

Capitolo 5

Strato Limite Comprimitibile

Scopo del Capitolo

Il moto ad alte velocità, che interessa regimi di moto compressibile, è caratterizzato, come visto precedentemente, da numeri di Mach maggiori di circa 0.3; questi regimi comprendono quindi il subsonico compressibile, il transonico, il supersonico per finire all'ipersonico.

In tutti questi regimi possono esistere, se il numero di Reynolds è abbastanza elevato, nelle vicinanze del corpo delle zone cosiddette di **strato limite** in cui le equazioni di Navier-Stokes (compressibili) possono essere notevolmente semplificate.

Tali zone sono l'oggetto di analisi di questo capitolo, che tratterà lo strato limite compressibile unitariamente indicando, laddove sussistano, le particolarità per alcuni regimi (quello ipersonico).

La netta differenziazione, rispetto all'incompressibile, sta nel fatto che la densità non è più considerata costante, per cui l'energia interna sarà funzione, per gas semplici, di due parametri estensivi (la densità e l'entropia).

Ne discende che l'analisi fluidodinamica è stavolta accoppiata a quella energetica con la necessità della specificazione del modello di gas (a due gradi di libertà) da annettere al sistema di equazioni. Nel seguito faremo uso del modello termodinamico di gas puercheperfetto richiamando ove necessario i limiti di tale assunzione (moti ipersonici).

La conseguenza della compressibilità, come detto, richiede l'analisi della equazione dell'energia (trascureremo i contributi dell'energia potenziale) e quindi l'analisi di detta equazione nell'ipotesi di uno **strato limite termico**, le cui dimensioni, rispetto a quello dinamico, saranno misurate dal numero di Prandtl (per $Pr=1$ gli spessori dei due strati sono dello stesso ordine di grandezza).

Tale analisi permetterà, in particolare, la determinazione della temperatura e del flusso di calore che si realizzeranno sulla superficie del corpo; tale flusso sarà tanto maggiore quanto più alto è il numero di Mach, per cui in condizioni supersoniche o in quelle ipersoniche la determinazione del flusso di calore, e del calore trasferito durante il volo è uno dei maggiori parametri di progetto.

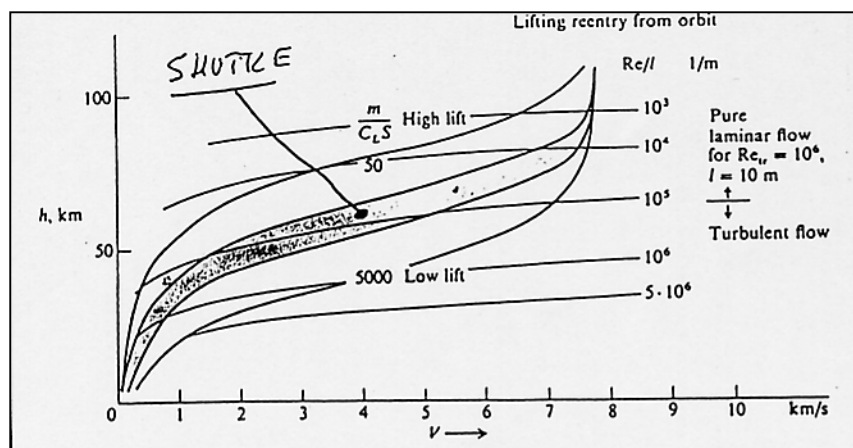
L'analisi dello strato limite compressibile sarà focalizzato essenzialmente sul regime laminare che permette una modellistica più agevole; accenni saranno dati per i regimi turbolenti, limitando l'analisi a metodologie semplicistiche.

A tal proposito occorre notare che al contrario del regime incompressibile, dove l'applicazione delle teorie laminari era limitata ad una piccola parte dell'ala, nel regime supersonico ed addirittura nel regime ipersonico, l'applicabilità delle teorie laminari aumenta, in quanto tali condizioni di volo vengono realizzate ad alte quote, laddove la densità dell'aria è molto bassa e quindi il numero di Reynolds, a parità di lunghezza di riferimento, è piccolo nonostante le alte velocità di volo.

Per esempio vengono presentati, nella figura, i corridoi di volo (diagrammi quota-velocità) per rientri atmosferici, nei quali si riportano (per una corda di 10 metri) gli equivalenti numeri di Reynolds.

Se ne ricava che nel rientro dello Shuttle, fino ad una quota di 50 chilometri circa si verificheranno condizioni di strato limite laminare.

Il che conforta l'interesse all'argomento.



Indice del Capitolo

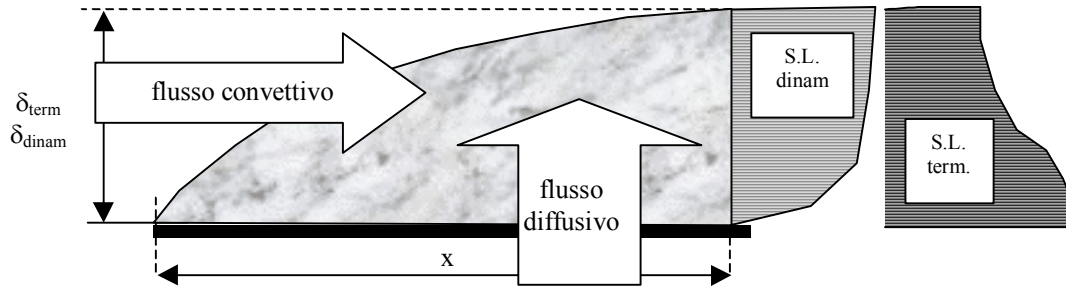
Paragrafo	pagina
.5.1 Le equazioni dello Strato Limite Compressibile Laminare	3
.5.2 le soluzioni di Crocco-Busemann	7
.5.3 Soluzioni simili (*)	11
5.3.1 Lastra piana	15
5.3.2 Intorno del punto di ristagno	17
.5.4 Il metodo della temperatura di riferimento	19
.5.5 Relazioni Integrali per strati limite compressibili	20
5.5.1 Il Metodo di Thwaites compressibile	21
5.5.2 La transizione laminare/turbolento nel compressibile	21
.5.6 Riscaldamento aerodinamico	24
.5.7 Interazione Onde d'Urto Strato Limite	27
.5.71 Riflessione di una OOU dallo Strato Limite su di una lastra piana	27
.5.72 Generazione di Urti su di una superficie concava	29
.5.7.3 Generazione di Urti sul bordo di attacco di una lastra piana e di un diedro	30
.5.7.4 Interazioni transoniche	30
.5.8 Onde d'Urto Normali in condotti	32
.5.9 Check-Out	34

5.1 Le equazioni dello Strato Limite Comprimitibile Laminare

Lo strato limite comprimibile differisce da quello incomprimibile dal fatto che gli strati limite saranno fortemente accoppiati (anche in assenza di galleggiamento) dal fatto che la densità ρ è collegata alla pressione ed alla temperatura dall'equazione del fluido, e che i coefficienti di trasporto, la viscosità μ e la conducibilità termica λ , saranno funzioni (essenzialmente) della temperatura.

In linea di massima, come nell'incomprimibile, gli strati limite dinamico e termico sono definiti come una zona molto sottile in cui gli effetti convettivi sono dello stesso ordine di quelli diffusivi.

Da questa definizione riusciamo ad avere una stima preliminare degli ordini di grandezza dei due spessori.



Per lo **Strato Limite dinamico** deve avervi:

- ❖ portata entro δ_{dinam} , del flusso convettivo di quantità di moto nella direzione x: $\delta_{\text{dinam}} [\rho U U]$
- ❖ portata entro x , del flusso diffusivo di quantità di moto $[\tau_{xy}]$ nella direzione y: $x [\mu U / \delta_{\text{dinam}}]$

Eguagliando le due portate si ottiene la stima dell'ordine di grandezza dello spessore dello strato limite dinamico (laminare):

$$\delta_{\text{dinam}} [\rho U^2] \approx x \left[\mu \frac{U}{\delta_{\text{dinam}}} \right] \Rightarrow \left(\frac{\delta_{\text{dinam}}}{x} \right)^2 \approx \left[\frac{\mu}{\rho U x} \right] \Rightarrow \frac{\delta_{\text{dinam}}}{x} \approx \frac{1}{\sqrt{Re_x}}$$

Analogamente per lo **Strato Limite termico** deve avervi:

- ❖ portata entro δ_{term} , del flusso convettivo di energia entalpica nella direzione x: $\delta_{\text{term}} [\rho U (c_p T)]$
- ❖ portata entro x , del flusso diffusivo di energia entalpica (calore) nella direzione y: $x [\lambda T / \delta_{\text{term}}]$

Eguagliando le due portate si ottiene la stima dell'ordine di grandezza dello spessore dello strato limite termico (laminare):

$$\delta_{\text{term}} [\rho U (c_p T)] \approx x \left[\lambda \frac{T}{\delta_{\text{term}}} \right] \Rightarrow \left(\frac{\delta_{\text{term}}}{x} \right)^2 \approx \left[\frac{\lambda}{c_p \rho U x} \right] = \left[\left(\frac{\lambda}{c_p \mu} \right) \left(\frac{\mu}{\rho U x} \right) \right] \Rightarrow \frac{\delta_{\text{term}}}{x} \approx \frac{1}{\sqrt{Pr Re_x}} = \frac{1}{\sqrt{Pe_x}}$$

Ovviamente il rapporto tra gli spessori dei due strati limite (**laminari**) dipende dalla radice quadrata del numero di Prandtl (cioè soltanto da parametri termodinamici, i.e. dal fluido), ed è dell'ordine:

$$\frac{\delta_{\text{term}}}{\delta_{\text{dinam}}} \approx \frac{1}{\sqrt{Pr}}$$

quindi:

- per gas $[Pr \propto 1]$ $\delta_{\text{term}} \propto \delta_{\text{dinam}}$
- per liquidi $[Pr > 1]$ $\delta_{\text{term}} < \delta_{\text{dinam}}$
- per metalli fluidi $[Pr < 1]$ $\delta_{\text{term}} > \delta_{\text{dinam}}$

La differenza degli spessori può causare difficoltà nelle risoluzioni numeriche di strati limiti completi

I moti comprimibili sono retti dalle equazioni di Navier-Stokes complete che, trascurando il campo gravitazionale, sono:

$$\textbf{Continuità:} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (5.1)$$

$$\textbf{Q.d.M.:} \quad \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}_d \quad (5.2)$$

$$\textbf{Energia:} \quad \rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} - \nabla \cdot \mathbf{j}_q + \underline{\underline{\tau}}_d : \nabla \mathbf{V}^s \quad (5.3)$$

Sotto le ipotesi di **fluido Newtoniano** e di quella di **Stokes** (i.e. il secondo coefficiente di viscosità " μ_2 " è supposto nullo) la parte dissipativa del tensore degli sforzi è esprimibile come:

$$\underline{\tau}_d = 2\mu |\underline{\nabla V}|_0^s = 2\mu \left\{ |\underline{\nabla V}|^s - \frac{1}{3} \underline{\nabla} \cdot \underline{V} \right\} \quad (5.4)$$

Mentre sotto le ipotesi di **fluido di Fourier** il flusso di calore è esprimibile come:

$$\underline{j}_q = -\lambda \underline{\nabla T} \quad (5.5)$$

- I coefficienti di viscosità " μ " e di conducibilità termica " λ " sono funzione dei parametri termodinamici; in particolare, per i gas, la dipendenza predominante dei coefficienti di trasporto è dalla temperatura.
- Il termine di dissipazione che compare a destra nell'equazione dell'energia (5.3) è di solito denotato come:

$$\underline{\tau}_d \cdot \underline{\nabla V}_0^s \equiv \Phi^2 \quad (5.6)$$

- Il sistema è chiuso da due equazioni di stato per il gas: $p=p(\rho, T)$; $h=h(T)$ e dalle equazioni fenomenologiche per i coefficienti di trasporto " $\mu(T)$ " e " $\lambda(T)$ "

Onde procedere alla ricerca delle equazioni approssimate per lo strato limite, conviene effettuare prima l'adimensionalizzazione delle equazioni e poi eseguire l'analisi degli ordini di grandezza dei vari singoli termini sotto le ipotesi di validità delle equazioni nell'interno dello **strato limite**, definito come:

quella zona, in prossimità di discontinuità (parete), di spessore molto piccola, in cui gli ordini di grandezza degli effetti convettivi sono uguali a quelli degli effetti diffusivi.

Considerando un problema bi-dimensionale espresso in un sistema di coordinate cartesiane, operiamo, coerentemente a quanto detto sopra, l'adimensionalizzazione indicando:

- con L la lunghezza caratteristica del corpo
- con $0 \leq y \leq \delta = \varepsilon L$ [con $\varepsilon = \delta/L \ll 1$] la zona dello spessore dello strato limite:

In definitiva poniamo:

$$\xi = x/L; \quad \eta = y/(\varepsilon L) = y/\delta \quad ; \quad u^* = u/V_\infty; \quad v^* = v/(\varepsilon V_\infty) \quad (5.7)$$

$$\rho^* = \rho/\rho_\infty; \quad p^* = p/p_\infty; \quad h^* = h/h_\infty = h(\gamma - 1)/a_\infty^2; \quad \mu^* = \mu/\mu_\infty; \quad \lambda^* = \lambda/\lambda_\infty$$

dove tutte le grandezze con pedice (∞) competono allo stato asintotico.

Notiamo che contrariamente a quanto fatto per il caso incomprimibile, in questa occasione la pressione è adimensionalizzata con la pressione asintotica per mantenere la corrispondenza con la densità e la temperatura asintotiche [memo: $\rho_\infty V_\infty^2 = \gamma p_\infty M_\infty^2$].

Con queste adimensionalizzazioni, le equazioni di Navier-Stokes (5.1-5.3) (2-D cartesiane), sotto le ipotesi di stazionarietà, diventano:

Continuità:

$$\frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial \xi} + \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right] \frac{\partial(\rho^* v^*)}{\partial \eta} = 0 \quad (5.8)$$

x-componente della Q.d.M. :

$$\begin{aligned} \rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right] \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial \eta} = - \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\partial p^*}{\partial \xi} + \\ + \frac{1}{Re_\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[2\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{2}{3} \mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right] \frac{\partial v^*}{\partial \eta} \right) \right] + \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu^* \left(\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right] \frac{\partial v^*}{\partial \xi} + \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.9)$$

y-componente della Q.d.M. :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right] \rho^* u^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi} + \left[\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} \right] \rho^* v^* \frac{\partial v^*}{\partial \eta} = - \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] \frac{\partial p^*}{\partial \eta} + \\ + \frac{1}{Re_\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\mu^* \left(\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right] \frac{\partial v^*}{\partial \xi} + \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right) \right] + \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] \frac{\partial}{\partial \eta} \left[2\mu^* \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right] \frac{\partial v^*}{\partial \eta} - \frac{2}{3} \mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right] \frac{\partial v^*}{\partial \eta} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Energia:

$$\begin{aligned} \rho^* u^* \frac{\partial h^*}{\partial \xi} + \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right] \rho^* v^* \frac{\partial h^*}{\partial \eta} = (\gamma - 1) \left[u^* \frac{\partial p^*}{\partial \xi} + \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right] v^* \frac{\partial p^*}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{Re_\infty Pr_\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial T^*}{\partial \xi} \right] + \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \right] \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right] \right\} + \\ + \frac{(\gamma - 1) M_\infty^{*2}}{Re^*} \mu^* \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right] \frac{\partial v^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right] \frac{\partial v^*}{\partial \xi} + \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right]^2 - \frac{2}{3} \left[\frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right] \frac{\partial v^*}{\partial \eta} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Trascurando i termini di ordine inferiore (memo $\varepsilon \ll 1$) si ottiene:

$$\textbf{Continuità:} \quad \frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho^* v^*)}{\partial \eta} = 0 \quad (5.12)$$

i.e. l'equazione è bilanciata, il che conferma la scelta dell'adimensionalizzazione fatta per "v"

x-componente della Q.d.M. :

$$\rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial \eta} = - \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\partial p^*}{\partial \xi} + \frac{1}{Re_\infty} \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \right] \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right) \right] \right\} \quad (5.13)$$

y-componente della Q.d.M. :

$$\left[\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \right] \left\{ \rho^* u^* \frac{\partial v^*}{\partial \xi} + \rho^* v^* \frac{\partial v^*}{\partial \eta} \right\} = - \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\partial p^*}{\partial \eta} + \frac{1}{Re_\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[2\mu^* \frac{\partial v^*}{\partial \eta} \right] \right\} \quad (5.14)$$

Energia:

$$\rho^* u^* \frac{\partial h^*}{\partial \xi} + \rho^* v^* \frac{\partial h^*}{\partial \eta} = (\gamma - 1) \left[u^* \frac{\partial p^*}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{Re_\infty Pr_\infty} \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \right] \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right] \right\} + \frac{(\gamma - 1) M_\infty^{*2}}{Re^*} \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \right] \mu^* \left\{ \left[\frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right]^2 \right\} \quad (5.15)$$

Consideriamo la (5.13), **x-componente della QdM**. Poiché, **per definizione di strato limite**, gli effetti convettivi dovranno essere dello stesso ordine di quelli diffusivi, si deriva che nello strato limite deve verificarsi:

$$\frac{1}{Re_\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} = O(1) \quad \text{ovvero} \quad \frac{1}{Re_\infty} = O(\varepsilon^2) \quad (5.16)$$

ovvero:

$$\boxed{\frac{\delta}{L} = \varepsilon = O\left(\frac{1}{\sqrt{Re_\infty}}\right)} \quad (5.17)$$

Sostituendo questo risultato nelle equazioni risulta:

x-componente della Q.d.M. :

$$\rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial \eta} = - \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\partial p^*}{\partial \xi} + \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right) \right] \right\} \quad (5.18)$$

$$\underline{\text{y-componente della Q.d.M.}} : \quad -\frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{\partial p^*}{\partial \eta} = O(\varepsilon^2) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \eta} \approx O\left(\frac{M^2}{\text{Re}}\right) \approx O(\text{Kn}) \quad (5.19)$$

$$\underline{\text{Energia:}} \quad \rho^* u^* \frac{\partial h^*}{\partial \xi} + \rho^* v^* \frac{\partial h^*}{\partial \eta} = (\gamma - 1) \left[u^* \frac{\partial p^*}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{\text{Pr}_\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial \eta} \right] \right\} + (\gamma - 1) M_\infty^2 \mu^* \left\{ \left[\frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right]^2 \right\} \quad (5.20)$$

Da queste si deduce che:

- per Mach di ordine unitario (fino al basso ipersonico) certamente la variazione della pressione attraverso lo strato limite è trascurabile. Si può quindi assumere $p[x, 0 < y < \delta] = p(x)$, il che significa che nella x-componente della Q.d.M. la pressione non è un'incognita ma un dato del problema in quanto può essere calcolata in base alla distribuzione "euleriana" ovvero a quella "esterna".

Attenzione per l'alto ipersonico questa posizione può essere non valida

- nello strato limite :

- ❖ l'unica componente apprezzabile del tensore degli sforzi è: $\mu \frac{\partial u}{\partial y}$
- ❖ l'unica componente apprezzabile del flusso di calore è: $\lambda \frac{\partial T}{\partial y}$
- ❖ l'unica componente apprezzabile del termine di dissipazione è: $\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$
- ❖ nelle equazioni della Q.d.M. e dell'Energia vi sono termini derivati in cui compaiono i coefficienti di trasporto " $\mu(T)$ " e " $\lambda(T)$ ", che varieranno, in genere per gas, con la temperatura, ma con leggi differenti per fluidi differenti. **Questo fatto dovrebbe allertare gli sperimentatori che, nel simulare le problematiche di strati limite comprimibili, dovrebbero usare fluidi e condizioni per cui le variazioni di tali coefficienti in condizioni sperimentali corrispondano a quelle di volo.**

Ritornando quindi al campo fisico, si ritrovano le seguenti **equazioni** valide per **strati limite comprimibili**:

$$\underline{\text{Continuità}} \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (5.21)$$

$$\underline{\text{x-componente della Q.d.M.}} : \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \right\} \quad (5.22)$$

$$\underline{\text{y-componente della Q.d.M.}} : \quad \frac{\partial p}{\partial y} \approx 0 \quad (5.23)$$

$$\underline{\text{Energia:}} \quad \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 \quad (5.24)$$

Ovviamente per rendere il problema ben posto, questo sistema di equazioni deve essere completato da due equazioni di stato per il modello del gas: $p=p(\rho, T)$; $h=h(T)$ e dalle due relazioni fenomenologiche: $\mu(T)$, $\lambda(T)$ oltre che con le opportune condizioni al contorno:

Sul bordo esterno dello strato limite la velocità e l'entalpia (i.e. la temperatura) devono tendere alle condizioni "euleriane" cioè (al primo ordine) a quelle calcolabili sul corpo tramite le equazioni di Eulero.

E' interessante notare che il gradiente della pressione nella direzione "x" deve essere collegato sia al gradiente delle velocità euleriane che al gradiente dell'entalpia euleriana [ad $y=\delta$, $u=U_e$, $h=h_e$]:

- in condizioni instazionarie vale:

$$\frac{\partial p_e}{\partial x} = -\rho_e \left(\frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} \right) = \frac{\rho_e}{U_e} \frac{\partial h_e}{\partial t} + \rho_e \frac{\partial h_e}{\partial x} - \frac{1}{U_e} \frac{\partial p_e}{\partial t} \quad (5.25)$$

➤ in condizioni stazionarie la (5.25) si riduce a:

$$\frac{dp_e}{dx} = -\rho_e U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} = \rho_e \frac{\partial h_e}{\partial x} \quad (5.26)$$

Le condizioni sul corpo saranno:

- componente della velocità in direzione del flusso nulla : $u(x,0)=0$
- componente della velocità in direzione normale al corpo : $v(x,0)=v_w(x)$
(nulla per corpo impermeabile)
- per la temperatura sono possibile due alternative:
 - assegnare la temperatura di parete: $T(x,0)=T_w$
 - assegnare il flusso termico sulla parete : $q_w(x) = -\lambda(T_w) \left[\frac{dT}{dy} \right]_{y=0}$

Si noti che non vi è possibilità di assegnare condizioni sulla componente della velocità "v" sul bordo esterno dello strato limite.

5.2 Le soluzioni di Crocco-Busemann

Si considerino le equazioni (5.22), (5.24) introducendo il numero di Prandtl [$Pr = c_p \mu / \lambda$] al posto del coefficiente di conducibilità termica "λ":

x-componente della Q.d.M. :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp_e}{dx} + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \right\} \quad (5.27)$$

Energia:

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = u \frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right] + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 \quad (5.28)$$

Moltiplicando la (5.27) x-comp della Q.d.M. per la componente u della velocità, si ottiene l'**equazione dell'energia cinetica** in quanto, come visto, nello strato limite la componente "v" della velocità è trascurabile rispetto alla "u", i.e.: $V^2 = u^2 + v^2 \approx u^2$:

$$\rho u \frac{\partial \left(\frac{1}{2} u^2 \right)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \left(\frac{1}{2} u^2 \right)}{\partial y} = -u \frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{2} u^2 \right)}{\partial y} \right) \right] - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (5.29)$$

Questa equazione rappresenta quindi il bilancio di **energia cinetica ($u^2/2$)** che, sommata all'equazione **dell'entalpia termodinamica (h)** (5.28), fornirà (abbiamo trascurato il contributo dell'energia potenziale) l'**equazione dell'energia totale $H=h+u^2/2$** :

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (5.30)$$

Consideriamo gas per cui sia Prandtl unitario : $Pr=1$.

In tale caso l'equazione (5.30) diventa:

$$\boxed{\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial H}{\partial y} \right]} \quad (5.31)$$

Ovviamente trattandosi di una equazione differenziale omogenea, una soluzione banale della (5.31) è $H=\text{costante}$.

Ma questa soluzione, essendo $H=h+u^2/2$, implica che sulla parete (laddove $u=0$) deve essere $H=h_w=\text{costante}$; il che comporta che il flusso di calore sulla parete $\lambda [dT/dy]_{y=0} = (\lambda/c_p) [dh/dy]_{y=0}$: deve esser nullo, infatti:

$$[dH/dy]_{y=0} = [d(h + \frac{1}{2}u^2)/dy]_{y=0} = [dh/dy]_{y=0} + [udu/dy]_{y=0} = [dh/dy]_{y=0} = 0 \quad (5.32)$$

Questa soluzione vale quindi per parete adiabatica:

$$\text{Prima soluzione di Crocco-Busemann : } \boxed{H=h+u^2/2=\text{cost.}} \quad \text{su parete adiabatica (Pr=1)} \quad (5.33)$$

Nota: per $Pr=1$ si verifica perfetto bilanciamento tra gli effetti viscosi presenti nello Strato Limite: la dissipazione viscosa ed il flusso di calore per conduzione. Per cui uno strato limite adiabatico si comporta, per H , come un campo euleriano potenziale. Notare inoltre che per questa soluzione non vi è alcuna limitazione sul campo delle pressioni.

Se invece consideriamo uno strato limite isobaro ($p_e=\text{costante}$) con $Pr=1$, notiamo che l'equazione dell'entalpia totale H (5.31):

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial H}{\partial y} \right] \quad (5.34)$$

è simile all'equazione della Q.d.M. (5.27):

$$\boxed{\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]} \quad (5.35)$$

Da cui si può presupporre che, per tali condizioni, deve esistere un collegamento tra la " u " e la " H " ovvero essendo $H=h+u^2/2$ si possono ricercare soluzioni del tipo

$$\boxed{h=h(u)} \quad (5.36)$$

Sostituendo questa relazione (5.36) nell'equazione dell'entalpia termodinamica (5.28):

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial h}{\partial y} \right] + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 \quad (5.37)$$

si ottiene:

$$\frac{dh}{du} \left\{ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} = \left[1 + \frac{d^2 h}{du^2} \right] \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 \quad (5.38)$$

Ora il termine a sinistra (tra parentesi graffa) è nullo in quanto rappresenta proprio la QdM (5.27). Ne deriva che il termine a destra della (5.38) si deve forzatamente annullare:

$$\left[1 + \frac{d^2 h}{du^2} \right] = 0 \Rightarrow h = -\frac{1}{2}u^2 + au + b \quad (5.39)$$

con " a " e " b " costanti arbitrarie.

- Sulla parete $y=0$ deve essere $u=0$ per cui

$$\boxed{b=h_w} \quad (5.40)$$

- Sul bordo esterno dello strato limite deve essere $u=U_e$, $h=h_e$ da cui una possibile scelta per "a" è:

$$\boxed{a = \frac{1}{U_e} [H_e - h_w] = \frac{1}{U_e} \left[h_e + \frac{1}{2} U_e^2 - h_w \right]} \quad (5.41)$$

Combinando insieme queste relazioni, si ricava la **seconda soluzione di Crocco-Busemann** valida per **Pr=1 ; dp/dx=0**:

$$\boxed{H \equiv h + \frac{1}{2} u^2 = h_w + (H_e - h_w) \left(\frac{u}{U_e} \right)} \quad (5.42)$$

i.e. l'entalpia totale varia linearmente con la velocità.

Per un gas p.c.p.: $h=c_p T$ la seconda soluzione di C-B (5.42) si può scrivere:

$$c_p T + \frac{1}{2} u^2 = c_p T_w + \left(c_p T_e + \frac{1}{2} U_e^2 - c_p T_w \right) \left(\frac{u}{U_e} \right) \quad (5.43)$$

ovvero:

$$\boxed{T = T_w + \left(T_e + \frac{1}{2c_p} U_e^2 - T_w \right) \left(\frac{u}{U_e} \right) - \frac{1}{2c_p} u^2} \quad (5.44)$$

Questa equazione è molto importante ed utile per gli strati limite comprimibili perché **permette la determinazione dei profili di temperatura una volta noti i profili di velocità.**

Questa stessa relazione (5.44) può essere ulteriormente riscritta in termini della **Temperatura Adiabatica di Parete " T_{aw} "**. Questa è definita, ovviamente, come la temperatura della parete allorché la parete stessa è adiabatica, cioè quando il flusso di calore sulla parete è nullo.

Ma una definizione della temperatura adiabatica di parete, nel caso di Pr=1 è immediatamente ottenibile dalla prima soluzione di **Crocco-Busemann** (che valeva appunto per parete adiabatica):

$$h + \frac{u^2}{2} = \text{cost.} = h_e + \frac{U_e^2}{2} = h_{aw} \Rightarrow c_p T_e + \frac{U_e^2}{2} = c_p T_{aw} \Rightarrow T_{aw} = T_e + \frac{U_e^2}{2c_p} \quad (5.45)$$

per cui la **seconda soluzione di Crocco-Busemann** (5.44) [**memo:** Pr=1 ; dp/dx=0] può essere riscritta come:

$$\boxed{T = T_w + (T_{aw} - T_w) \left(\frac{u}{U_e} \right) - \frac{u^2}{2c_p}} \quad (5.46)$$

Questa equazione può essere differenziata per fornire il flusso di calore sulla parete:

$$q_w \equiv -\lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = -\lambda_w (T_{aw} - T_w) \frac{1}{U_e} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = -\lambda_w (T_{aw} - T_w) \frac{1}{\mu_w U_e} \tau_w \quad (5.47)$$

relazione che collega il flusso di calore allo sforzo di attrito sulle pareti.

Adimensionalizzando opportunamente questa relazione (5.47) si stabilisce un collegamento tra il **numero di Stanton "Ch"** [una misura adimensionale del flusso di calore rapportato ad un flusso convettivo di entalpia,

Caveat: nel compressibile si ritrovano moltissime definizioni di tale numero] ed il **coefficiente di attrito "c_f"**:

$$\boxed{Ch \equiv \frac{q_w}{\rho_e U_e c_p (T_{aw} - T_w)} = \left(\frac{\lambda_w}{c_p \mu_w} \right) \left(\frac{\tau_w}{\rho U_e^2} \right) = \frac{1}{2Pr} c_f \stackrel{\text{per } Pr=1}{=} \frac{c_f}{2}} \quad (5.48)$$

Relazione detta:

similitudine di Reynolds per flussi laminari

In verità abbiamo dimostrato la similitudine soltanto per il caso $Pr=1$.

Nel caso turbolento vedremo che, per $Pr \neq 1$, questa relazione si modifica presentando $Pr^{-2/3}$.

Introducendo" nella definizione di temperatura adiabatica di parete (5.45) il concetto di **fattore di recupero "r"**:

$$\begin{cases} T_{aw} = T_e + r \frac{U_e^2}{2c_p} \\ T_o = T_e + \frac{U_e^2}{2c_p} \end{cases} \Rightarrow r = \frac{T_{aw} - T_e}{T_o - T_e} \quad (5.49)$$

Fisicamente il fattore di recupero misura la percentuale dell'energia cinetica "recuperata" sulla parete

Per moti laminari $r \approx Pr^{1/2}$, per moti turbolenti $r \approx Pr^{1/3}$

Si può migliorare, usando il fattore di recupero "r", la seconda soluzione di C-B [$Pr=1$; $dp/dx=0$:] (5.46) nella forma:

$$\boxed{T = T_w + (T_{aw} - T_w) \left(\frac{u}{U_e} \right) - r \left(\frac{u^2}{2c_p} \right)} \quad (5.50)$$

Se si conoscono la temperatura adiabatica di parete $T_{aw}(x)$ ed il fattore di recupero $r(x)$, la (5.50) fornisce agevolmente il profilo $T(x,y)$ una volta noto il profilo di velocità $u(x,y)$. La relazione (5.47) trovata per il flusso di calore assume la forma:

$$\boxed{q_w = - \left[\frac{\lambda_w}{\mu_w U_e} \tau_w \right] (T_{aw} - T_w)} \quad (5.51)$$

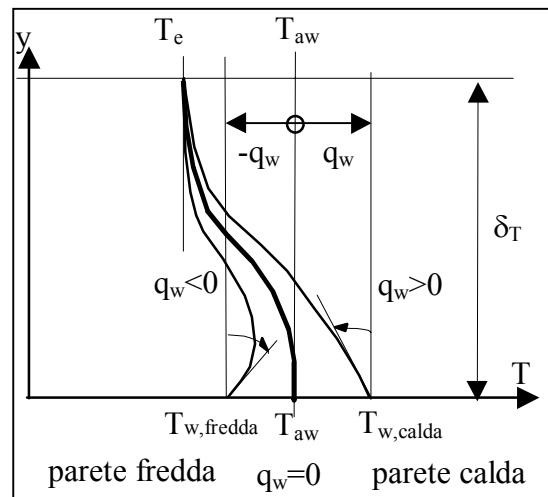
Questa indica una proporzionalità ed una direzionalità del flusso termico in funzione della differenza tra la temperatura adiabatica di parete e la temperatura di parete.

In regime comprimibile il flusso di calore alla parete è proporzionale alla differenza tra la temperatura adiabatica e la temperatura del corpo.

[Nell'incomprimibile il flusso di calore alla parete era proporzionale alla differenza tra la temperatura asintotica esterna e la temperatura del corpo]

Ne discendono le seguenti definizioni:

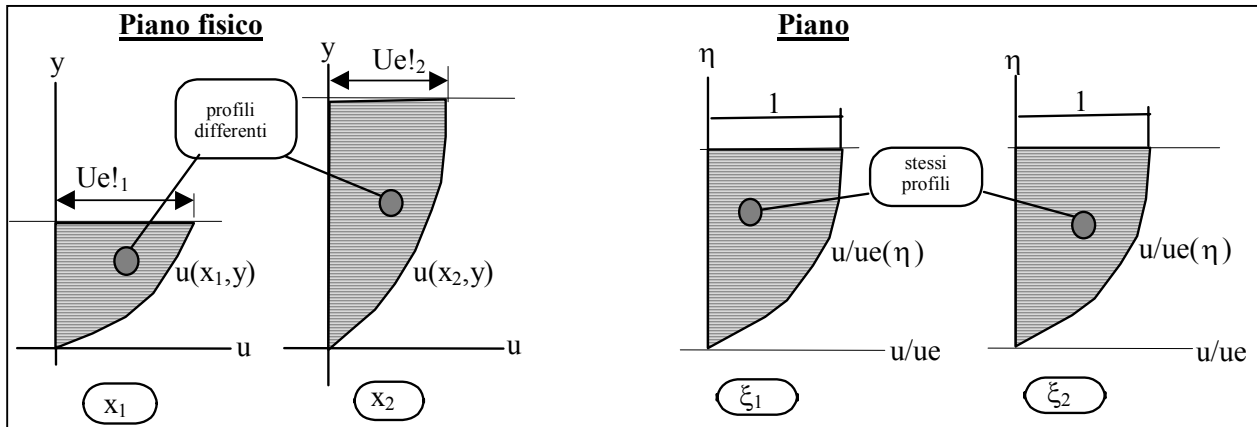
- Se $T_{aw} > T_w \Rightarrow q_w < 0$ i.e. il calore va dal fluido alla parete : **parete fredda**
- Se $T_{aw} < T_w \Rightarrow q_w > 0$ i.e. il calore va dalla parete al fluido: **parete calda**



5.3 Soluzioni simili (*)

Il concetto di strato limite comprimibile simile è pari a quello già presentato per il regime incompressibile. Considerando nel piano fisico dei profili di velocità, soluzioni di uno strato limite, a due stazioni differenti, se esiste una opportuna trasformazione delle variabili dipendenti ed indipendenti tale che i due profili sono identici in piano adimensionale trasformato, si dirà che lo strato limite ammette soluzioni simili.

Ovviamente nello Strato Limite comprimibile lo stesso si dovrà verificare per Strati Limiti termici.



La ricerca di soluzioni simili per strati limite comprimibili è stata oggetto di studio di un nutrito gruppo di ricercatori: **Illingworth, Stewartson, Howart, Doronitzin, Levy e Lees**. Per non incorrere in pregiudiziali chiameremo le trasformazioni che consentono l'analisi con le iniziali del primo e dell'ultimo ricercatore. "**I-L**". Il procedimento parte in modo molto simile all'analisi incompressibile, considerando (2D) la funzione di corrente ψ :

$$\psi(x, y) : \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v \quad (5.52)$$

Questo elimina il problema del soddisfacimento dell'equazione di continuità, e suggerisce che la variabile $\left[U_e \int \rho dy \right]$ rappresenta la scala in direzione normale per la funzione di corrente.

L'idea di base è di ricercare l'esistenza di due variabili (ξ, η) che possano permettere la rappresentazione della funzione di corrente e della velocità nel piano trasformato con separazione delle variabili:

$$\psi^*(\xi, \eta) = \int \rho u dy = G(\xi) f(\eta) \quad ; \quad u^*(\xi, \eta) = U_e(\xi) f'(\eta) \quad (5.53)$$

Ovviamente la sostituzione delle variabili trasformate nell'equazione deve permettere di ritrovare le **condizioni per cui l'equazione differenziale risultante è indipendente da ξ , ovvero lo strato limite è simile**.

La trasformazione fu trovata da **Illingworth**:

$$\xi = \int_0^x \rho_e(x) U_e(x) \mu_e(x) dx = \xi(x) \quad \eta = \frac{U_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy = \eta(x, y) \quad (5.54)$$

La trasformazione delle derivate segue la solita logica:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \rho_e U_e \mu_e \frac{\partial}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} = \left(\frac{U_e \rho}{\sqrt{2\xi}} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (5.55)$$

Con queste premesse:

- considerando la x-componente della quantità di moto
- esprimendo le componenti della velocità in termini della funzione di corrente
- introducendo le trasformazioni delle derivate (5.55)
- **definendo la funzione $f(\xi, \eta)$ tale che:**

$$\frac{u}{U_e} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \equiv f' \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = f' \frac{\partial U_e}{\partial \xi} + U_e \frac{\partial f'}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = U_e f'' \quad (5.56)$$

Nota l'impropria (per il momento) definizione di f' che indica la derivata parziale di f rispetto ad η , tale improprietà sarà risolta e compresa allorquando, nella ricerca delle soluzioni simili, si imporrà che la f sia funzione soltanto di η : $f(\eta)$, in tale contesto f' rappresenterà, infatti, una derivata totale.

Ponendo

$$C = \frac{\rho \mu}{\rho_e \mu_e} \quad (5.57)$$

["C(η)" è chiamato fattore di Chapman-Rubensin]:

si ottiene l'equazione:

$$\boxed{(Cf'') + ff'' = \frac{2\xi}{U_e} \left[(f')^2 - \frac{\rho_e}{\rho} \right] \frac{\partial U_e}{\partial \xi} + 2\xi \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} f'' \right)} \quad (5.58)$$

Questa equazione rappresenta la trasformazione completa della x-componente della QdM nel piano trasformato (ξ, η).

L'equazione dell'energia viene trasformata ponendo:

$$g = g(\xi, \eta) = \frac{h}{h_e} \quad (5.59)$$

Utilizzando la stessa trasformazione si ricava:

$$\boxed{((C/Pr)g') + fg' = \frac{2\xi}{U_e} \left[f' \frac{\partial g}{\partial \xi} - g' \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\rho_e U_e}{\rho h_e} f' \frac{\partial U_e}{\partial \xi} \right] - C \frac{U_e^2}{h_e} (f'')^2} \quad (5.60)$$

Nota: finora abbiamo soltanto trasformato le equazioni, che sono ancora a derivate parziali, non abbiamo ancora imposto le condizioni di similitudine.

Le condizioni al contorno sono:

- Sulla parete (impermeabile): $\eta = 0$: $\begin{cases} \text{velocità}(u, v) \text{ nulla: } f' = f'' = 0 \\ \text{temperatura: } \begin{cases} g = g_w \text{ temperatura fissata} \\ g' = 0 \text{ parete adiabatica} \end{cases} \end{cases}$
- All'estremità dello strato limite: $\eta \rightarrow \infty$: $\begin{cases} f' \rightarrow 1 \\ g \rightarrow 1 \end{cases}$

Una volta risolto il problema, i parametri di interesse applicativo si ricavano come:

$$c_f \equiv \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho_e U_e^2} = \frac{2}{\rho_e U_e^2} \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \frac{2}{\rho_e U_e^2} \mu_w \frac{U_e \rho_w}{\sqrt{2\xi}} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_w = \frac{2}{\rho_e U_e^2} \mu_w \frac{U_e^2 \rho_w}{\sqrt{2\xi}} f''(\xi, 0) \quad (5.61)$$

ovvero:

$$\boxed{c_f = \frac{2\mu_w}{\rho_e} \frac{\rho_w}{\sqrt{2\xi}} f''(\xi, 0)} \quad (5.62)$$

Il flusso di calore alla parete può essere adimensionalizzato in vari modi come

- il **numero di Nusselt (Nu)** [adimensionalizza il flusso di calore alla parete rispetto ad un flusso di calore di tipo conduttivo]
- il **numero di Stanton (Ch)** [adimensionalizza il flusso di calore alla parete rispetto ad un flusso di entalpia di tipo convettivo]

Le espressioni usate sono molteplici, le definizioni più comunemente usate per gli strati limiti comprimibili sono:

$$\text{Nu}_x \equiv \frac{q_w x}{\lambda_e (T_{aw} - T_w)} \quad \text{Ch} \equiv \frac{q_w}{\rho_e U_e (h_{aw} - h_w)} \quad (5.63)$$

E' facile verificare che per gas p.c.p., i due numeri adimensionali espressi nelle forme delle (5.63) sono collegati tra di loro:

$$\text{Nu}_x \equiv \frac{q_w x}{\lambda_e (T_{aw} - T_w)} = \left[\frac{q_w}{\rho_e U_e c_p (T_{aw} - T_w)} \right] \left[\frac{\rho_e U_e x}{\mu_e} \right] \left[\frac{c_p \mu_e}{\lambda_e} \right] = \text{Ch Re}_x \text{Pr} \quad (5.64)$$

Il **numero di Stanton (Ch)** è facilmente collegabile alla soluzione **g(ξ,η)**:

$$\begin{aligned} \text{Ch} &\equiv \frac{q_w}{\rho_e U_e (h_{aw} - h_w)} = \frac{1}{\rho_e U_e (h_{aw} - h_w)} \left[-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right]_w = \\ &= \frac{1}{\rho_e U_e (h_{aw} - h_w)} \left[-\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} \right]_w = \frac{1}{\rho_e U_e (h_{aw} - h_w)} \left[-\frac{\lambda}{c_p} \frac{\rho h_e U_e}{\sqrt{2\xi}} \right]_w g'(\xi, 0) \end{aligned} \quad (5.65)$$

ovvero:

$$\boxed{\text{Ch} = - \left[\frac{1}{\sqrt{2\xi}} \frac{\lambda_w}{c_{p,w}} \frac{\rho_w}{\rho_e} \frac{h_e}{(h_{aw} - h_w)} \right] g'(\xi, 0)} \quad (5.66)$$

La soluzione del sistema di equazioni per strati limiti simili richiede la soluzione di un sistema di equazioni differenziali non lineare del **terzo ordine in f** e del **secondo ordine in g** formato dalla (5.58) e dalla (5.60).

Per la buona definizione del sistema si richiedono quindi 5 condizioni al contorno che sono poste in due punti differenti: sulla parete (tre condizioni) ed all'infinito (due condizioni).

L'infinito è posto ad una distanza dalla parete sufficientemente grande affinché i gradienti delle velocità (f'') e delle temperature (g') siano trascurabili.

Le condizioni di similitudine richiedono che nelle equazioni (5.58) e (5.60) scompaia la dipendenza da "ξ".

Affinché questo sia possibile deve verificarsi che:

1. **C** sia costante o dipendente da **f** e/o da **g**
2. **Pr** sia costante o dipendente da **f** e/o da **g**
3. **ρ_e/ρ** sia dipendente da **f** e/o da **g**
4. $\frac{2\xi}{U_e} \frac{dU_e}{d\xi} = \text{costante}$
5. $\frac{U_e^2}{h_e}$ sia costante o trascurabile oppure sia **Pr=1**
6. $\frac{2\xi U_e}{h_e} \frac{dU_e}{dx} = \frac{\xi}{h_e} \frac{d(U_e^2)}{dx} \propto \frac{\xi}{h_e} \frac{dh_e}{d\xi} = \text{costante}$

Le condizioni (1) e (3) sono soddisfatte se assumiamo gas pc.p. Infatti essendo nell'interno dello strato limite la pressione costante con "y" risulta:

$$\frac{\rho_e}{\rho(y)} = \frac{T(y)}{T_e} = \frac{h(y)}{h_e} = g(\eta) \quad (5.67)$$

Approssimando poi la dipendenza del rapporto delle viscosità dal rapporto delle temperature con una legge di potenza di esponente "n" $\frac{\mu}{\mu_e} = \left(\frac{T}{T_e}\right)^n$ (per l'aria $n=2/3$ è una buona approssimazione) si ha:

$$\frac{h_e}{h} \frac{\mu}{\mu_e} = \frac{h_e}{h} \left(\frac{h}{h_e}\right)^n = \left(\frac{h}{h_e}\right)^{n-1} \propto C(\eta) \quad (5.68)$$

La condizione (2) è approssimativamente soddisfatta per gas e quindi per l'aria, per la quale $Pr \approx 0.715$.
Le condizioni (4) e (6) sono soddisfatte dalle distribuzioni di potenza alla Falkner-Skan:

$$U_e = C_u \xi^m \quad ; \quad h_e = C_h \xi^j \quad (5.69)$$

Notiamo che le condizioni di similitudine sono violate se l'entalpia di parete $g_w = g(0)$ [e quindi la temperatura] non è assunta essere costante con x.

Sotto queste condizioni le equazioni si riducono alle forme:

QdM:
$$(Cf'')' + f f'' = \beta [(f')^2 - g] \quad (5.70)$$

Energia:
$$\left(\frac{C}{Pr} g'\right)' + f g' = -C(\gamma - 1) M_e^2 (f'')^2 \quad (5.71)$$

avendo posto:

$$\beta = \frac{2\xi}{U_e} \frac{dU_e}{d\xi} \quad (\gamma - 1) M_e^2 = \frac{U_e^2}{a_e^2 / (\gamma - 1)} = \frac{U_e^2}{h_e} \quad (5.72)$$

Il sistema finale presenta per la Q.d.M. un'equazione molto simile a quella di Falkner-Skan che è collegata all'equazione dell'energia soltanto per il tramite della costante di Rubesin C e di g .

Da notare che in generale Pr e C sono riferiti ai parametri locali e quindi in generale sono variabili con η .

La risoluzione del sistema [detto a due punti ovvero "box-type"] è fatta di solito con metodi di shooting usando integrazione numerica [ad es. alla Runge-Kutta del quarto ordine] di problemi di Cauchy [che partono da valori noti a $\eta=0$].

Notiamo che:

5 sono le condizioni per poter definire un problema di valore iniziale di Cauchy, di queste 3 sono già fissate dalle condizioni alla parete; le altre 2 sono valori di tentativo per quei parametri per cui non sono possibili imposizioni teoriche sulla parete:

$$f''(0) \text{ per la QdM} \quad ; \quad g'(0) \text{ per l'energia}$$

Questi due valori di tentativo devono essere indovinati/iterati marciando dalla parete fino ad un infinito numerico per verificare che le 2 condizioni sul bordo esterno dello strato limite imposte dal modello siano: $f'(\infty)=1$ e $g(\infty)=1$.

In particolare è consigliabile il seguente canovaccio di procedimento:

1. assumere valori di tentativo per $f''(0)$ e $g'(0)$,
 $f''(0)=0.5$ e $g'(0)=1$ sono un buon inizio per lastre piane,
2. integrare attraverso lo strato limite fino a grandi valori di $\eta_{\max}$ (tipicamente tra 5 ed 8),
un criterio razionale per definire $\eta_{\max}$ è quello di verificare che $f''(\eta_{\max})$ sia un numero piccolo e dell'ordine dell'accuratezza del metodo di integrazione],
3. controllare gli andamenti di f' e g che devono tendere a divenire costanti,

4. se $f'(\eta_{\max})$ e $g(\eta_{\max})$ sono molto diversi dall'unità occorre ri-andare al punto (1) modificando i valori di tentativi assunti per $f''(0)$ e $g'(0)$ secondo una strategia di convergenza.

5.3.1 Lastra piana

Il campo euleriano su di una lastra piana ad angolo di attacco nullo è caratterizzato da proprietà costanti:

$$U_e = \text{costante} \quad T_e = \text{costante} \quad p_e = \text{costante} \quad (5.73)$$

per potere ricercare soluzioni simili occorre introdurre un'altra condizione:

- o assumere che la temperatura di parete sia costante: $T_w = \text{costante}$
- o assumere che la parete sia adiabatica: $(dT/dy)_w = 0$

Sotto queste ipotesi lo strato limite risulta simile e regolato dalle equazioni:

$$\text{QdM:} \quad (Cf'')' + ff'' = 0 \quad (5.74)$$

$$\text{Energia:} \quad \left(\frac{C}{Pr} g' \right)' + fg' = -C(\gamma - 1)M_e^2 (f'')^2 \quad (5.75)$$

$$\text{risultando} \quad \beta = \frac{2\xi}{U_e} \frac{dU_e}{d\xi} = 0. \quad (5.76)$$

La risoluzione di questo sistema di equazioni, con le opportune condizioni al contorno, deve ricercare le incognite $f''(0)$ e $g'(0)$, che una volta note rendono il problema praticamente risolto in quanto diventa un problema di valore iniziale (Cauchy).

Una stima preliminare è data da una integrazione che presuppone $C=C_w=\text{costante}$ ed una espansione in serie di f'' che porta al risultato approssimato:

$$f''(0) \approx \frac{0.4696}{\sqrt{C_w}} \quad ; \quad g'(0) = 0.66[1 - g(0)] \left[\frac{Pr f''(0)}{6C_w} \right] \quad (5.77)$$

Queste soluzioni determineranno rispettivamente lo sforzo alla parete e il flusso di calore alla parete essendo $\rho_w/\rho_e = T_e/T_w$ ed assumendo $(\mu_w/\mu_e) = (T_w/T_e)^n$

Questi parametri possono essere espressi nel piano fisico come segue:

$$c_f = \frac{2\mu_w}{\rho_e} \frac{\rho_w}{\sqrt{2\xi}} f''(0) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Re_x}} \left(\frac{T_w}{T_e} \right)^{n-1} f''(0) \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned}
Ch &= -\frac{1}{\sqrt{2\xi}} \frac{\lambda_w}{c_{p,w}} \frac{\rho_w}{\rho_e} \frac{h_e}{(h_{aw} - h_w)} g'(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\mu_e} \frac{\lambda_w}{c_{p,w}} \frac{\rho_w}{\rho_e} \frac{h_e}{(h_{aw} - h_w)} \frac{1}{\sqrt{Re_x}} g'(0) = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\rho_w \mu_w}{\rho_e \mu_e} \right) \frac{1}{Pr_w} \frac{1}{[(T_{aw}/T_e) - (T_w/T_e)]} \frac{1}{\sqrt{Re_x}} g'(0) = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{T_w}{T_e} \right)^{n-1} \frac{1}{Pr_w} \frac{1}{[(T_{aw}/T_e) - (T_w/T_e)]} \frac{1}{\sqrt{Re_x}} g'(0)
\end{aligned} \tag{5.79}$$

Ne risultano relazioni (colonna a sinistra) che possiamo comparare con le analoghe soluzioni incompressibili (colonna a destra)

Comprimitibile**Incompressibile**

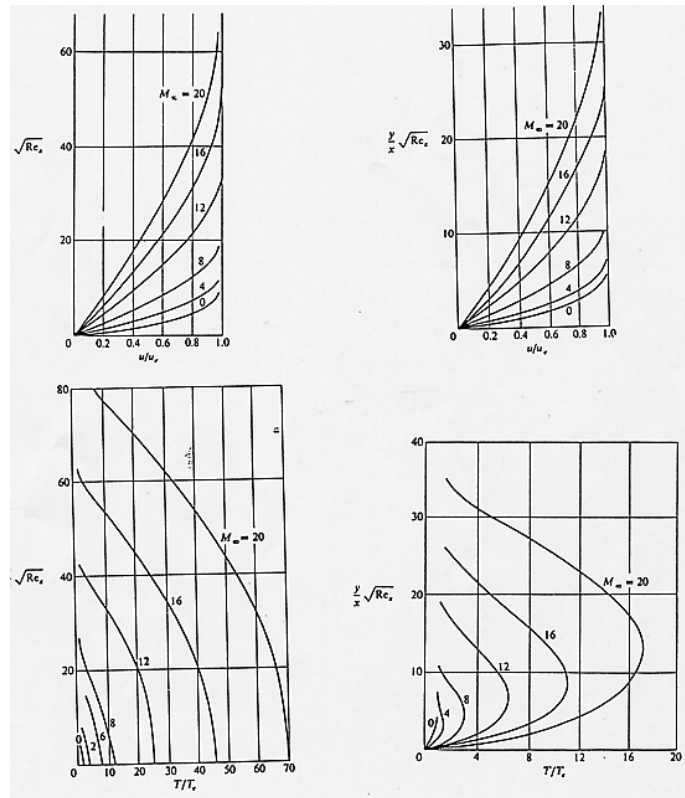
$$c_{f,comp.} = \frac{F_f(M_e, Pr, \gamma, T_w/T_e)}{\sqrt{Re_x}} \quad c_{f,inc.} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \tag{5.80}$$

$$Ch_{comp.} = \frac{G_h(M_e, Pr, \gamma, T_w/T_e)}{\sqrt{Re_x}} \quad Ch_{inc.} = \frac{0.332}{\sqrt{Re_x}} Pr^{-2/3} \tag{5.81}$$

da cui risultano, per l'analogia di Reynolds, i rapporti:

$$\left(\frac{Ch}{c_f} \right)_{comp.} = \frac{F_f}{G_h} = \mathfrak{F} \left(M_e, Pr, \gamma, \frac{T_w}{T_e} \right) \quad \left(\frac{Ch}{c_f} \right)_{inc.} = \frac{1}{2} Pr^{-2/3} \tag{5.82}$$

Riportiamo di seguito diagrammi per i profili di velocità e di temperature nonché i coefficienti di attrito ed i numeri di Stanton, per strati limite comprimibile su lastre piane (*calde e fredde*) in aria.

Lastra adiabatica**Lastra fredda**

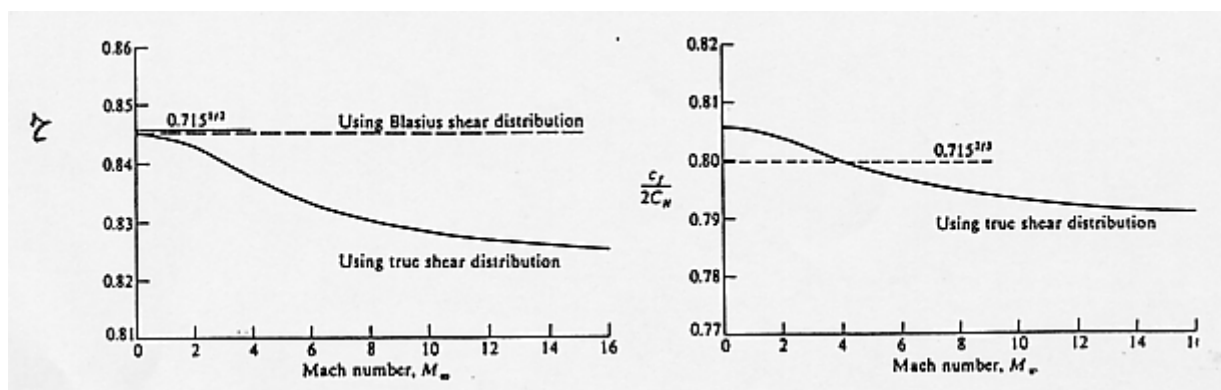
Dall'analisi di questi diagrammi si possono trarre le seguenti maggiori conclusioni:

1. • All'aumentare del M_e , il coefficiente di attrito c_f diminuisce
[attenzione questo non significa che l'attrito diminuisce in quanto $\tau_w = \frac{1}{2}\rho_e U_e^2 c_f = \frac{1}{2}\gamma p_e M_e^2 c_f$ per cui se nel passare da $M_e = 0$ a $M_e = 20$ il coefficiente di attrito si riduce a metà, in realtà l'attrito può aumentare anche considerevolmente]
2. • Il raffreddamento della parete fa aumentare il coefficiente di attrito c_f , e Ch
3. • Il raffreddamento della parete fa diminuire lo spessore dello strato limite δ_T ,
4. • Lo spessore dello strato limite aumenta con M_e
5. • La variazione della temperatura aumenta con M_e
6. • All'aumentare di M_e diminuiscono sia c_f che Ch

Il fattore di recupero, " r ", definito attraverso la temperatura adiabatica di parete:

$$h_{aw} = h_e + r \frac{1}{2} U_e^2 \quad ; \quad h_0 = h_e + \frac{1}{2} U_e^2 \rightarrow r = \frac{h_{aw} - h_e}{h_0 - h_e} = \frac{T_{aw} - T_e}{T_0 - T_e} \quad (5.83)$$

è riportato, insieme al rapporto di analogia di Reynolds " $c_f / (2Ch)$ " in figura:



Da cui discendono i **limiti di applicazione delle espressioni mediate**:

$$r = \sqrt{Pr} \quad ; \quad \frac{Ch}{c_f} = \frac{Pr^{-2/3}}{2} \quad (5.84)$$

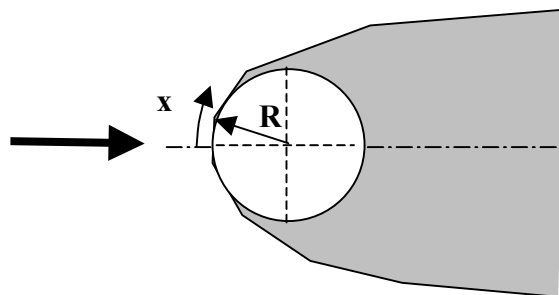
5.3.2 Intorno del punto di ristagno

Questo secondo caso classico si riferisce all'intorno del punto di ristagno di un corpo.

Consideriamo la geometria in figura che rappresenta il naso di un *blunt body* bidimensionale con raggio di curvatura " R " finito.

Per questo problema, la soluzione euleriana fornisce un campo di velocità del tipo:

$$U_e(x) \approx \left(\frac{dU_e}{dx} \right)_{\text{rist.}} x \quad (5.85)$$



se "x" rappresenta la coordinata curvilinea con origine nel punto di ristagno.

Come per l'incomprimibile a questo problema corrisponde $\beta=1$, per cui **le equazioni dello strato limite comprimibile piano** sono: [nell'intorno del punto di ristagno sarà certamente $M_e \approx 0$]:

$$\text{QdM:} \quad (Cf'') + ff'' = (f')^2 - g \quad (5.86)$$

$$\text{Energia:} \quad ([C/Pr]g') + fg' = 0 \quad (5.87)$$

Per lo **strato limite comprimibile su corpi assialsimmetrici**, la trasformazione di I-L è leggermente differente, occorre infatti assumere:

$$\xi = \int_0^x \rho_e(x) U_e(x) \mu_e(x) r^2 dx = \xi(x) \quad \eta = \frac{U_e r}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy = \eta(x, y) \quad (5.88)$$

dove "r" è la distanza del punto dall'asse.

Per questi campi le equazioni diventano:

$$\text{QdM:} \quad (Cf'')' + ff'' = \frac{1}{2} [(f')^2 - g] \quad (5.89)$$

$$\text{Energia:} \quad ([C/Pr]g') + fg' = 0 \quad (5.90)$$

sono cioè associate ad un valore apparente di

$$\boxed{\beta=1/2} \quad (5.91)$$

Le soluzioni per il flusso di calore, nei due casi sono:

caso piano (cilindro)	caso assialsimmetrico (sfera)
$q_w = 0.570 Pr^{-0.6} \sqrt{\rho_e \mu_e} \sqrt{dU_e/dx} (h_{aw} - h_w)$	$q_w = 0.763 Pr^{-0.6} \sqrt{\rho_e \mu_e} \sqrt{dU_e/dx} (h_{aw} - h_w)$

(5.92)

Ovviamente dalla geometria del punto di ristagno discende che:

$$\Delta x \approx R \Delta \phi \rightarrow \frac{dU_e}{dx} \approx \frac{1}{R} \frac{dU_e}{d\phi} \quad (5.93)$$

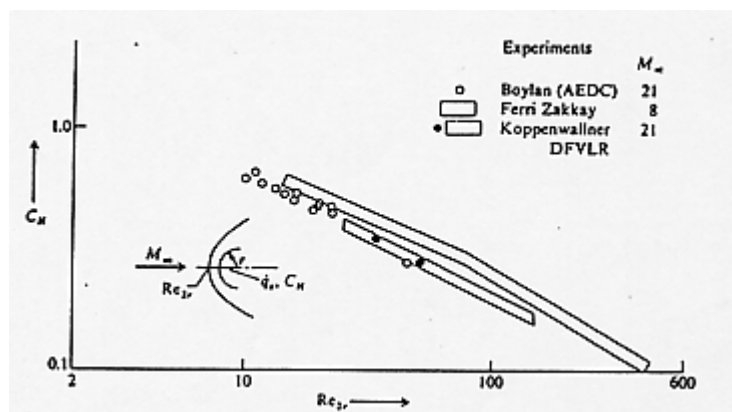
da questa semplice considerazione deriva l'importante conclusione che:

il flusso di calore nel punto di ristagno varia in modo inversamente proporzionale alla radice quadrata del raggio di curvatura del bordo di attacco del corpo:

$$\boxed{q_w \propto 1/\sqrt{R}} \quad (5.94)$$

il che spiega perché i bordi di attacco ed i nasi dei velivoli ipersonici sono arrotondati: **per evitare flussi di calore troppo elevati.**

Si riporta a lato una figura in cui si riporta il numero di Stanton in funzione del Reynolds basato sul raggio di curvatura del bordo di attacco (2D)



5.4 Il metodo della temperatura di riferimento

In tutta l'analisi del moto compressibile si è sempre ricercata una legge di similitudine (o di affinità) che fosse capace di estendere al compressibile soluzioni trovate nel caso incompressibile.

Per lo strato limite il metodo della temperatura di riferimento tenta questa "similitudine".

Abbiamo già visto che per la lastra piana le soluzioni per il compressibile e per l'incompressibile erano:

Compressibile	Incompressibile	
$c_{f,comp.} = \frac{F_f(M_e, Pr, \gamma, T_w/T_e)}{\sqrt{Re_x}}$	$c_{f,inc.} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}$	(5.95)

$Ch_{comp.} = \frac{G_h(M_e, Pr, \gamma, T_w/T_e)}{\sqrt{Re_x}}$	$Ch_{inc.} = \frac{0.332}{\sqrt{Re_x}} Pr^{-2/3}$	(5.96)
--	---	--------

Il metodo della temperatura di riferimento cerca di determinare una temperatura T^* funzione del Mach e del rapporto T_w/T_e per cui, valutando tutti i parametri termodinamici e tutti i numeri adimensionali a questo valore di T^* sia possibile usare per lo strato limite compressibile laminare le relazioni trovate per l'incompressibile, ovvero esprimere:

$c_{f,comp.} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x^*}}$	$Ch_{comp.} = \frac{0.332}{\sqrt{Re_x^*}} (Pr^*)^{-2/3}$	(5.97)
---	--	--------

dove:

$Re^* = \frac{\rho(T^*)U_{ex}}{\mu(T^*)} = \frac{\rho^* U_{ex}}{\mu^*}$	$Pr^* = \frac{c_p(T^*)\mu(T^*)}{\lambda(T^*)} = \frac{c_p^* \mu^*}{\lambda^*}$	(5.98)
---	--	--------

Ovviamente la ricerca della definizione di tale temperatura è stata fatta all'inizio in modo empirico e molte sono le definizioni fornite. Dorrance ha mostrato che questa temperatura può derivare direttamente dalle leggi di trasformazione di I-L.

Il risultato teorico di Dorrance è molto simile a quello che invero presenta correlazioni ottimali e che viene ampiamente usato per la determinazione della **temperatura di riferimento**:

$$\frac{T^*}{T_e} = 1.0 + 0.032M_e^2 + 0.58\left(\frac{T_w}{T_e} - 1\right)$$

(5.99)

Ne discendono automaticamente tutte le relazioni calcolate alla T^* :

- fattore di recupero:
 $r = \sqrt{Pr^*}$
(5.100)
- temperatura adiabatica di parete:
 $T_{aw} = T_e \left[1 + \sqrt{Pr^*} \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right]$
(5.101)
- analogia di Reynolds:
 $\frac{c_f}{Ch} = 2(Pr^*)^{2/3}$
(5.102)
- spessore dello strato limite:
 $\frac{\delta}{x} = \frac{\sqrt{C_w}}{\sqrt{Re_{x,e}}} \left[5.0 + \left(0.2 + 0.9 \frac{T_w}{T_{aw}} \right) (\gamma - 1) M_e^2 \right]$
(5.103)

I confronti con soluzioni numeriche sono ottimi per la lastra piana a temperatura costante, meno buoni, ma accettabili, per lastra piana a flusso di calore costante.

Il fatto estremamente interessante e sorprendente è che tale metodo funziona altrettanto bene anche per gli strati limiti turbolenti.

Ad esempio il coefficiente di attrito turbolento di una lastra piana compressibile può essere calcolato usando una qualsiasi delle formule proposte per l'incompressibile, valutando tutti i parametri alla T^* :

coefficiente di attrito:
$$c_f = \frac{0.0592}{(Re^*)^{0.2}} \quad (5.104)$$

o correlazioni più sofisticate quali:
$$c_f = \frac{0.455}{[\ln(0.06 Re_x^*)]^2} \text{ ecc..} \quad (5.105)$$

fattore di recupero:
$$r = (Pr^*)^{1/3} \quad (5.106)$$

temperatura adiabatica di parete:
$$T_{aw} = T_e \left[1 + (Pr^*)^{1/3} \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right] \quad (5.107)$$

analogia di Reynolds: (lo stesso del laminare)
$$\frac{c_f}{Ch} = 2(Pr^*)^{2/3} \quad (5.108)$$

L'estensione a corpi differenti da lastre piane deve essere fatta con estrema cautela e soltanto come predizione preliminare di progetto.

.5.5 Relazioni Integrali per strati limite compressibili

Facendo lo stesso procedimento fatto per l'incompressibile si ricava la seguente **relazione di von Karman valida per il compressibile**:

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} \left(2 + H + \frac{U_e}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dU_e} \right) + \frac{1}{\rho_e U_e^2} \frac{d}{dx} \left[p_e \delta - \int_0^\delta p dy \right] = \frac{c_f}{2} \quad (5.109)$$

dove:

spessore di spostamento compressibile:
$$\delta^* = \int_0^\infty \left[1 - \frac{\rho}{\rho_e} \frac{u}{U_e} \right] dy \quad (5.110)$$

spessore di spostamento di QdM compressibile:
$$\theta^* = \int_0^\infty \frac{u}{U_e} \left[1 - \frac{\rho}{\rho_e} \frac{u}{U_e} \right] dy \quad (5.111)$$

rapporto di forma:
$$H = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (5.112)$$

per moto adiabatico:
$$M_e^2 = - \frac{U_e}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dU_e} \quad (5.113)$$

Queste relazioni sono valide sia per SL laminari che per SL turbolenti

Per strati limite laminari, di solito si trascura il termine di pressione e si assume moto adiabatico per cui l'equazione di von Karman diventa:

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (2 + H - M_e^2) = \frac{c_f}{2}} \quad (5.114)$$

che può essere integrata facilmente.

Per quanto riguarda l'energia, l'equazione integrale fornisce direttamente il flusso di calore sulla parete:

$$q_w = \frac{d}{dx} \left[\int_0^\infty \rho u \left(h + \frac{1}{2} u^2 - h_e + \frac{1}{2} U_e^2 \right) dy \right] \quad (5.115)$$

.5.5.1 Il Metodo di Thwaites compressibile

E' stato proposto, ispirandosi a Thwaites, di integrare l'equazione (5.114) come:

$$\frac{U_e}{v_o} \frac{d(\theta_i^2)}{dx} \approx [0.45 - 6\lambda] + 2S_i(\lambda) \left[\frac{T_e}{T_o} \frac{\mu^*}{\mu_o} - 1 \right] \quad (5.116)$$

Nota il pedice "o" si riferisce alle condizioni di ristagno e l'asterisco alla temperatura di riferimento

Si usano le correlazioni incomprimibili di Thwaites per $\theta_i(\lambda)$, $S_i(\lambda)$, $H_i(\lambda)$ con la separazione a $\lambda = -0.09$ ($S_i = 0$), correlando tali parametri (incomprimibili, pedice i) con quelli comprimibili mediante le relazioni:

$$\lambda = \frac{\theta_i^2}{v_o} \frac{dU_e}{dx} \quad (5.117)$$

$$\theta = \theta_i \left(\frac{T_o}{T_e} \right)^2 \quad (5.118)$$

$$H = H_i \left(\frac{T_{aw}}{T_o} \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \right) + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 \quad (5.119)$$

$$S = \frac{\mu_o}{\mu^*} \frac{T^*}{T_e} \frac{\tau_w}{\rho_e U_e} \theta_i \quad (5.120)$$

Tale metodo sembra abbastanza accurato per calcoli preliminari.

.5.6 La transizione laminare/turbolento nel compressibile

Ovviamente quanto detto con la transizione incomprimibile vale a maggior ragione per la transizione compressibile: **non è disponibile a tutt'oggi una teoria completa.**

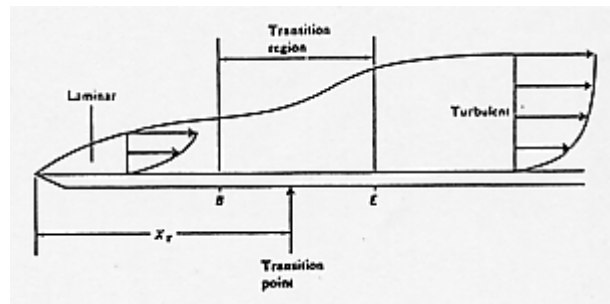
Occorre basarsi su osservazioni ed empirismi che, nel compressibile, sono complicati dal fatto che i fattori che sembrano influenzare tale fenomeno sono ancora più molteplici ed alcuni con effetti e con motivazioni non ancora chiare.

Definendo il punto di transizione come al solito, considerando cioè un punto " x_{tr} " in cui si ha una istantanea conversione del flusso da laminare al turbolento e definendo un numero di Reynolds di transizione come:

$$Re_{tr} = \frac{\rho_e U_e x_{tr}}{\mu_e}, \text{ da osservazioni sperimentali si deriva}$$

che Re_{tr} dipende da:

1. numero di Mach euleriano: M_e



2. dalla forma del corpo : θ_c (può essere l'angolo di cono o lo spessore massimo)
3. temperatura di parete: T_w
4. dalla portata massica superficiale (aspirata o sublimata): $\dot{m}$
5. dall'angolo di attacco: α
6. dalla RMS della scabrosità della superficie: k_R
7. dai disturbi nella corrente esterna o nell'ambiente: E
8. dal gradiente locale di pressione euleriana: dp_e/dx
9. dal raggio del bordo di attacco o del naso: R_n
10. dal numero di Reynolds unitario: Re_L / L
11. dal livello di vibrazione del corpo, V_{vib}
12. dalla curvatura del corpo: C
13. dagli effetti tridimensionali lungo l'apertura
14. dalla temperatura di ristagno: T_O
15. dall'entità delle reazioni chimiche
16. dal rateo delle reazioni chimiche
5. dallo strato entropico
18. dalla lunghezza caratteristica del corpo
19. eccetera.....

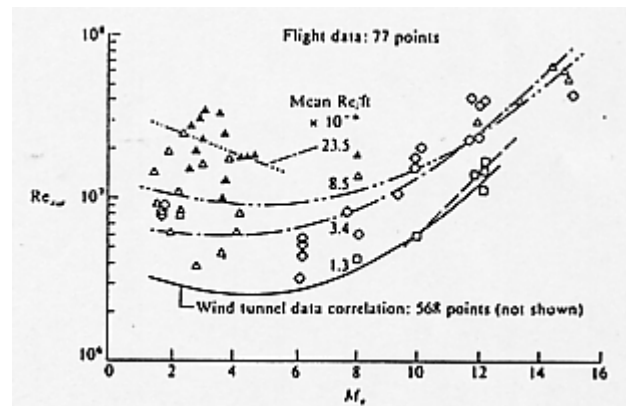
Superando il momento di frustrazione che deriva dal grande numero di fattori in gioco, si ritrova fortunatamente che in molte situazioni la transizione è dominata da un numero minore di parametri, le cui influenze cercheremo di commentare nel seguito.

Numero di Mach

Il numero di Mach euleriano (i.e. sull'esterno dello strato limite) ha una grande influenza sulla transizione.

La teoria della stabilità mostra che la stabilità dello strato limite aumenta con il Me , specialmente sopra $Me=4$.

Come si può notare dalla figura a lato che mostra dati in galleria e dati in volo su coni appuntiti, si nota come a Mach ipersonici, $Me=16$, si arriva a $Re_{tr}=10^8$ (memo per l'incompressibile di solito è $Re=5 \cdot 10^5$). Questo è un effetto molto benefico.



Ambiente

La transizione è favorita da disturbi che sono presenti nella corrente: onde di rumore dai motori, vibrazioni, turbolenza libera in aria, turbolenza in gallerie a vento ecc.

Le conseguenze sui dati possono essere notevoli, e dalla figura precedente si nota come i dati in galleria mostrano Re_{tr} notevolmente inferiori a quelli di volo.

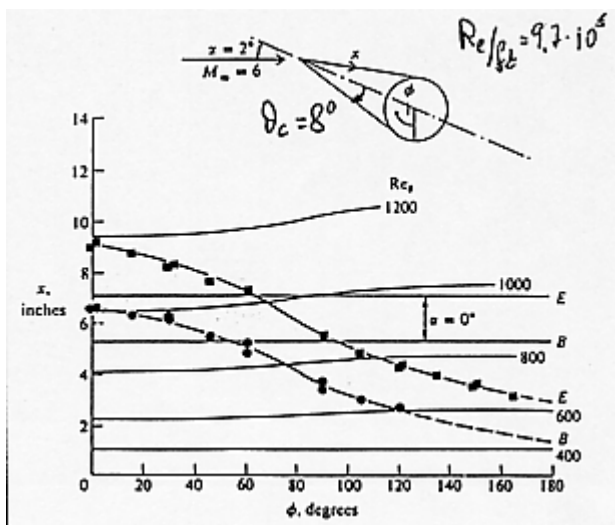
Cautela occorre quindi all'uso di dati di gallerie supersoniche o ipersoniche che finora non hanno flussi con buone qualità.

Altro discorso è la composizione chimica/fisica del gas, che a valle di onde d'urto possono essere molto differenti da quelle dell'aria asintotica.

Numero di Reynolds unitario

Il numero di Reynolds unitario è definito con una lunghezza unitaria (un Metro in S.I. o un Foot in B.G.) e **non è quindi adimensionale**.

Da un punto di vista teorico, sulla base del principio di similitudine non vi è alcuna ragione di una dipendenza tra questo numero (dimensionale) e la transizione, ma come si può notare nella figura, si ritrova invece che il Reynolds di transizione diminuisce notevolmente al diminuire del Reynolds unitario. Molti i dibattiti, le conferme e le negazioni, l'effetto esiste anche se finora non è giustificato (se a pensare l'esistenza di un'altra fenomeno dipendente da una lunghezza finora sconosciuta). Nella figura: E = inizio, B = fine della transizione laminare - turbolento.



di

ma
non

Angolo di Attacco - Effetti tridimensionali

Su corpi assialsimmetrici l'angolo di attacco genera forti effetti tridimensionali che generano localmente transizioni con diverse estensioni e localizzazioni.

Esperimenti su coni appuntiti riportati in figura mostrano che l'inizio (B) e la fine della transizione (E) si spostano all'indietro sul lato esposto al vento (*wind-ward side*, $\phi=0^\circ$) e si spostano verso il davanti sul lato in ombra (*lee-ward side*, $\phi=180^\circ$).

Andamenti completamente opposti a quelli che uno potrebbe immaginare.

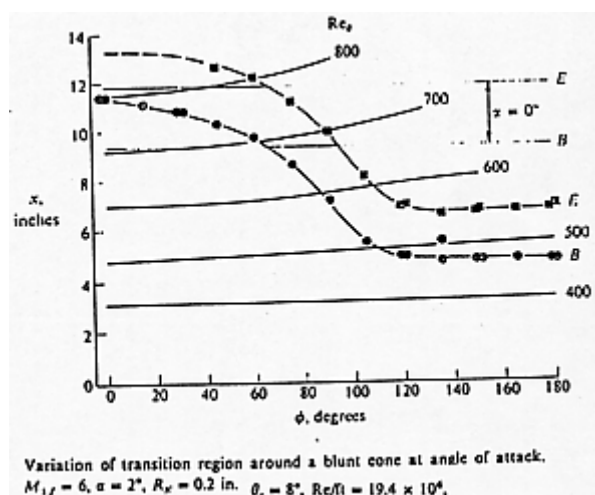
Raggio del Bordo di attacco o del naso

Questo è un altro effetto che porta ad un paradosso chiamato "*blunt nose paradox*".

Un cono con apice arrotondato causa la presenza di una Onda d'Urto Staccata che genera vorticità e quindi uno strato entropico. Questo fatto modifica notevolmente il campo fluidodinamico euleriano nei pressi del naso, realizzando le condizioni di un cono appuntito equivalente solo molto a valle.

Gli effetti sulla transizione sono qualitativamente gli stessi, ma quantitativamente molto differenti, come si può vedere nella figura in cui si nota che un piccolo raggio di curvatura sul naso fa ritardare di molto la transizione. Questo può essere spiegato dall'accelerazione che la curvatura causa sul moto.

Ma l'enigma strano sta nel fatto ritrovato sperimentalmente che l'uso di un raggio di curvatura grande al contrario fa anticipare la transizione: è questo il paradosso: l'effetto sulla transizione dipende dalla grandezza del raggio di curvatura.



Temperatura di parete

In campo incomprimibile il raffreddamento della parete fa ritardare la transizione.

In campo compressibile le cose sono molto più complicate.

Un raffreddamento moderato fa ritardare la transizione (aumenta il Re_t), ma un raffreddamento forte fa anticipare la transizione.

Un altro paradosso.

Predizione della transizione compressibile

E' abbastanza ovvio che, ad oggi, si usano formulazioni empiriche basate su esperimenti.

Ricordando l'espressione dello spessore di quantità di moto compressibile e di Reynolds di transizione basato su questa lunghezza:

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{U}{U_e} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_e} \frac{u}{U_e} \right) dy \quad Re_{\theta, tr} = \frac{\rho_e U_e \theta_t}{\mu_e} \quad (5.121)$$

Vi sono due correlazioni empiriche, oggi usate:

$$Re_{\theta, tr} = 100 M_e \quad (5.122)$$

dove M_e è il Mach locale al bordo esterno (euleriano sulla parete) dello strato limite.

Questa correlazione è stata usata per il progetto preliminare dello Space Shuttle.

Un'altra correlazione, basata su esperimenti su coni, è:

$$\log_{10}(Re_{tr}) = 6.421 \exp[1.209 \times 10^{-4} M_e^{2.641}] \quad (5.123)$$

Questa formula è molto più comoda in quanto non richiede il calcolo dello spessore di quantità di moto per lo strato limite compressibile.

E' da notare che la corretta predizione della transizione in supersonica e specialmente in ipersonica è fondamentale per il dimensionamento del velivolo [risparmi in peso fino al 50% dovuti alla variabilità del carico (rapporto propulsione/resistenza) e della protezione termica].

Quanto presentato è empirico ed approssimato, molto ancora è da ricercare in questo campo.

5.6 Riscaldamento aerodinamico

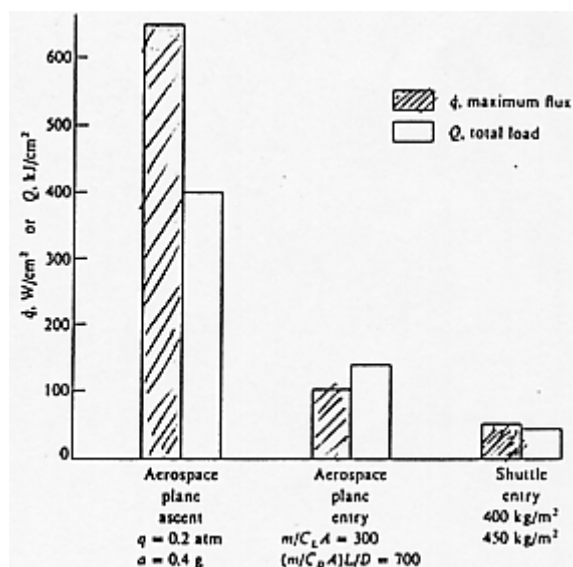
Il riscaldamento aerodinamico è probabilmente il maggiore problema tecnologico dell'ipersonica.

Ma è da far notare che questo problema si presenta non solo per il rientro dallo spazio ma soprattutto, e con maggiore entità, per l'ascesa attraverso l'atmosfera di un velivolo tipo "**spazio-piano**" che deve acquisire nella salita attraverso l'atmosfera la velocità sufficiente per una traiettoria sub-orbitale (Mach fino a 25).

Nella figura a lato si riportano le stime del flusso di calore nel punto di ristagno " q_w " e del carico termico " Q " immagazzinato durante la manovra.

La stima del flusso di calore è fatta con la risoluzione del campo termico attorno al velivolo, e la stima del carico termico è fatta integrando nel tempo il flusso di calore.

Il flusso di calore è di solito riportato per tramite del numero di Stanton:



$$Ch = \frac{q_w}{\rho_\infty U_\infty (h_{aw} - h_w)} \quad (5.124)$$

da cui:

$$q_w = Ch[\rho_\infty U_\infty (h_{aw} - h_w)] \quad (5.125)$$

Per avere una stima delle dipendenze macroscopiche, consideriamo che per la lastra piana, con $Pr=1$, ed in condizioni ipersoniche o alto supersonico, si ritrova approssimativamente:

$$h_{aw} \approx h_o = h_\infty + \frac{1}{2} U_\infty^2 \approx \frac{1}{2} U_\infty^2 \gg h_w \quad (5.126)$$

per cui una stima preliminare per il **flusso di calore** è:

$$q_w \propto \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^3 Ch, \quad Ch \approx c_f / 2 \quad (5.127)$$

mentre la **resistenza aerodinamica** è:

$$D \propto \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 SC_D \quad (5.128)$$

Da queste semplici relazioni si comprende come all'aumentare della velocità il flusso di calore diventa il problema dominante, in quanto proporzionale al cubo della velocità mentre la resistenza è proporzionale al quadrato della velocità.

Ovviamente nella realtà la determinazione del flusso di calore deve passare attraverso una enorme mole di calcoli che devono tenere in conto anche del regime di moto (laminare/turbolento).

Pur tuttavia il più semplice modo di stima ingegneristica preliminare si basa su una espressione generalizzata del tipo:

$$q_w \propto C (\rho_\infty)^N (U_\infty)^M \quad (5.129)$$

dove gli esponenti "N" e "M", e la costante "C" sono determinati in base ai dati disponibili.

Mostriamo alcune espressioni dei flussi di calore che sono stati usati per il progetto preliminare dello Shuttle:

tutte le variabili sono nelle seguenti unità di misura

$$q_w \rightarrow \text{W/cm}^2 \quad ; \quad \rho_\infty \rightarrow \text{kg/m}^3 \quad ; \quad U_\infty \rightarrow \text{m/s}$$

N	M	C
---	---	---

Punto di ristagno	0.5	3	$1.8310^{-8} \sqrt{l/R} (1 - h_w/h_o)$ dove R è il raggio di curvatura del naso
-------------------	-----	---	--

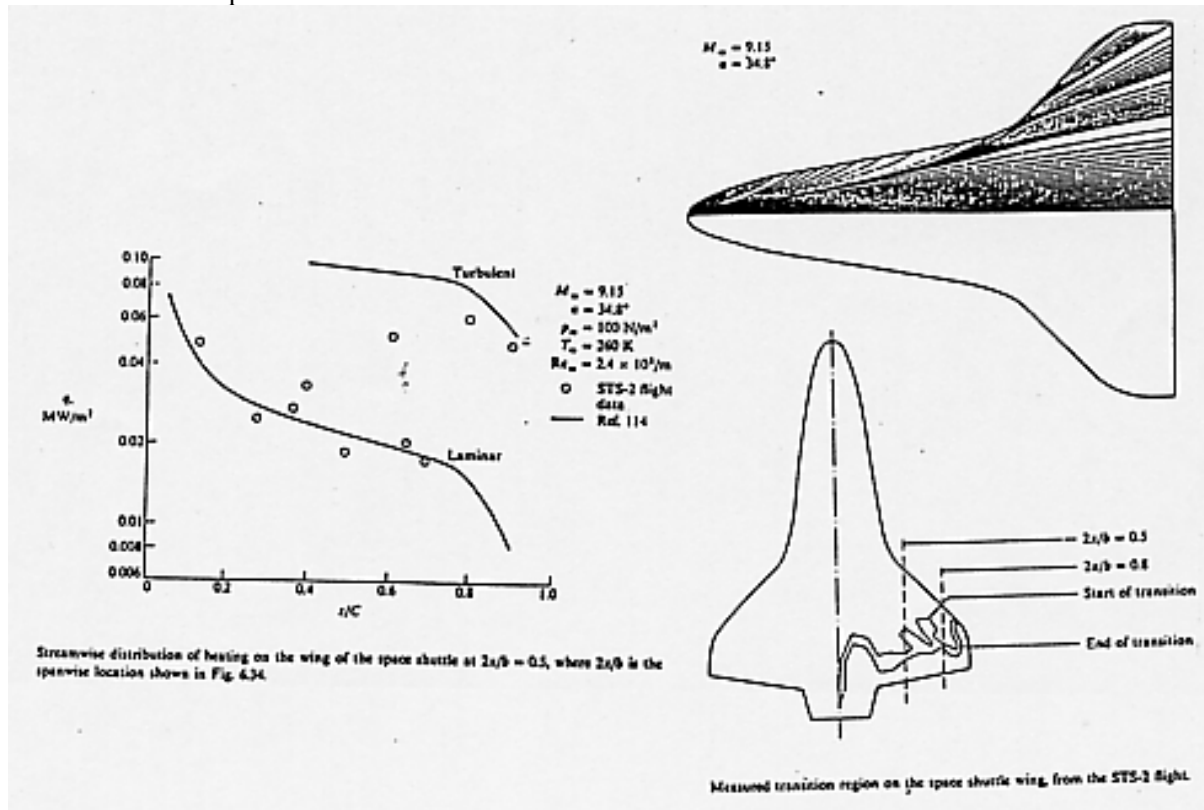
Slender Body: laminare	0.5	3.2	$2.5310^{-9} \sin \phi \sqrt{\cos \phi} \sqrt{l/x} (1 - h_w/h_o)$ dove ϕ è l'angolo di inclinazione locale della superficie ed "x" la distanza dal bordo di attacco (metri)
------------------------	-----	-----	---

Slender Body Turbolento	$U_\infty \leq 3962 \text{ m/s}$	0.8	3.37	$3.8910^{-8} (\sin \phi)^{1.6} (\cos \phi)^{1.78} \left(\frac{1}{x_{\text{turb}}} \right)^{1/5} \left(\frac{T_w}{556} \right)^{-1/4} \left(1 - 1.11 \frac{h_w}{h_o} \right)$
Slender Body Turbolento	$U_\infty > 3962 \text{ m/s}$	0.8	3.7	$2.2210^{-9} (\sin \phi)^{1.6} (\cos \phi)^{2.08} \left(\frac{1}{x_{\text{turb}}} \right)^{1/5} \left(1 - 1.11 \frac{h_w}{h_o} \right)$ dove x_{turb} è la distanza misurata lungo il corpo dal punto di transizione

Ovviamente queste formule, che si correlano abbastanza bene con i dati sperimentali, sono da usarsi con cautela, e soltanto nella fase preliminare di progetto.

Nel caso di corpi tridimensionali l'uso di queste formule è fatto lungo ogni particolare linea di corrente individuata sul corpo con analisi aerodinamiche.

Si riportano, nell'ordine, le linee di corrente sullo Shuttle, le regioni di transizione ed il calcolo del flusso termico che ne deriva per la corda a metà semiala.



.5.7 Interazioni Onde d'Urto - Strato Limite

Come visto nel subsonico, la presenza dello strato limite sul corpo (o in scia) non altera sostanzialmente il campo esterno, a meno che non si verifichino separazioni massive derivanti dalla presenza di elevati gradienti longitudinali di pressione.

In genere, lo spessore dello strato limite infatti è piccolo e la modifica del campo di moto esterno, che dipenderà dallo spessore di spostamento, è un effetto del secondo ordine che può essere molte volte trascurato (**interazione debole**).

Nel compressibile ed in particolare nel supersonico esistono Onde d'Urto che, come lo Strato Limite, sono superfici di discontinuità.

nelle cui strutture la viscosità e la conducibilità termica giocano un grande ruolo per la produzione entropica.

Ma la maggiore differenza, tra queste due discontinuità, sta nel fatto che le Onde d'Urto hanno uno spessore molto più piccolo di quello dello spessore dello strato limite [dell'ordine del cammino libero molecolare].

Le Onde d'Urto quindi creano un gradiente di pressione molto grande (da poter essere considerato, in un'ottica macroscopica, addirittura una discontinuità).

Ne discende che allorché una **Onda d'Urto** interagisce con una superficie solida, si induce sullo strato limite, che esiste sulla superficie, un grande gradiente di pressione. Nello strato limite la velocità viene ridotta da quella esterna (supersonica) a zero, per cui esisterà sempre una zona, nella vicinanza della parete, in cui la velocità è minore di quella del suono. In questa zona il moto è subsonico, per cui i disturbi di pressione possono risalire a monte, sì da creare flusso di massa dalle zone ad elevata pressione verso quelle a pressioni più basse. **Ne deriva una interazione non trascurabile.**

Lo Strato Limite viene notevolmente distorto da questa interazione: varieranno lo spessore dello strato limite e conseguentemente lo spessore di spostamento, per cui simultaneamente cambierà notevolmente la *forma equivalente (per la portata massica) della superficie del corpo*, con la generazione di ulteriori onde d'urto ovvero ventagli di espansione che interesseranno sostanzialmente il campo euleriano esterno.

In conclusione:

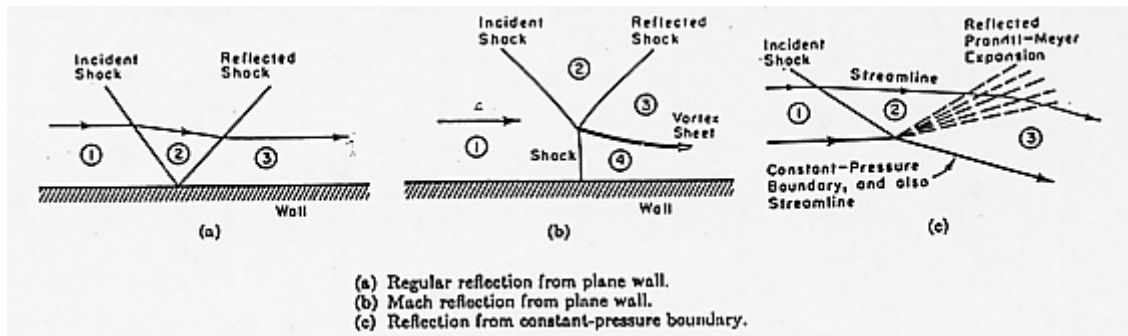
- **la interazione tra Onde d'Urto e Strato Limite è certamente una mutua interazione forte capace cioè di alterare notevolmente le strutture delle OUO (rispetto a quelle senza strato limite) e dello strato limite (rispetto a quelle senza Onde d'urto).**
- **dal fatto che nelle immediate vicinanze della parete il numero di Mach è necessariamente basso, si comprende che nelle vicinanze del corpo le OUO dovranno avere necessariamente strutture normali o "a lambda" (in quanto non saranno capaci di generare deviazioni alla corrente).**

Gli esempi fondamentali di queste interazioni sono:

1. riflessione di una OUO dallo Strato Limite su di una lastra piana
2. la generazione di urti su di una superficie concava
3. la generazione di urti sul bordo di attacco di una lastra piana e di un diedro
4. interazioni transoniche
5. OUN in condotti

.5.71 Riflessione di una OUO dallo Strato Limite su di una lastra piana

Per meglio apprezzare questo effetto **esaminiamo prima i tipi di riflessione in assenza di strato limite.**



- Se l'angolo di deviazione causato dalla OOU incidente, o se il Mach a monte non è molto piccolo, si realizza una **riflessione regolare** (a) e l'Onda riflessa è una OOU.
- Se invece l'angolo di deviazione indotta dalla OOU incidente è troppo grande, o se il Mach a monte è troppo basso si verifica una struttura a lambda (**riflessione alla Mach**) come illustrato nella (b). In questo caso vi è una intersezione tripla di urti con la presenza necessaria [per i diversi livelli entropici] di una superficie di discontinuità fluida, il braccio inferiore necessariamente normale alla parete causerà a valle una zona subsonica.
- Quando invece una OOU incide su di una superficie fluida [a pressione costante] si riflette con un fascio di espansione alla Prandtl-Meyer che deve realizzare una espansione pari e contraria alla compressione della OOU (c).

Differente è l'interazione con la parete in presenza di strato limite; ed inoltre l'interazione varia a seconda se lo strato limite è laminare o turbolento.

Strato Limite Laminare

Le strutture osservate in questo caso sono raffigurate in figura (a).

Il salto di pressione imposto da una riflessione regolare è certamente troppo grande per uno strato limite laminare.

La struttura che si realizza è quindi completamente differente.

La pressione a valle fa rigonfiare lo strato limite che causa la risalita di massa verso monte. Il punto di massimo rigonfiamento si realizza bene a monte del punto di incidenza ideale (senza S-L).

Questo ispessimento fa variare il profilo dello spessore di spostamento in modo da generare onde di Mach di compressione che si fondono in una OOU che parte da un punto nettamente a monte di quello di incidenza/riflessione ideale.

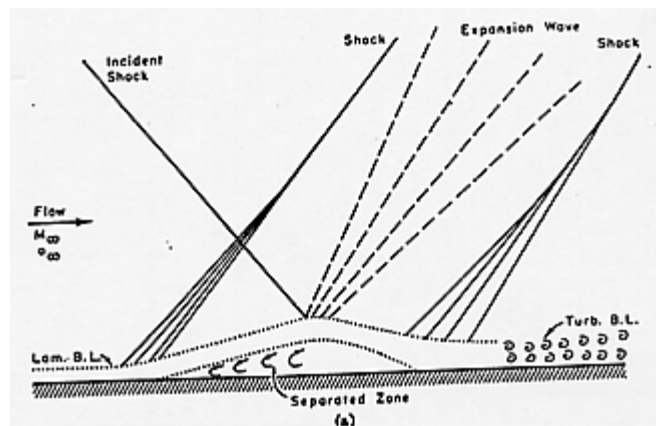
Se il gradiente di pressione indotto dalla OOU incidente lo strato limite è grande, molto probabilmente la corrente si separa dalla superficie facendo aumentare l'intensità della prima OOU riflessa, che può interagire con la OOU incidente modificandone ulteriormente il punto di incidenza.

La zona di separazione (se piccola) può essere considerata a pressione costante (come una superficie fluida) per cui la riflessione (a valle del massimo spessore) è realizzata da un ventaglio di espansione alla Prandtl-Meyer.

Questo ventaglio devia la corrente verso la parete, il che causa il riattacco dello strato limite.

Ma la corrente deve poi allinearsi con la parete, per cui è necessaria una seconda compressione che confluisce in una OOU la cui origine è apparentemente a valle di punto di incidenza/riflessione ideale.

Ovviamente lo strato limite dopo queste interazioni è fortemente disturbato: molto probabilmente diventerà turbolento immediatamente dopo la seconda OOU riflessa.



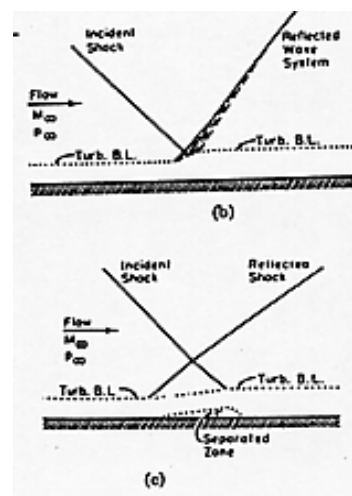
Strato limite turbolento

La differenza con l'interazione illustrata precedentemente sta nel fatto che lo strato limite turbolento è molto più energizzato di quello laminare, per cui può supportare gradienti di pressione maggiori.

Ne consegue che l'interazione è meno drammatica.

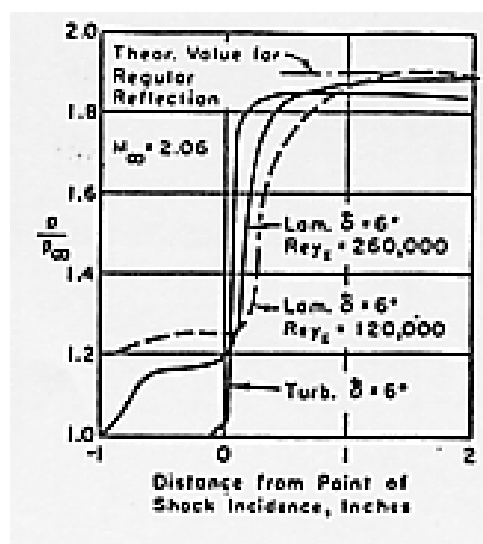
Se l'intensità della OUI incidente è relativamente piccola, si realizza un moderato ispessimento dello strato limite con un fascio di onde di compressione che confluiscono in una OUI riflessa (b); la struttura di riflessione che ne deriva è macroscopicamente molto simile a quella ideale.

Se però l'intensità della OUI incidente è rilevante lo strato limite turbolento separa (c), in questo caso il disturbo di pressione risale a monte, e ne deriva una struttura di OUI biforcata a croce immediatamente adiacente alla zona di ispessimento dello strato limite turbolento.



Nel seguito presentiamo i diagrammi di pressione misurati sulla superficie e le relative visualizzazioni dei campi di moto per un'OUI con $M_\infty = 2.06$ e deviazione 6° per differenti numeri di Reynolds di cui due realizzano strati limite laminare e per il terzo uno strato limite turbolento.

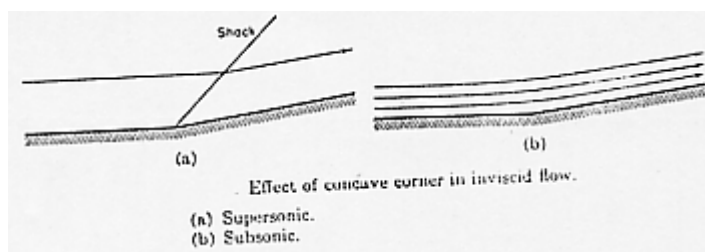
Si nota come la riflessione turbolenta è la più prossima al caso ideale, mentre le riflessioni laminari causano variazioni di pressione bene a monte del punto di incidenza ideale.



5.7.2 Generazione di Urti su di una superficie concava

In questo caso la struttura sarà determinata da due stratificazioni: una esterna che sarà supersonica, ed una interna allo strato limite che sarà subsonica.

Per questo caso consideriamo in dettaglio le strutture del flusso su di un diedro concavo nel caso di assenza di strato limite, in condizioni supersoniche e subsoniche.



Nel caso supersonico si genera una OUI che devia tutte le linee di corrente dell'angolo del diedro.

Nel caso subsonico il punto del diedro è un punto di ristagno e le linee di corrente sono quasi-iperboli asintoticamente parallele alle pareti.

In presenza di strato limite la configurazione della struttura deve comprendere entrambe queste caratteristiche.

Tipiche strutture sono rappresentate nella figura a lato per strati limite laminari e turbolenti, con le rispettive curve di pressioni superficiali.

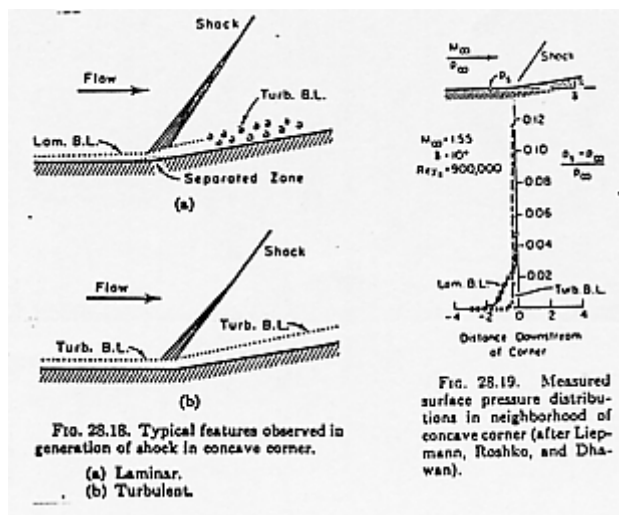
Per entrambi i casi l'origine della OUO, formata dalla coalescenza di onde di Mach, si sposta a valle del punto di diedro e vi è un netto aumento dello spessore dello strato limite.

Nel caso laminare, molto probabilmente si genera una bolla di separazione, che viene evidenziata nel diagramma di pressione da una zona rettilinea prima dell'angolo di diedro (gradiente costante).

Per grandi angoli di diedro la bolla di separazione diventa grande; in questo caso la deviazione della corrente è realizzata con due meccanismi:

- da deviazione della OUO
- da deviazione della superficie del diedro

Le dimensioni della bolla sono determinate dalla capacità dello strato limite a sopportare il gradiente di pressione richiesto dalla OUO.



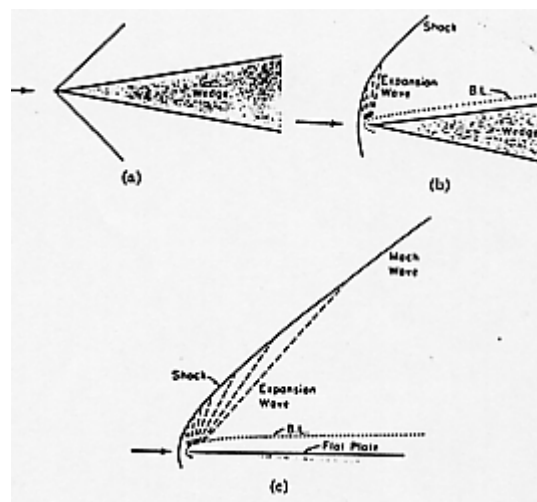
5.7.3 Generazione di Urti sul bordo di attacco di una lastra piana e di un diedro

Normalmente si pensa che una lastra piana ad angolo di attacco nulla (.c) non induca disturbi e che un diedro in supersonica (se l'angolo di deviazione è minore di quello massimo consentito dal Mach asintotico) debba presentare una netta struttura di OUO (a)

Purtroppo lo strato limite che cresce dal bordo di attacco della lastra piana in modo parabolico, e lo strato limite che è presente nel punto di ristagno del diedro fanno sì che la struttura reale non è per niente semplice.

Nel caso del diedro esiste una Onda d'Urto, localmente normale al punto di ristagno del diedro, che viene curvata dalle onde di espansione generate dalla curvatura del contorno dello spessore di spostamento dello strato limite, in misura tale da fare coincidere asintoticamente la pendenza con l'inclinazione ideale della OUO.

Per le stesse ragioni anche sul bordo di attacco di una lastra piana ad incidenza nulla si genera una OUC che viene però smorzata dal ventaglio di espansione fino a renderla asintoticamente una onda di Mach.



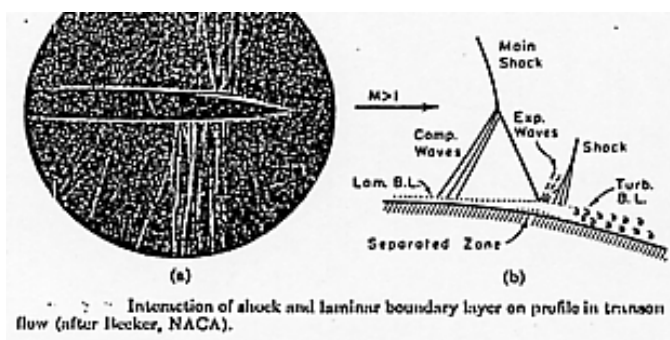
5.7.4 Interazioni transoniche

Le strutture dipendono dal tipo di strato limite.

Strato limite laminare

In questo caso la struttura è molto simile a quella analizzata per una OUO incidente su lastra piana, con la differenza che stavolta la OUO viene generata dalla superficie e le sue caratteristiche (inclinazione ed intensità) sono incognite del problema.

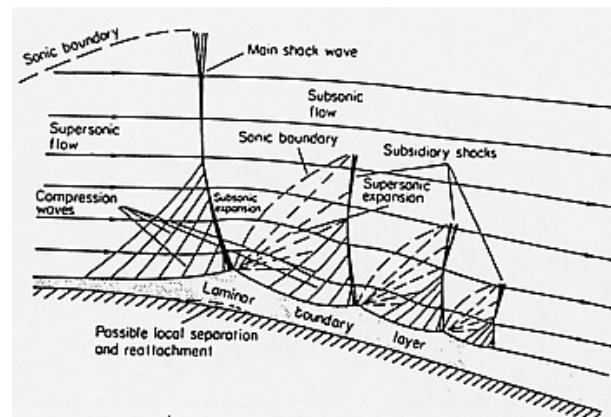
L'ispessimento dello strato limite genera strutture a lambda con una bolla di separazione che a sua volta genera successivi ventagli di espansione e di compressione (questi ultimi confluiscono



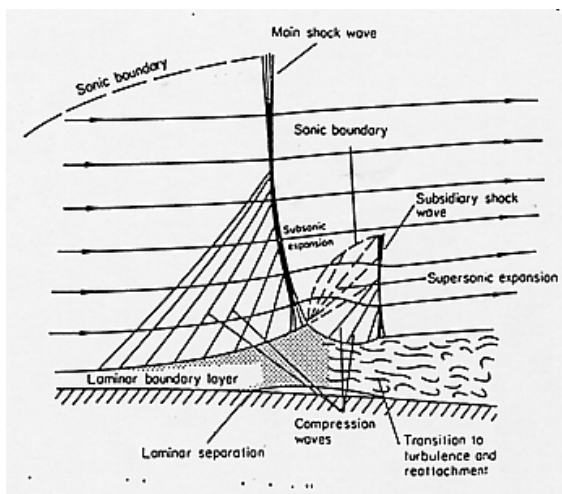
in una O.U.O.). Lo strato limite diventerà molto probabilmente turbolento.

Le strutture che sono state trovate variano con il Mach a valle della OUN e sono presentate nelle figure che seguono all'aumentare del Mach.

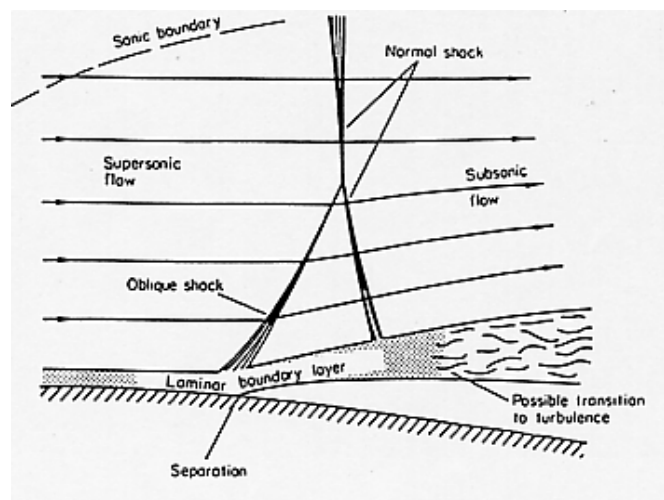
A destra la **struttura per Mach minore di 1.3**



Struttura per Mach quasi pari a 1.3

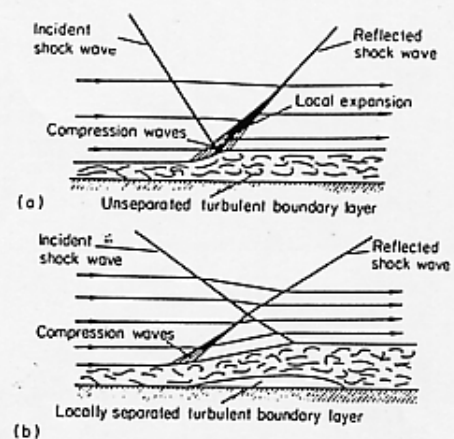
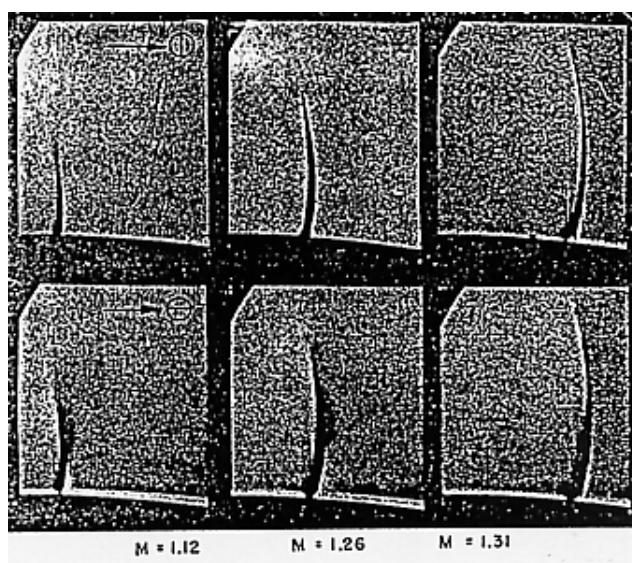


Struttura per Mach maggiore di 1.3



Strato limite turbolento

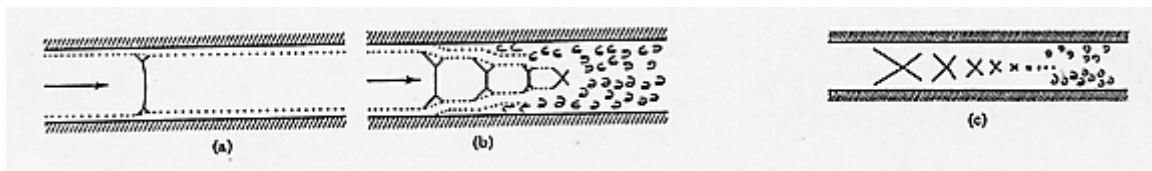
In questo caso gli effetti sullo strato limite sono più piccoli e all'aumentare del Reynolds l'O.U. tende ad essere quasi normale con un piccolo piede a lambda.



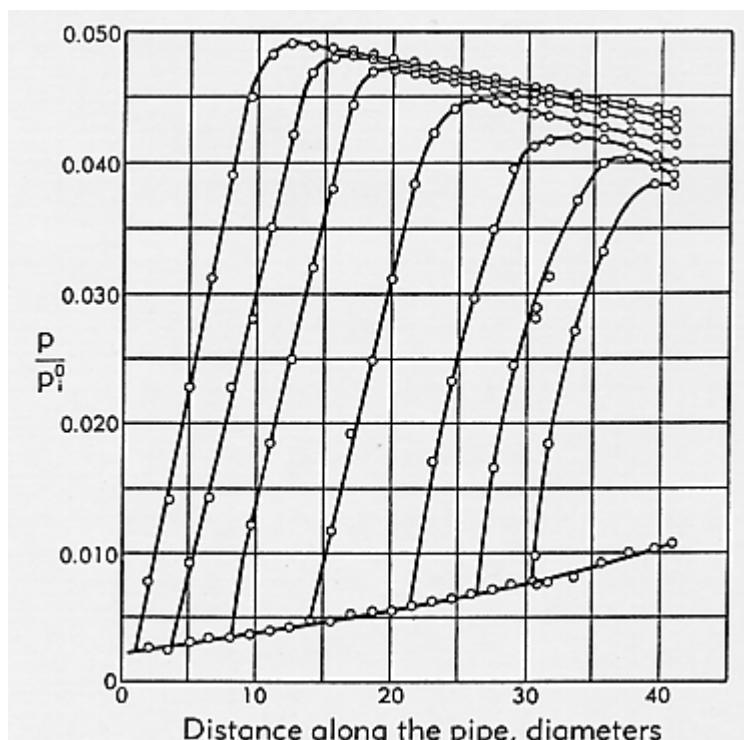
5.8 Onde d'Urto Normali in condotti

Una OUN è mantenuta stazionaria in un condotto da un campo (euleriano) di pressione controllato dal rapporto di pressioni monte/valle.

Le configurazioni possibili sono molte; tra queste le configurazioni fondamentali sono riportate nella figura:



- se lo strato limite è molto sottile, esiste una sola Onda d'Urto quasi normale (poco curva) nel cuore del tubo che si biforca a lambda nella vicinanza delle pareti a causa dello strato limite.
- se lo strato limite è spesso, si genera una serie di onde a lambda il cui cuore (quasi normale alla direzione della corrente) diventa sempre più piccolo fino a quando non si stabiliscono condizioni completamente subsoniche.
- Se lo strato limite è molto spesso ed il Mach sufficientemente elevato si generano delle strutture dove si distinguono strutture d'urto frammiste a zone di ricircolazione e con strutture vorticosi e turbolente. Tale zona è comunemente denotata "pseudo shock".



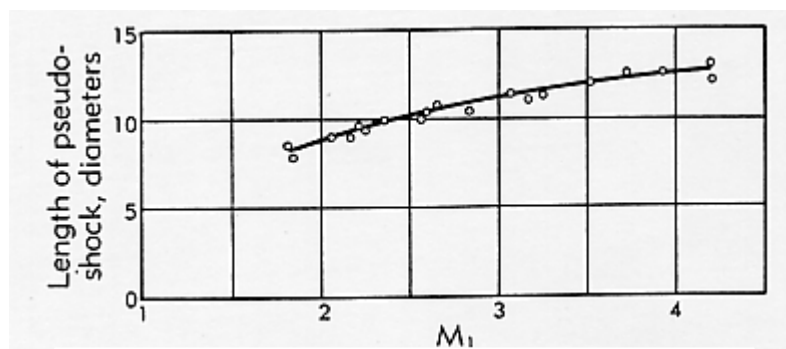
Lo **pseudo-shock** rappresenta una strana commistione di fenomeni dissipativi (separazione viscosa, transizione al turbolento, compressione d'urto, trasmissione del calore e dissipazione viscosa) che però globalmente rispettano quasi esattamente le condizioni monte/valle di una Onda d'Urto Normale, da cui il nome.

Ovviamente la differenza sta nel fatto che una **pseudo-shock** ha uno spessore di diversi diametri, poco dipendenti dal Mach, ma molto dal valore del Numero di Reynolds come si riscontra dai classici diagrammi forniti dal Crocco che rappresentano le misure di pressione statiche in un condotto con mach d'ingresso costante al variare della pressione di scarico.

Come si può notare lo spessore della "**pseudo-schock**" rimane costante e nella fattispecie pari a circa 10-20 diametri.

Nel diagramma che segue si riporta la lunghezza della "**pseudo-schock**" al variare del Mach a monte, a Reynolds costante. Da questo si nota una piccola variazione della lunghezza con il Mach.

La variazione della lunghezza della "**pseudo-schock**" con il Reynolds, riferito al diametro è molto più difficile da fissare per la difficoltà di misura.



Una regola, ad occhio, è di farla variare con la stessa legge con cui varia la lunghezza d'ingresso del condotto (sviluppo dello strato limite per raggiungere le condizioni di moto completamente sviluppato).

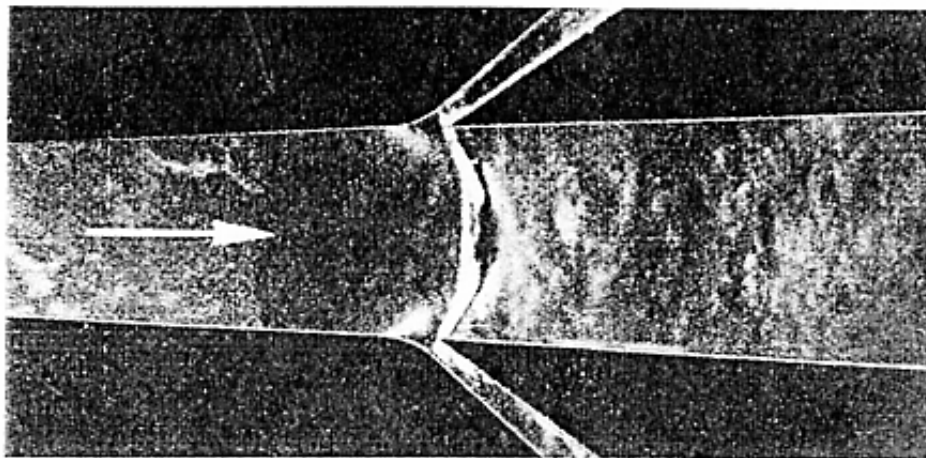
In conclusione riportiamo a lato [sempre dal Crocco] una serie di foto che rappresentano le visualizzazioni *schlieren* di varie condizioni di OUN in tubi.

La prima raffigura una OUN allorquando si provvede alla rimozione quasi completa dello Strato Limite dalla parte (viene aspirata dai due condotti). Ne deriva una OUN poco curva, ma si tratta solo di effetti di bordo. Con una maggiore accortezza si sarebbe potuto ottenere una OUN più dritta.

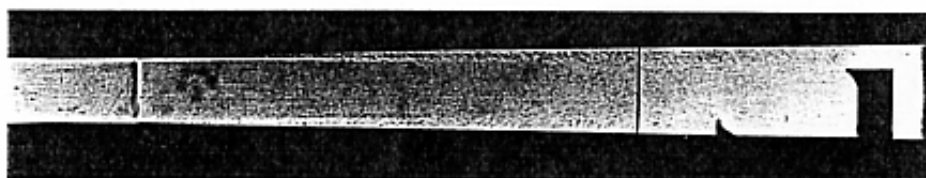
La seconda foto si riferisce a cosa si può avere a Mach Molto bassi ma con Reynolds molto elevati (strati limite estremamente sottile), nel mentre nella terza e nella quarta si rappresenta cosa accade all'aumentare del mach, nelle stesse condizioni.

Nell'ultima foto si rappresenta cosa accade con Mach elevati e Reynolds sufficientemente bassi da rappresentare strati limiti spessi ed moti inizialmente laminari.

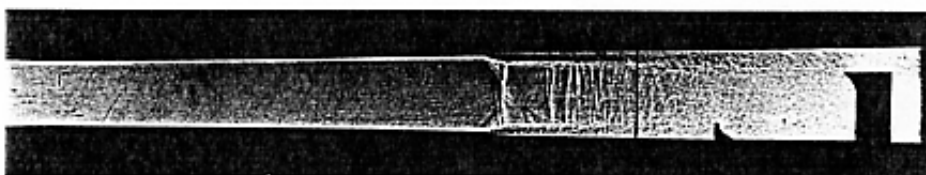
Si ritrovano OU ad X che realizzano strutture complesse spesse molti diametri, che rappresentano una pseudo-shock.



Quasi-normal shock in a duct after removal of boundary layers.



Quasi-normal shock in a duct with thin boundary layers at slight supersonic velocity. $M = 1.18$.



Bifurcated shock in the duct of Plate B,5b at higher Mach number. $M = 1.46$.



Multiple bifurcated shocks in the duct of Plate B,5b at still higher Mach number. $M = 1.70$.

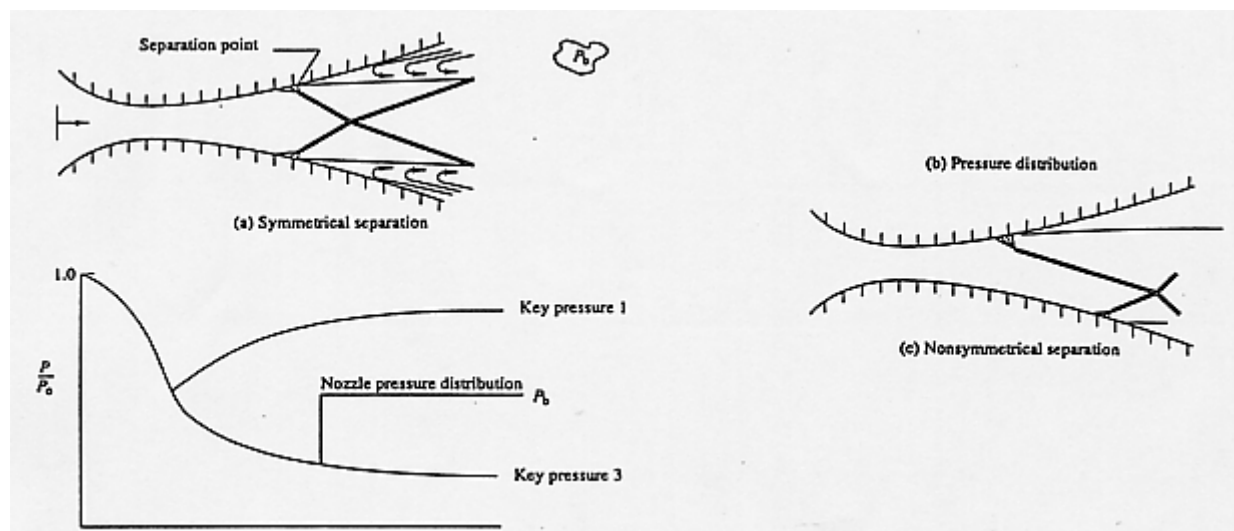


Multiple X shocks produced with well-developed boundary layers.

In tutti i casi, nell'interazione con OUN, lo strato limite diventa subito turbolento, e in caso di condotto divergente si corre molto probabilmente il pericolo della generazione di una separazione del flusso.

In queste condizioni, per "effetto Coanda", il flusso potrebbe aderire ad una o l'altra parete del condotto.

In tale modo non solo si perde il vantaggio del recupero di pressione [scopo di un diffusore] ma, per gli ugelli propulsivi, si corre un serio pericolo di dis-allineamento della spinta rispetto all'asse dell'ugello.



La separazione dello strato limite indotta da Onde d'Urto è quindi un importante punto di indagine.

E' ovvio che in un diffusore supersonico conviene avere strati limite turbolenti, per cui se le condizioni naturali non lo consentono, conviene, a volta, agire su meccanismi che lo generano.

.5.9 Conclusioni e Check-Out

A questo stadio lo studente diligente dovrebbe essere familiarizzato con i seguenti concetti:

1. le equazioni dello strato limite comprimibile, loro derivazioni, espressioni dei flussi diffusivi nell'interno dello strato limite, importanza della variabilità dei coefficienti di trasporto nella simulazione, ruolo duplice della soluzione della velocità ed dell'entalpia euleriana, per la determinazione del campo di pressione
2. Soluzioni di Crocco-Busemann, derivazioni e validità
3. Concetto di temperatura adiabatica di parete, flusso termico alla parte, concetti di parete calda e parete fredda,
4. Concetto di fattore di recupero e di numero di Stanton, similitudine di Reynolds per regimi laminare e turbolento, ruolo del numero di Prandtl,
5. effetto del Mach sui profili di velocità e temperatura su lastre piane, sul fattore di recupero e su Stanton
6. fenomenologia del punto di ristagno, dipendenza del flusso di calore
7. il metodo della temperatura di riferimento,
8. relazioni integrali per strati limite comprimibile,
9. il metodo di Thwaites comprimibile
10. la transizione laminare/turbolento
11. riscaldamento aerodinamico, dipendenze del flusso di calore massimo,
12. interazione strato limite onde d'urto, motivazioni e fisica del fenomeno,
13. riflessioni su lastra piana: effetti di SL laminare e di SL turbolento,
14. superfici concave (angolo di diedro),
15. interazioni transoniche, effetti del Reynolds e del Mach
16. O.U.N. in condotti, effetti della separazione,
17. pseudo-shocks
- 18.