



7.3 Soluzione numerica per un profilo simmetrico

Si vuole determinare il campo di velocità intorno a un profilo alare *simmetrico* posto a *incidenza nulla*. Il profilo ha uno **spessore variabile** andando dal bordo di attacco, che sarà normalmente arrotondato, fino al bordo d'uscita, che ha sicuramente uno spigolo molto acuto. La linea media del profilo è dritta, ovvero il profilo è senza curvatura, e lo spessore del profilo è simmetrico rispetto alla corda, come, ad esempio, il profilo NACA0012 mostrato nella figura 7.1.

Figura 7.1

Profilo simmetrico NACA0012



Il profilo è immerso in un flusso *incomprimibile* e *irrotazionale* di un fluido nel quale si suppone di potere trascurare gli effetti legati alla sua viscosità. Il campo di moto è descritto in un sistema di riferimento solidale con il profilo: l'asse delle ascisse è preso coincidente con l'asse di simmetria del profilo e l'origine è posta nel suo bordo di attacco.

Poiché il flusso è irrotazionale e la regione in cui si calcola il campo è simmetrica, possiamo ricercare una soluzione simmetrica e rappresentare il campo di velocità simmetrico mediante il gradiente di un potenziale ϕ , ovvero avremo

$$\mathbf{u} = \nabla\phi,$$

dove ∇ indica l'operatore gradiente nel piano del flusso bidimensionale considerato.

La condizione di irrotazionalità ($\mathbf{u} = \nabla\phi$) assieme alla condizione di incomprimibilità ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) conduce a un'**equazione di Laplace** ($\nabla^2\phi = 0$) per il potenziale ϕ . Questa equazione è completata da opportune condizioni al contorno che impongono la velocità uniforme all'infinito e la condizione di non penetrazione sul corpo. Avremo pertanto il seguente **problema armonico**:

$$\nabla^2\phi = 0,$$

$$\nabla\phi(|\mathbf{r}| \rightarrow \infty) \rightarrow \mathbf{U},$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\phi|_{\text{profilo}} = 0,$$

dove $\mathbf{U} = U \hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$ indica il versore normale alla superficie del profilo diretto verso il suo interno (la normale deve essere uscente dal dominio di calcolo).





Metodo di soluzione

L'equazione di Laplace è *lineare* per cui si può utilizzare il *principio di sovrapposizione degli effetti*. Potremo allora rappresentare il campo di velocità all'esterno del profilo mediante la somma di opportuni campi elementari (corrente uniforme, sorgenti o pozzi lineari, doppiette . . .). La presenza e la forma del profilo sarà poi tenuta in conto imponendo le condizioni al contorno sulla sua superficie, o meglio, in alcuni punti opportunamente scelti su di essa.

Il potenziale attorno a un profilo simmetrico posto a incidenza nulla può essere visto come la somma del potenziale della corrente uniforme indisturbata e dei potenziali di un'opportuna distribuzione di J **doppiette** poste all'interno del corpo:

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi^{\text{unif}}(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^J p_j \phi_j^{\text{dopp}}(\mathbf{r}).$$

In questa relazione il potenziale della doppietta j -esima posta nel punto $\mathbf{d}_j$ è dato dalla relazione

$$\phi_j^{\text{dopp}}(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{d}_j),$$

dove $\varphi(\mathbf{r})$ è il potenziale di una doppietta posta nell'origine. In coordinate polari $\mathbf{r} = (R, \theta)$ il potenziale $\varphi(\mathbf{r})$ è espresso dalla relazione

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos \theta}{R},$$

mentre in coordinate cartesiane $\mathbf{r} = (x, y)$, essendo $x = R \cos \theta$ e $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, il potenziale $\varphi(\mathbf{r})$ è espresso dalla relazione

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Il potenziale della **corrente uniforme** parallela all'asse x è semplicemente

$$\phi^{\text{unif}}(\mathbf{r}) = Ux.$$

Per ottenere una soluzione simmetrica rispetto all'asse x , conformemente alla simmetria del profilo, le doppiette devono essere poste sulla corda $0 < x < c$ del profilo e possono essere distribuite in modo uniforme secondo la relazione

$$\mathbf{d}_j = \left(j - \frac{1}{2}\right) \Delta x \hat{\mathbf{x}}, \quad j = 1, 2, \dots, J$$





dove $\Delta x = c/J$. Le incognite del problema sono quindi le **intensità delle doppiette**, cioè, i valori p_j , $j = 1, 2, \dots, J$. L'espressione dettagliata del potenziale è pertanto

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi^{\text{unif}}(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^J p_j \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{d}_j).$$

Il campo di velocità corrispondente è allora dato dalla relazione

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \nabla \phi^{\text{unif}}(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^J p_j \nabla \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{d}_j).$$

Osserviamo che la condizione al contorno a grande distanza dal profilo è soddisfatta indipendentemente dai valori di p_i , $i = 1, 2, \dots, J$, poiché

$$\nabla \phi^{\text{unif}}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{U} \quad \text{e} \quad \nabla \varphi(\mathbf{r}) \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty.$$

Dobbiamo quindi imporre solamente la condizione al contorno sulla superficie del profilo.

Nel problema armonico considerato, la condizione di Neumann di non penetrazione sul profilo è imposta in un numero di punti uguale al numero di incognite. Pertanto imporreemo J condizioni al contorno

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\mathbf{c}_i} = 0, \quad \text{per } i = 1, \dots, J,$$

dove $\mathbf{c}_i$, $i = 1, \dots, J$, indica il generico **punto di controllo** posto sul dorso del profilo. Scegliamo come punti di controllo i punti sul dorso del profilo che si trovano sulla verticale di J punti della corda distribuiti con passo uniforme $\Delta x = c/J$. Ovvero introduciamo i seguenti punti di controllo:

$$\mathbf{c}_i = ((i-1)\Delta x, y_{\text{sp}}((i-1)\Delta x)), \quad i = 1, 2, \dots, J,$$

dove la funzione $y_{\text{sp}}(x)$ rappresenta lo **spessore** del profilo considerato in funzione della coordinata x lungo la corda. Con questa scelta il primo punto di controllo coincide con il punto centrale del bordo di attacco. Inoltre, conformemente con la singolarità del bordo di uscita, nessun punto di controllo è stato posto in questo punto. Notiamo che, per la simmetria delle sorgenti usate, la stessa condizione di non penetrazione sarà soddisfatta anche nei punti simmetrici posti sul ventre.





Otteniamo dunque il seguente sistema lineare

$$Ap = b$$

di J equazioni in J incognite, dove $A \in \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^J$ è la matrice dei coefficienti, $p \in \mathbb{R}^J$ è il vettore delle incognite e $b \in \mathbb{R}^J$ è il vettore del termine noto. Gli elementi di A e b sono dati rispettivamente da

$$a_{i,j} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi_j^{\text{dopp}}|_{\mathbf{c}_i} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{c}_i - \mathbf{d}_j),$$

$$b_i = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi^{\text{unif}}|_{\mathbf{c}_i} = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi^{\text{unif}}(\mathbf{c}_i).$$

Calcolo degli elementi del sistema lineare

Il calcolo di queste quantità richiede di conoscere la direzione normale nei punti di controllo. In effetti, le espressioni considerate devono essere sostituite dalle espressioni più appropriate

$$a_{i,j} = \hat{\mathbf{n}}_i \cdot \nabla \varphi(\mathbf{c}_i - \mathbf{d}_j),$$

$$b_i = -\hat{\mathbf{n}}_i \cdot \nabla \phi^{\text{unif}}(\mathbf{c}_i),$$

nelle quali $\hat{\mathbf{n}}_i$ rappresenta la normale nel punto di controllo $\mathbf{c}_i$. Per quanto riguarda il primo punto $\mathbf{c}_1 = 0$, che coincide con il naso del profilo, la normale (entrante nel profilo) è $\hat{\mathbf{x}}$, per cui la prima equazione del sistema richiede di calcolare

$$a_{1,j} = \frac{\partial \varphi(-\mathbf{d}_j)}{\partial x},$$

$$b_1 = -U,$$

per $j = 1, 2, \dots, J$, dove si è usata la relazione $\phi^{\text{unif}}(\mathbf{r}) = Ux$.

La direzione normale in tutti gli altri punti di controllo sul profilo può essere determinata ricorrendo alla derivata dello spessore $y_{\text{sp}}(x)$, cioè alla funzione:

$$y'_{\text{sp}}(x) = \frac{dy_{\text{sp}}(x)}{dx}.$$

Infatti possiamo osservare nella figura 7.2 che la tangente al profilo forma con l'asse x un angolo $\theta = \tan^{-1}(y'_{\text{sp}})$. Il versore $\hat{\mathbf{n}}$ normale al profilo è quindi dato da

$$\hat{\mathbf{n}} = (\sin \theta, -\cos \theta).$$

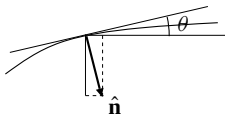


Figura 7.2

Versore normale al profilo.





Gli elementi della matrice e del vettore del termine noto per $i = 2, 3, \dots, J$ e $j = 1, 2, \dots, J$ sono quindi definiti da:

$$a_{i,j} = \sin \theta_i \frac{\partial \varphi(\mathbf{c}_i - \mathbf{d}_j)}{\partial x} - \cos \theta_i \frac{\partial \varphi(\mathbf{c}_i - \mathbf{d}_j)}{\partial y},$$

$$b_i = -U \sin \theta_i,$$

dove $\theta_i = \tan^{-1} (y'_{sp}(x_i))$.

Coefficiente di pressione sul profilo simmetrico

Il flusso attorno al profilo considerato è stazionario, incomprimibile (con densità uniforme) e il fluido è non viscoso, per cui il campo di pressione $P(\mathbf{r})$ è determinato dal teorema di Bernoulli. Essendo inoltre il campo di velocità irrotazionale, potremo applicare la versione irrotazionale del teorema e quindi la pressione in ogni punto del campo di moto sarà data dalla relazione

$$\frac{P(\mathbf{r})}{\bar{\rho}} = -\frac{|\nabla \phi(\mathbf{r})|^2}{2} + C,$$

dove C è una costante legata al valore P_∞ della pressione a grande distanza dal profilo, dove la velocità del fluido diventa uniforme, paria a $\mathbf{U} = U \hat{\mathbf{x}}$. In base a questa condizione si ha

$$C = \frac{P_\infty}{\bar{\rho}} + \frac{U^2}{2},$$

per cui il campo di pressione assume la forma

$$\frac{P(\mathbf{r}) - P_\infty}{\bar{\rho}} = \frac{1}{2} [U^2 - |\nabla \phi(\mathbf{r})|^2].$$

Come noto si introduce la quantità adimensionale **coefficiente di pressione**

$$C_P(\mathbf{r}) = \frac{P(\mathbf{r}) - P_\infty}{\frac{1}{2} \bar{\rho} U^2}$$

e quindi si ottiene la sua espressione

$$C_P(\mathbf{r}) = 1 - \frac{|\nabla \phi(\mathbf{r})|^2}{U^2}.$$



Si veda il paragrafo 4.3.



Essendo interessati all'andamento della pressione sul profilo, calcoleremo quindi questa funzione nei punti di controllo $\mathbf{c}_i$ che si trovano proprio sulla sua superficie

$$C_P(\mathbf{c}_i) = 1 - \frac{|\nabla\phi(\mathbf{c}_i)|^2}{U^2},$$

dove naturalmente $\mathbf{c}_i = (x_i, y_{\text{sp}}(x_i)) = ((i-1)\Delta x, y_{\text{sp}}((i-1)\Delta x))$, per $i = 1, 2, \dots, J$. Si noti che il primo punto di controllo è il bordo di attacco $\mathbf{c}_1 = \mathbf{0}$ per cui si ha $C_P(\mathbf{c}_1) = 1 - \frac{|\mathbf{u}(\mathbf{0})|^2}{U^2} = 1$, poiché questo punto coincide con il punto di ristagno e ivi $\mathbf{u} = 0$ per definizione.

Il valore $C_P = 1$ rappresenta il valore massimo che può essere raggiunto dal coefficiente di pressione poiché $|\mathbf{u}|^2 > 0$. Nell'ipotesi di flusso incomprimibile adottata, il C_P non ha invece un valore minimo. Infatti, dato che la pressione ha perso il proprio significato termodinamico, sono ammissibili soluzioni con $P < 0$ e quindi la velocità può crescere in modo illimitato (come accade, ad esempio, in corrispondenza di spigoli convessi). In questo caso C_P diventa negativo e può decrescere anch'esso indefinitamente. Si noti però che soluzioni in cui la velocità sia tale da rendere il valore del numero di Mach locale piuttosto alto (diciamo > 0.3) non saranno fisicamente plausibili perché il modello di flusso incomprimibile cade in difetto.

