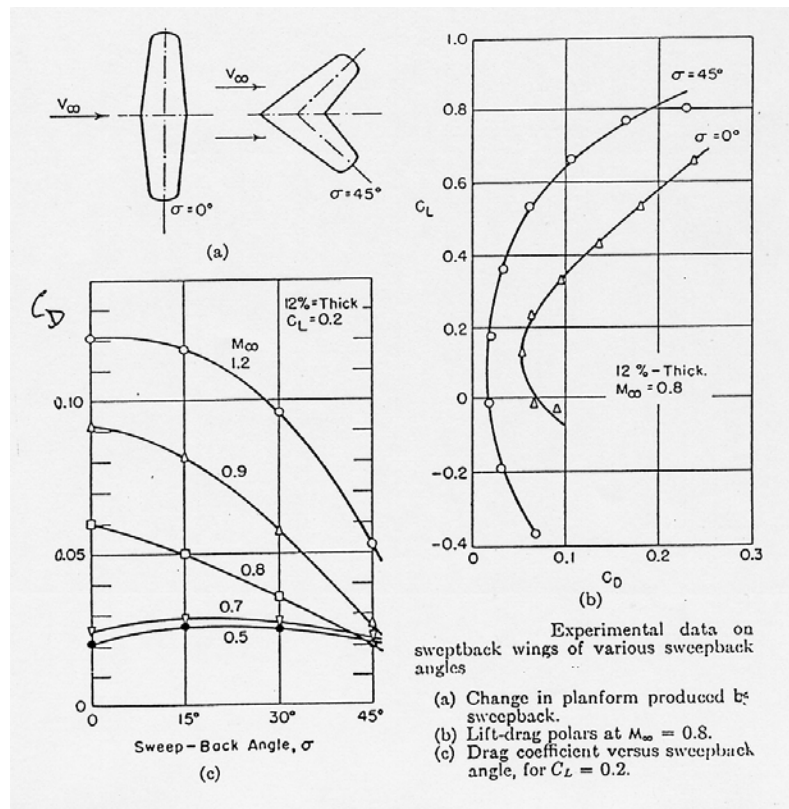
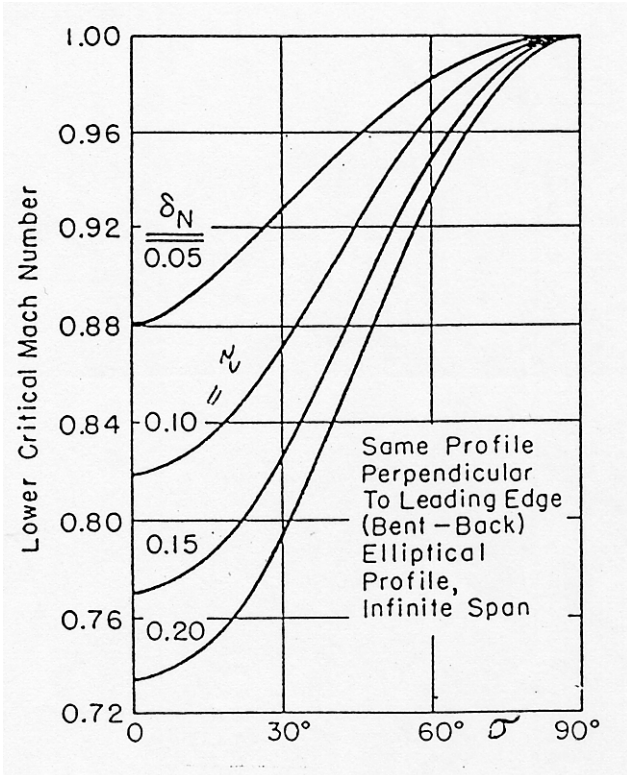
Per costruire tali diagrammi occorre considerare che la freccia fa apparire il profilo più spesso $\tau = \tau_N \cos \sigma$, per cui la formula corretta risulta essere:

$$\left(\frac{u_c}{V_\infty} \right)_{\max} = \frac{\tau_c^N \cos \sigma}{\sqrt{1 - M_\infty^2 + (\tan \sigma)^2}} \quad (4.125)$$

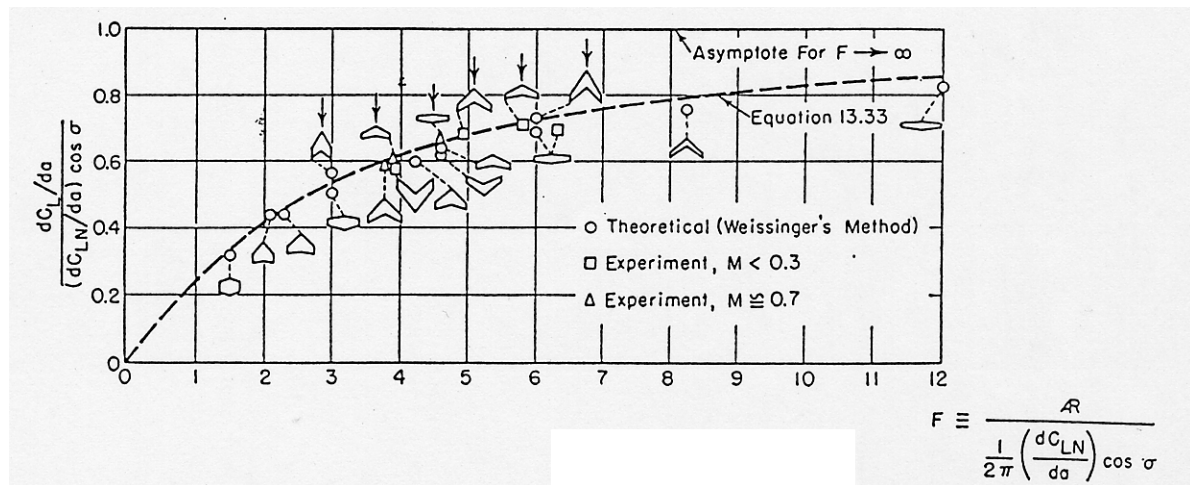
Un angolo di freccia di 45° applicato su di un'ala con un profilo avente $\tau_N = 10\%$, fa passare il Mach critico da 0.82 a 0.93.

Per **ali ad allungamento finito** l'effetto benefico della compressibilità si somma a quello derivante dall'angolo di freccia.

Le figure riportate in seguito mostrano dati sperimentali di due polari per ali a freccia nulla e freccia 45° , nonché il variare del coefficiente di resistenza (calcolato a $C_L = 0.2$, i.e. condizioni prossime a quelle di crociera, spessore 12%), al variare dell'angolo di freccia, e di vari Mach asintotici. In questa figura (c) è interessante notare come l'effetto sulla resistenza è praticamente nullo fino a Mach ≈ 0.7 .



Una correlazione che incorpora gli effetti dell'allungamento e della freccia, sul coefficiente della retta di portanza sono riportati nella figura in cui C_L denota il coefficiente di portanza dell'ala e C_{LN} il coefficiente di portanza del profilo dell'ala relativo alla velocità ed alla corda normale al bordo di attacco.



Una correlazione di tale curva è data dalla formula:

$$\frac{dC_L/d\alpha}{(dC_{LN}/d\alpha) \cos \sigma} = \frac{F}{2 + F\sqrt{1 + 4/F^2}} \quad (4.126)$$

4.10 Flussi Supersonici Linearizzati - Teoria di Ackeret

L'equazione del potenziale del disturbo di velocità linearizzata, ha la forma:

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \quad (4.127)$$

Per campi subsonici si era posto $\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$ e l'equazione veniva scritta come:

$$\beta^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \quad (4.128)$$

Per **campi supersonici**, $M_\infty > 1$, si pone $\lambda = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$ e l'equazione viene scritta come:

$$\lambda^2 \varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = 0 \quad (4.129)$$

La differenza tra le due equazioni è fondamentale, in quanto quella valida nel subsonico è di tipo ellittico, mentre quella valida nel supersonico è di tipo iperbolico.

Ricordiamo le limitazioni della validità dell'equazione (4.13), derivanti dalle condizioni:

$$\frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \frac{u'}{V_\infty} \ll 1 \quad \text{e} \quad M_\infty^2 \frac{v'}{V_\infty} \ll 1 \quad \text{che elimina il regime transonico:} \quad M_\infty \geq 0.8 \div 1.4 \quad (4.130)$$

$$\frac{u'}{V_\infty}, \frac{v'}{V_\infty} = O(\varepsilon) \quad \leftrightarrow \quad M_\infty^2 \varepsilon < 1 \quad \text{che elimina il regime ipersonico:} \quad M_\infty \leq 5 \quad (4.131)$$

qui " ε " è la misura della massima perturbazione : $\varepsilon = \max[\alpha, \tau, m]$

Valgono le stesse derivazioni fatte in precedenza, i.e. risulta:

❖ per la condizione di tangenza:

$$\frac{dy_c}{dx} = \frac{\varphi_y}{V_\infty} + \alpha \rightarrow \varphi_y = V_\infty \left(\frac{dy_c}{dx} - \alpha \right) \quad (4.132)$$

❖ per il coefficiente di pressione:

$$c_p = -2 \frac{u'}{V_\infty} \quad (4.133)$$

Ovviamente la teoria delle piccole perturbazioni in supersonica è rigorosamente limitata a campi irrotazionali, isentropici, quindi in situazioni in cui non si formano onde d'urto. Ne derivano problemi di facile soluzione, sia in via numerica che grafica.

In realtà urti di intensità variabile sono sempre presenti in supersonica. I risultati della teoria linearizzata sono quindi applicabili solo allorquando l'intensità degli urti è piccola e non si introduce una apprezzabile rotazionalità.

Consideriamo dapprima la possibilità di una similitudine supersonica.

Ovviamente procediamo secondo le linee della similitudine subsonica, anche se il nostro obiettivo non sarà stavolta il campo Laplaciano, bensì un campo retto dall'equazione delle onde

$$\varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = 0 \quad (4.134)$$

Considerando la trasformazione:

$$\xi = x \quad \eta = \lambda y \quad \zeta = \lambda z \quad \phi(\xi, \eta, \zeta) = \lambda^2 \varphi(x, y, z) \quad (4.135)$$

E' immediato verificare che l'equazione di campo si trasforma in:

$$\boxed{\phi_{\xi\xi} = \phi_{\eta\eta} + \phi_{\zeta\zeta}} \quad (4.136)$$

cioè nell'**equazione delle onde** nel piano trasformato (ξ, η, ζ) .

E' interessante notare che il piano fisico ed il piano trasformato, coincidono qualora sia

$$M_\infty = \sqrt{2} \rightarrow \lambda^2 = (M_\infty)^2 - 1 = (\sqrt{2})^2 - 1 = 1 \quad (4.137)$$

Dal che si spiega il perchè dell'interesse per tunnel supersonici con $M = 1.414$.

Facciamo notare che:

- ❖ il piano trasformato, $\phi(\xi, \eta, \zeta)$, si riferisce a corpi le cui dimensioni laterali (ortogonali alla direzione della corrente asintotica) sono amplificate del fattore λ , rispetto al corpo originale.
- ❖ i coefficienti di pressione nei punti omologhi dei corpi affini nei due campi sono correlati da:

$$c_p^* = -\frac{2}{V_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = -\frac{2}{V_\infty} \lambda^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} = \lambda^2 c_p \quad (4.138)$$

Ovviamente c_p^* può essere pensato come il coefficiente di pressione a $M_\infty = 1.4142$ per un corpo le cui dimensioni laterali sono λ -volte più grandi delle corrispondenti dimensioni laterali di un corpo che presenta un coefficiente di pressione c_p per $M_\infty \neq 1.414$.

Con le stesse motivazioni fatte precedentemente, ne derivano leggi di similitudine.

Siano:

- τ , il rapporto di spessore,
- $\Re$ l'allungamento alare
- α l'angolo di attacco
- ℓ, b, t le dimensioni caratteristiche nelle direzioni x, y, z

La **prima legge di similitudine supersonica** può essere simbolicamente espressa come:

$$\boxed{[c_p]_{M_\infty, \tau, \alpha, \Re, x/\ell, y/b, z/t} = \frac{1}{\lambda^2} [c_p]_{\sqrt{2}, \lambda\tau, \lambda\alpha, \lambda\Re, x/\ell, \lambda y/b, \lambda z/t}} \quad (4.139)$$

Nell'ipotesi della linearità, il coefficiente di pressione in supersonica è proporzionale sia all'angolo di attacco che al rapporto di spessore, se queste due variabili sono cambiate simultaneamente e proporzionalmente (*vedi la condizione di tangenza al corpo*).

Applicando questo concetto al termine a destra si può ottenere l'espressione della **seconda regola di similitudine supersonica**:

$$\boxed{[c_p]_{M_\infty, \tau, \alpha, \Re, x/\ell, y/b, z/t} = \frac{1}{\lambda} [c_p]_{\sqrt{2}, \tau, \alpha, \lambda\Re, x/\ell, y/b, z/t}} \quad (4.140)$$

che può essere letta:

il coefficiente di pressione in un punto di un campo supersonico a M_∞ attorno ad un corpo è di $1/\lambda$ volte di quello nel punto corrispondente a $M_\infty = 1.414$ attorno ad un'ala simile con la sola eccezione dell'allungamento alare che è di λ -volte maggiore.

Per integrazione, il coefficiente di portanza sarà trasformato come:

$$\boxed{[C_L]_{M_\infty, \tau, \alpha, \Re} = \frac{1}{\lambda} [C_L]_{\sqrt{2}, \tau, \alpha, \lambda \Re}} \quad (4.141)$$

Stesse relazioni valgono per i coefficienti di momento e di resistenza d'onda.

4.10.1 Soluzione Generale dell'equazione del potenziale di velocità del disturbo in supersonica.

Prima di analizzare la ricerca delle soluzioni, esaminiamo le differenze dei due regimi sub e super-sonico che si possono evincere dalla lettura delle equazioni linearizzate scritte in termini di componenti della velocità di perturbazione.

Per entrambi i casi (piani) vale:

$$\frac{\partial v'}{\partial y} = (M_\infty^2 - 1) \frac{\partial u'}{\partial x} \quad (4.142)$$

da questa si evince che:

- in subsonico $\frac{\partial v'}{\partial y}$ ha segno opposto di $\frac{\partial u'}{\partial x}$ (4.143)

- in supersonico $\frac{\partial v'}{\partial y}$ ha lo stesso segno di $\frac{\partial u'}{\partial x}$ (4.144)

Ora: $\frac{\partial u'}{\partial x}$ denota una accelerazione longitudinale della particella fluida, mentre: $\frac{\partial v'}{\partial y}$ è un'accelerazione trasversale, connessa con la precedente attraverso la divergenza della velocità.

In subsonico un'accelerazione trasversale negativa (di restringimento) produce un'accelerazione assiale positiva; nel supersonico il viceversa.

Il tutto coerente con la relazione velocità/area trovata nell'ambito dei moti quasi-unidimensionali.

Consideriamo il moto supersonico attorno ad un profilo sotto le ipotesi di piccole perturbazioni e verifichiamo che la soluzione generale dell'equazione:

$$\lambda^2 \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0 \quad (4.145)$$

è data dalla:

$$\boxed{\varphi(x, y) = f(x - \lambda y) + g(x + \lambda y)} \quad (4.146)$$

dove:

- f è una arbitraria funzione di argomento $(x - \lambda y)$
- g è una arbitraria funzione di argomento $(x + \lambda y)$

Esaminiamo un caso particolare, sia $g = 0$, per cui

$$\varphi(x, y) = f(x - \lambda y) \quad (4.147)$$

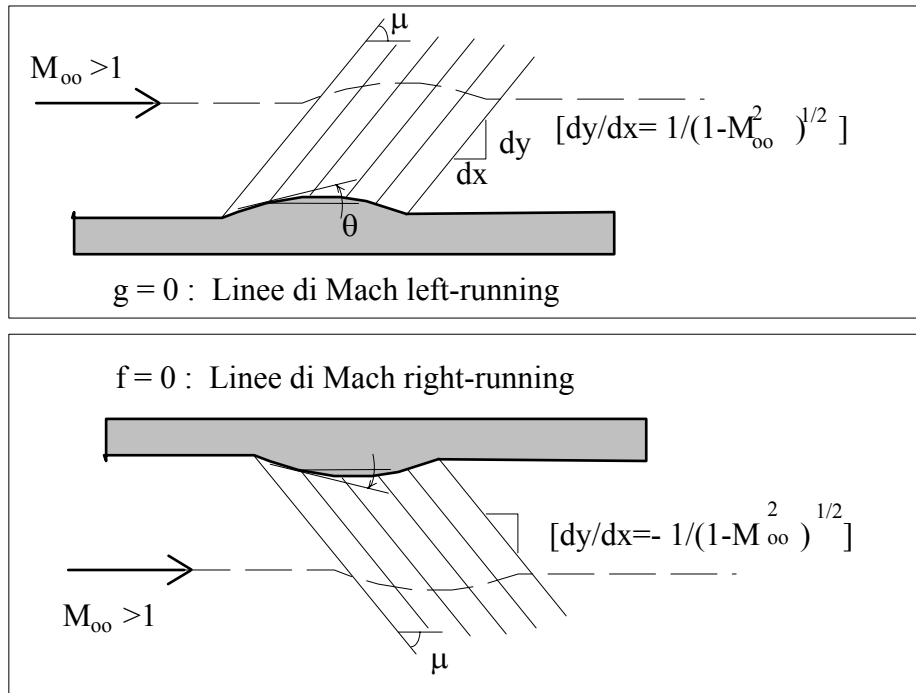
Linee equipotenziali, su cui $\varphi = \text{costante}$, corrispondono a linee nel campo fisico in cui l'argomento $(x - \lambda y) = \text{costante}$, ovvero:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad \text{ovvero linee di Mach left-running} \quad (4.148)$$

Alternativamente si dimostra che nel caso $f=0$, per cui $\varphi(x, y) = g(x + \lambda y)$ le linee equipotenziali richiedono $(x + \lambda y) = \text{costante}$, ovvero:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad \text{ovvero linee di Mach right-running} \quad (4.149)$$

La figura sottostante riproduce il campo di moto supersonico linearizzato sopra un dosso,



Queste mostrano che, a differenza del caso subsonico [dove i disturbi si propagavano in tutte le direzioni, anche a monte controcorrente] nel supersonico i disturbi deboli si propagano lungo linee di Mach, e quindi il campo a monte di tali linee non risente del disturbo (i.e. della presenza del corpo).

Bada Bene questo vale per condizioni stazionarie!

Sempre con la ipotesi di $g = 0$, consideriamo le derivate parziali della soluzione:

$$\varphi(x, y) = f(x - \lambda y) \quad (4.150)$$

sarà:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{df}{d(x - \lambda y)} \frac{\partial (x - \lambda y)}{\partial x} = f', \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{df}{d(x - \lambda y)} \frac{\partial (x - \lambda y)}{\partial y} = -\lambda f' \quad (4.151)$$

Da queste discende:

$$\boxed{u = -\frac{v}{\lambda}} \quad (4.152)$$

Da cui si deriva che la condizione al contorno sulla superficie:

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{v}{V_\infty + u} \quad (4.153)$$

sotto le ipotesi di piccoli disturbi, prende la forma approssimata:

$$\theta = \frac{v}{V_\infty} \quad (4.154)$$

Per cui dalla relazione precedentemente trovata consegue:

$$u = -V_{\infty} \frac{\theta}{\lambda} \quad (4.155)$$

Il coefficiente di pressione supersonico linearizzato:

$$c_p = -\frac{2u}{V_{\infty}} \quad (4.156)$$

diventa, quindi, per onde di **Mach left-running**:

$$c_p = \frac{2\theta}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \quad (4.157)$$

che è nota come la **Formula di Ackeret**:

Cioè nella teoria supersonica linearizzata il coefficiente di pressione è direttamente proporzionale alla inclinazione locale della superficie rispetto alla corrente indisturbata.

Questo vale per ogni corpo snello bi-dimensionale.

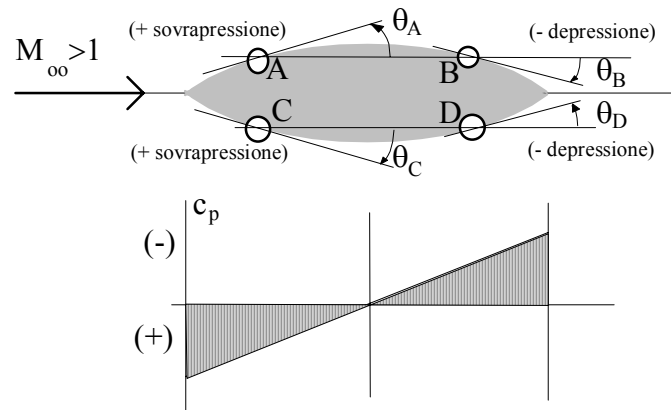
In particolare per un corpo biconvesso, come in figura, nei due punti A e B risulterà:

$$c_{pA} = \frac{2\theta_A}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \quad (4.158)$$

$$c_{pB} = \frac{2\theta_B}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}$$

Notare i segni:

- θ_A è positivo (antiorario) e ivi c_p è positivo (compressione);
- θ_B è negativo (orario) e ivi c_p è negativo (depressione);



Nel caso di onde di **Mach right-running** (lato inferiore), occorre porre $f=0$, ne deriva:

$$c_p = -\frac{2\theta}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \quad (4.159)$$

ovvero:

$$c_{pC} = -\frac{2\theta_C}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \quad c_{pD} = -\frac{2\theta_D}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \quad (4.160)$$

per cui

- θ_C è negativo (orario) e ivi c_p è positivo (compressione);
- θ_D è positivo (antiorario) e ivi c_p è negativo (depressione);

In generale le regole sui segni sono alquanto complicate in quanto cambia il segno a seconda della famiglia di onde [sul dorso o sul ventre].

Sarà di buon senso verificare il segno interpretando il fenomeno di compressione (+) o di espansione (-) anche in base a considerazioni di carattere fisico.

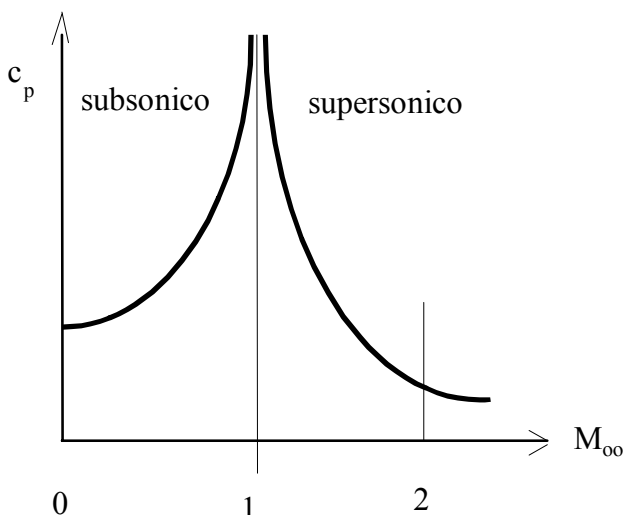
Ne consegue che per il profilo biconvesso, sulla parte anteriore del profilo si creano sovrapressioni (+) sia sul ventre che sul dorso, mentre sulla parte posteriore esistono depressioni (-).

Il che porta ad una nuova differenza rispetto al subsonico: anche in flusso potenziale (senza la viscosità ed i suoi effetti) si genera una forza resistente, chiamata **resistenza d'onda**.

Il paradosso di d'Alembert non è più applicabile al supersonico.

L'altra differenza è il *trend di similitudine*, per le correzioni di Mach che hanno verso opposto: per uno stesso profilo

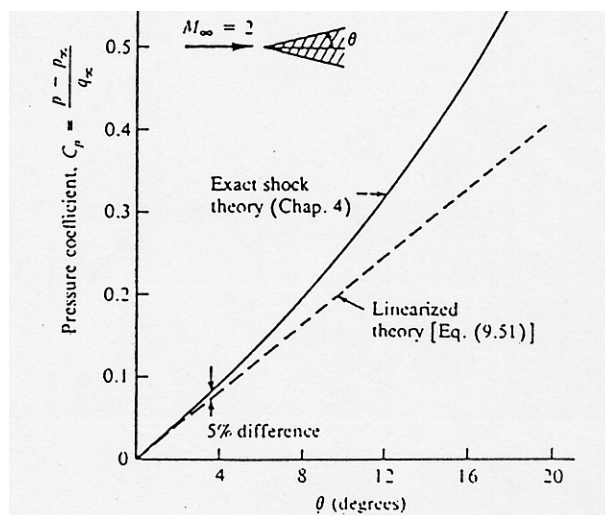
- ❖ in subsonico si verifica un aumento col Mach asintotico,
- ❖ in supersonico una diminuzione col Mach asintotico.



E' facile quantificare l'approssimazione della teoria linearizzata supersonica, nei confronti della soluzione esatta, ad esempio, per un diedro.

Paragonando i risultati al variare dell'angolo di diedro (a Mach costante) si verifica che fino a 4° - 5° l'errore è inferiore al 5%.

E' da rilevare però che considerando non solo compressioni, ma anche espansioni vi sarà tendenza a compensare gli errori, per cui alla fine l'errore globale della teoria lineare integrata sul dorso e sul ventre, risulta globalmente minore e quindi la teoria può essere applicata anche per angoli maggiori di 4° .



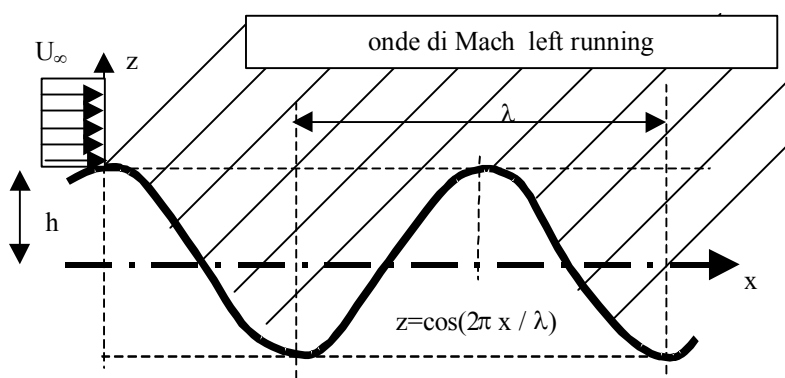
Esempio 4.2

Come esempio di applicazione del metodo delle piccole perturbazioni consideriamo il campo supersonico di moto stazionario, irrotazionale, piano su di una parete ondulata come in figura.

Ovviamente si suppone che $h \ll l$, sicché vale l'ipotesi di piccole perturbazioni.

Le linee $g=\text{costante}$ possono ignorarsi perché il campo di moto è influenzato soltanto dai disturbi che si propagano verso l'alto a partire dalla parete.

Il potenziale di disturbo di velocità dipende quindi soltanto dalle linee $f=\text{costante}$, ovvero dalle onde di Mach left-running è:



$$\phi(x, z) = f(x - \beta z) \quad (4.161)$$

con $\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$. La (4.161) deve essere risolta dalle condizioni linearizzate di tangenza a parete (4.55):

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{\text{parete}} = \frac{w}{U_{\infty} + u}$$

ovvero, attesa la piccolezza del disturbo:

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{y=0} = \frac{w}{U_{\infty}} = \frac{1}{U_{\infty}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{y=0} \quad (4.162)$$

ne deriva [nota f' è la derivata di f rispetto al suo argomento $(x - \beta z)$]:

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{y=0} = -h \frac{2\pi}{\lambda} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = \frac{1}{U_{\infty}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{y=0} = \frac{[-\beta]}{U_{\infty}} f' \quad (4.163)$$

che integrata fornisce:

$$f(x, z) = -\frac{U_{\infty} h}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(x - z \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}\right)\right) + \cos t. \quad (4.164)$$

Le componenti perturbate della velocità sono:

$$u(x, z) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{U_{\infty} h}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(x - z \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}\right)\right) \quad (4.165)$$

$$w(x, z) = -\frac{2\pi}{\lambda} U_{\infty} h \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(x - z \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}\right)\right) \quad (4.166)$$

Il coefficienti di pressione è:

$$C_p(x, z) = \frac{4\pi}{\lambda} \frac{h}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(x - z \sqrt{M_{\infty}^2 - 1}\right)\right) \quad (4.167)$$

sulla parete ($z=0$) vale:

$$C_p(x, 0) = \frac{4\pi}{\lambda} \frac{h}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (4.168)$$

Nota: il disturbo si propaga all'infinito lungo le linee di Mach, senza diminuire di intensità



4.11 Profili supersonici (piccoli disturbi)

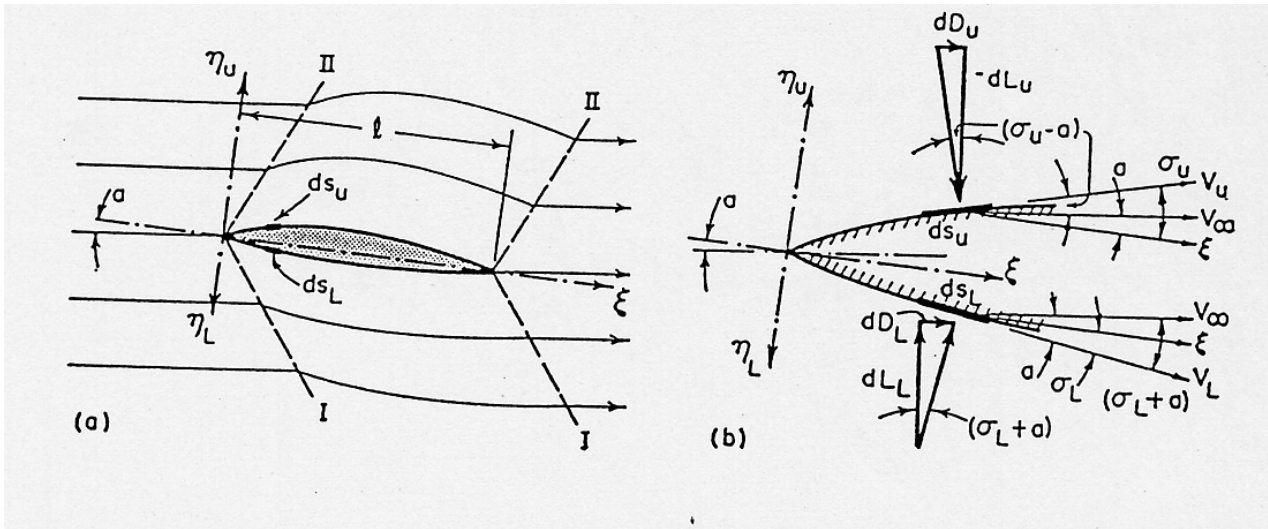
La risoluzione di problemi di aerodinamica supersonica, sotto l'ipotesi di piccoli disturbi, è molto semplice, in quanto si basa sulla semplice formula del coefficiente di pressione:

$$\left[c_p \right]_{I/II} = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2} = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \gamma p_{\infty} M_{\infty}^2} = (-/+) \frac{2\Delta\theta}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} \quad (4.169)$$

dove :

- il segno (-) si applica alle onde di Mach della I.a famiglia (right running)
- il segno (+) si applica alle onde di Mach della II.a famiglia (left running)
- $\Delta\theta$ è la deviazione locale della superficie rispetto alla direzione della corrente indisturbata.

Con questo semplice risultato consideriamo un profilo supersonico.



Denotiamo con " σ " l'inclinazione locale della superficie del profilo rispetto alla sua linea media, con pedice "U" per il dorso e pedice "L" per il ventre.

Sarà:

$$\Delta\theta_U = (\sigma_U - \alpha); \Delta\theta_L = -(\sigma_L + \alpha) \quad (4.170)$$

ovvero:

$$p_L - p_\infty = \frac{\gamma p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} (\sigma_L + \alpha) \quad ; p_U - p_\infty = \frac{\gamma p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} (\sigma_U - \alpha) \quad (4.171)$$

da cui:

$$p_L - p_U = \frac{\gamma p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} (\sigma_L - \sigma_U + 2\alpha) \quad (4.172)$$

Le forze sul profilo possono essere calcolate integrando la pressione sull'intera superficie.

Per un tipico elemento di superficie (per unità di profondità), nei limiti dell'approssimazione di piccoli disturbi:

$$dL_L = p_L \cos(\sigma_L + \alpha) ds_L \approx p_L d\xi \quad dL_U = -p_U \cos(\sigma_U - \alpha) ds_U \approx -p_U d\xi \quad (4.173)$$

da cui:

$$dL = dL_L + dL_U \approx (p_L - p_U) d\xi = \frac{\gamma p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} (\sigma_L - \sigma_U + 2\alpha) d\xi \quad (4.174)$$

Integrando questa espressione tra $\xi = 0$ ed $\xi = \ell$ si trova, essendo:

$$\int_0^\ell \sigma_L d\xi \cong \int_0^\ell (d\eta/d\xi)_L d\xi \cong \int_0^\ell d\eta_L = 0 \quad \text{e parimenti} \quad \int_0^\ell \sigma_U d\xi = 0 \quad (4.175)$$

la portanza per unità di apertura:

$$L = \frac{\gamma p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} 2\alpha \ell \quad (4.176)$$

Da cui si calcola il coefficiente di portanza del profilo come:

$$c_L \equiv \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \ell} = \frac{L}{\frac{1}{2} \gamma p_\infty M_\infty^2 \ell} = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (4.177)$$

e il coefficiente della retta di portanza come:

$$\boxed{dc_L/d\alpha = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}} \quad (4.178)$$

Come visto la distribuzione delle pressioni non è simmetrica longitudinalmente, anche per angolo di attacco nullo; esiste quindi una resistenza che si può calcolare come componente dell'integrale delle pressioni nella direzione del moto.

Analogamente a quanto fatto per la portanza:

$$dD_L = p_L \sin(\sigma_L + \alpha) ds_L \approx p_L (\sigma_L + \alpha) d\xi \quad dD_U = -p_U \sin(\sigma_U - \alpha) ds_U \approx -p_U (\sigma_U - \alpha) d\xi \quad (4.179)$$

da cui:

$$\begin{aligned} dD &= dD_L + dD_U \approx [p_L (\sigma_L + \alpha) - p_U (\sigma_U - \alpha)] d\xi = \\ &= \frac{\gamma p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} [(\sigma_L + \alpha)^2 + (\sigma_U - \alpha)^2] d\xi + p_\infty [(\sigma_L + \alpha) + (\sigma_U - \alpha)] d\xi \end{aligned} \quad (4.180)$$

Espandendo questa espressione ed integrando tra $\xi = 0$ ed $\xi = \ell$ si trova, essendo $\int_0^\ell \sigma_L d\xi \cong 0$ e $\int_0^\ell \sigma_U d\xi \cong 0$, la resistenza per unità di apertura:

$$\boxed{D = \frac{\gamma p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[2\alpha^2 + \overline{\sigma_L^2} + \overline{\sigma_U^2} \right] \ell} \quad (4.181)$$

dove $\overline{\sigma_L^2}$ e $\overline{\sigma_U^2}$ sono le medie quadratiche delle inclinazioni:

$$\overline{\sigma_L^2} = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \sigma_L^2 d\xi \quad ; \quad \overline{\sigma_U^2} = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \sigma_U^2 d\xi \quad (4.182)$$

Il **coefficiente di resistenza di onda** che ne deriva è:

$$\boxed{c_D = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[\alpha^2 + \frac{1}{2} (\overline{\sigma_L^2} + \overline{\sigma_U^2}) \right]} \quad (4.183)$$

Poiché l'asimmetria delle pressioni dipende sia dalla forma del profilo che dall'angolo di attacco (che è associato alla generazione della portanza), si suole dividere la resistenza in due parti:

resistenza indotta (dalla portanza) il cui coefficiente è:

$$\boxed{c_{Dind} = \frac{4\alpha^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}} \quad (4.184)$$

resistenza di spessore (indipendente dalla portanza) il cui coefficiente è:

$$\boxed{c_{Dthk} = \frac{2(\overline{\sigma_L^2} + \overline{\sigma_U^2})}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}} \quad (4.185)$$

Nota Bene : non confondere le definizioni con la resistenza indotta incompressibile che era nulla per profili (ali bidimensionali infinite) ma dovuta al downwash delle ali finite.

Nel supersonico questa resistenza indotta deriva dall'energia associata al sistema di onde deboli che si emanano dalla superficie del profilo.

La resistenza totale di un profilo supersonico (bidimensionale) sarà quindi la somma di questi due tipi di resistenza [più ovviamente la resistenza dovuta all'attrito]:

$$c_{D \text{ totale}} = c_{D \text{ indotta}} + c_{D \text{ thickness}} + c_{D \text{ attrito}} \quad (4.186)$$

La resistenza di attrito è approssimativamente pari a quella in regime subsonico, all'incirca: $c_{D \text{ attrito}} = 0.005 - 0.007$.

L'efficienza di un profilo supersonico è quindi stimabile essere:

$$E = \frac{L}{D} = \frac{c_L}{c_D} = \frac{\alpha}{\left[\alpha^2 + \frac{1}{2}(\overline{\sigma_L^2} + \overline{\sigma_U^2}) \right] + \frac{1}{4}c_{D \text{ attrito}}\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (4.187)$$

L'assetto di massima efficienza si realizza per

$$\alpha_{E \text{ max}} = \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\overline{\sigma_L^2} + \overline{\sigma_U^2}) \right] + \frac{1}{4}c_{D \text{ attrito}}\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad (4.188)$$

A questo assetto corrisponde

$$E_{\text{max}} = \frac{1}{2\sqrt{\left[\frac{1}{2}(\overline{\sigma_L^2} + \overline{\sigma_U^2}) \right] + \frac{1}{4}c_{D \text{ attrito}}\sqrt{M_\infty^2 - 1}}} = \frac{1}{2\alpha_{E \text{ max}}} \quad (4.189)$$

Per il coefficiente di momento si ricava, analogamente,:

$$dM \approx (p_L - p_U)\xi d\xi = \frac{\gamma p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}(\sigma_L - \sigma_U + 2\alpha)\xi d\xi \quad (4.190)$$

Integrando questa espressione tra $\xi = 0$ ed $\xi = \ell$, si trova [essendo $\int_0^\ell \xi d\xi = \ell^2/2$]:

$$\int_0^\ell (\sigma_L - \sigma_U)\xi d\xi \cong \int_0^\ell \left[\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_L - \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_U \right] \xi d\xi \cong \int_0^\ell \xi (d\eta_L - d\eta_U) = -S_L + S_U \quad (4.191)$$

dove S_L ed S_U sono le aree comprese tra le superfici e la corda (positiva per l'area sottostante la corda).

Il momento aerodinamico, per unità di apertura, è quindi:

$$M = \frac{\gamma p_\infty M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[\alpha \ell^2 + (S_U - S_L) \right] \quad (4.192)$$

da cui si calcola il coefficiente di Momento del profilo come:

$$c_M \equiv \frac{M}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 \ell^2} = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left(\alpha + \frac{S_U - S_L}{\ell^2} \right) \quad (4.193)$$

Il centro di pressione è la distanza dal bordo di attacco dove è applicata la forza risultante; al primo ordine:

$M \approx L \ell_{cp} \rightarrow \ell_{cp}/\ell = M/(L\ell)$ da cui:

$$\frac{\ell_{cp}}{\ell} = 0.5 + \frac{S_U - S_L}{2\alpha \ell^2} \quad (4.194)$$

Per profili simmetrici il centro di pressione è alla metà della corda.

**Confronta con il caso incompressibile dove il centro di pressione era ad un quarto della corda.
In un velivolo, nel passare dal subsonico al supersonico, la forza portante si muove verso la coda,
l'aereo tende a beccheggiare fortemente, occorre prevedere un equilibramento, realizzabile o con ali**

a freccia variabile (che fanno variare la posizione del centro di pressione globale rispetto al baricentro dell'aereo), o con spostamento del baricentro del velivolo (come nel Concorde che usa serbatoi a prua/poppa dove travasa carburante per equilibrare il momento).

Stesse considerazioni si riflettono sui piani di coda e su tutte le superfici mobili.

Ovviamente se il profilo non è simmetrico il centro di pressione varia anche con l'angolo di attacco. Interessante notare che la posizione del centro di pressione, al primo ordine, non varia con il Mach di volo.

4.11.1 La teoria di Busemann

La teoria lineare esprime il coefficiente di pressione in termini dell'angolo di deviazione subito dalla corrente, ma si ferma al primo termine di una espansione in serie.

La teoria di Busemann considera anche il secondo termine di questa serie, e fornisce:

$$c_p = \frac{2\theta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} + \left[\frac{(\gamma + 1)M_\infty^4 - 4M_\infty^2 + 4}{2(M_\infty^2 - 1)^2} \right] \theta^2 \quad (4.195)$$

Di solito questa espressione viene messa nella forma:

$$c_p = C_1(\gamma, M_\infty^2) \theta + C_2(\gamma, M_\infty^2) \theta^2 \quad (4.196)$$

Dove i coefficienti C_1 e C_2 sono tabulati per ogni gas in funzione di Mach asintotico.

L'uso della teoria di Busemann permette calcoli con approssimazioni al secondo ordine che risultano molto più prossimi a quelli ricavabili con la teoria urto/espansione.

Si riportano, a alto, i valori dei coefficienti di Busemann per l'aria ($\gamma=1.4$).

M_∞	C_1	C_2
1.10	4.364	30.316
1.12	3.965	21.313
1.14	3.654	15.904
1.16	3.402	12.404
1.18	3.193	10.013
1.20	3.015	8.307
1.22	2.862	7.050
1.24	2.728	6.096
1.26	2.609	5.356
1.28	2.503	4.771
1.30	2.408	4.300
1.32	2.321	3.916
1.34	2.242	3.599
1.36	2.170	3.333
1.38	2.103	3.109
1.40	2.041	2.919
1.42	1.984	2.755
1.44	1.930	2.614
1.46	1.880	2.491
1.48	1.833	2.383
1.50	1.789	2.288
1.52	1.747	2.204
1.54	1.708	2.129
1.56	1.670	2.063
1.58	1.635	2.003
1.60	1.601	1.949
1.70	1.455	1.748
1.80	1.336	1.618
1.90	1.238	1.529
2.00	1.155	1.467
2.50	0.873	1.320
3.00	0.707	1.269
3.50	0.596	1.248
4.00	0.516	1.232
5.00	0.408	1.219
10.0	0.201	1.204
∞	0	1.200



Esempio 4.3

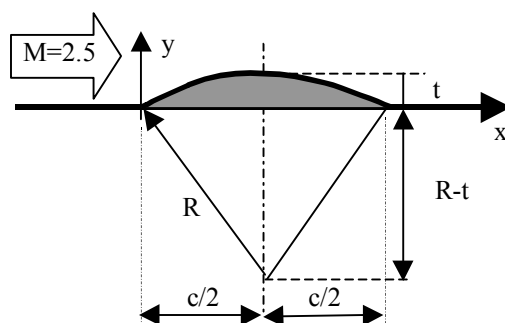
Aria scorre a $M=2.5$ lungo una parete su cui risalta un arco di cerchio di spessore relativo 0.1.

Diagramma il coefficiente di pressione lungo la corda.

Dalla geometria della figura risulta:

$$R^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (R-t)^2 \quad (4.197)$$

da cui:



$$R = \frac{1}{2t} \left[\left(\frac{c}{2} \right)^2 + (t)^2 \right] \quad (4.198)$$

essendo $t/c=0.1$, si ricava:

$$R = \frac{1}{2(0.1c)} \left[\left(\frac{c}{2} \right)^2 + (0.1c)^2 \right] = 1.3 c \quad (4.199)$$

Ovviamente sarà: $(R-t)=1.2c$

Ogni punto della curva è definito dall'equazione della circonferenza(assi x,y):

$$R^2 = (x - 0.5c)^2 + (y + 1.2c)^2 \quad (4.200)$$

Che fornisce, per differenziazione:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0.5 - \frac{x}{c}}{1.2 + \frac{y}{c}} = \tan \theta \quad (4.201)$$

Nota nelle ipotesi di piccoli disturbi $y/c \ll 1$, discende:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0.5 - \frac{x}{c}}{1.2} = \tan \theta \quad (4.202)$$

Da cui:

$$C_p = \frac{2\theta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \approx \frac{2 \tan \theta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} = \frac{2}{\sqrt{(2.5)^2 - 1}} \frac{0.5 - \frac{x}{c}}{1.2} \quad (4.203)$$

Nota: questo esempio può essere risolto, in modo esatto, con il metodo urto/espansione.



Esercizio 4.3

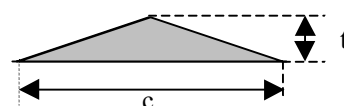
Usando la teoria linearizzata diagramma la polare (coefficiente di portanza/coefficiente di resistenza) per una lastra piana:

- ❖ Mach infinito 2, angoli da 2° a 15°
- ❖ Angolo 10° Mach infinitoda 2. a 5.



Esercizio 4.4

Usando la teoria linearizzata diagramma C_l e C_d contro l'angolo d'attacco α [$-10^\circ, -5^\circ, 0^\circ, 5^\circ, 10^\circ$], per $M_\infty=2.0$, per il profilo a mezza losanga come in figura con $t/c=0.1$



Esercizio 4.5

Usando la teoria linearizzata supersonica scrivi un codice di calcolo [Profilo_Ackeret] che legga un profilo discretizzato a pannelli (lato dorso e lato ventre) da un file esterno, richieda input da tastiera per il Mach asintotico e l'angolo d'attacco, e fornisca in uscita i valori di C_L , C_D , CM_O , x_{cp} , z_{cp} , e le distribuzioni dei C_p lungo la corda.

Paragona i risultati ad analoghi casi svolti con il codice (esatto) urti/espansione



Esercizio 4.6

Assumendo espansioni/compressioni secondo Prandtl-Meyer scrivi un codice di calcolo [Profilo_PM] che legga un profilo discretizzato a pannelli (lato dorso e lato ventre) da un file esterno, richieda input da tastiera per il Mach asintotico e l'angolo d'attacco, e fornisca in uscita i valori di C_L , C_D , CM_O , x_{cp} , z_{cp} , e le distribuzioni dei C_p lungo la corda.

Paragona i risultati ad analoghi casi svolti con il codice (esatto) urti/espansione



Esercizio 4.7

Assumendo espansioni/compressioni secondo la teoria di Busemann scrivi un codice di calcolo [Profilo_Busemann] che legga un profilo discretizzato a pannelli (lato dorso e lato ventre) da un file esterno, richieda input da tastiera per il Mach asintotico e l'angolo d'attacco, e fornisca in uscita i valori di C_L , C_D , CM_O , x_{cp} , z_{cp} , e le distribuzioni dei C_p lungo la corda.

Paragona i risultati ad analoghi casi svolti con il codice (esatto) urti/espansione

**Esercizio 4.8**

Applica i codici di calcolo sopra indicati per il calcolo di un profilo simmetrico NACA 0009, per aria $\gamma=1.4$, $M_\infty=2$.

Paragona i risultati dei vari codici e commenta le polari.

**.4.12 Check-Out**

A questo stadio lo studente diligente dovrebbe essere familiarizzato con i seguenti concetti:

1. equazione del potenziale: ipotesi, ingredienti per la derivazione, significato delle varie formulazioni,
2. ipotesi di piccole perturbazioni nell'equazione del potenziale, (equazione del potenziale e del potenziale del disturbo)
3. linearizzazioni dell'equazione, delle condizioni al contorno, del coefficiente di pressione, e conseguenze per i vari regimi di moto,
4. flussi subsonici linearizzati, similitudini subsoniche di Gothert e di Prandtl,
5. correzioni di compressibilità, determinazione del Mach critico (inferiore di un profilo),
6. flussi supersonici linearizzati (teoria di Ackeret)
7. soluzione generale dell'equazione delle onde,
8. similitudine supersonica,
9. profili supersonici linearizzati,
10. correzioni di Busemann,
11. codici di calcolo a pannelli per la risoluzione di profili supersonici linearizzati

e dovrebbe essere in grado di rispondere a domande quali:

- ❖ cosa è l'equazione del potenziale,
- ❖ cosa è l'equazione del potenziale linearizzato,
- ❖ cosa è l'equazione di Laplace,
- ❖ cosa è l'equazione delle onde,
- ❖ perché l'equazione del potenziale in transonico non è lineare,
- ❖ perché l'equazione del potenziale in ipersonico non è lineare,
- ❖ in cosa differiscono le equazioni del potenziale in subsonico ed in supersonico,
- ❖ come vanno le linee di corrente lontano dal profilo in subsonico,
- ❖ come vanno le linee di corrente lontano dal profilo in supersonico,
- ❖ cosa accade alla condizione di Kutta in supersonico,
- ❖ cosa accade alla posizione del punto di ristagno anteriore nel supersonico,
- ❖ come varia la posizione del centro di pressione nel passare dal sub al supersonico,
- ❖ perché in supersonico non vale il paradosso di d'Alambert,
- ❖ come nasce e da cosa dipende la resistenza d'onda,
- ❖ perché la resistenza d'onda non era stata considerata nel subsonico,
- ❖ cosa è influenzato dalla asimmetria dei profili (dorso/ventre) nel supersonico,
- ❖ in poche parole cosa viene tralasciato dalla teoria di Ackeret?