Equazioni adimensionali
(fluido incomprimibile)

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Re}\nabla^2 \tilde{u} - \frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial \tilde{x}}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Re}\nabla^2 \tilde{v} - \frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial \tilde{y}}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

$$\mathrm{Re} = \rho\frac{UL}{\mu}$$

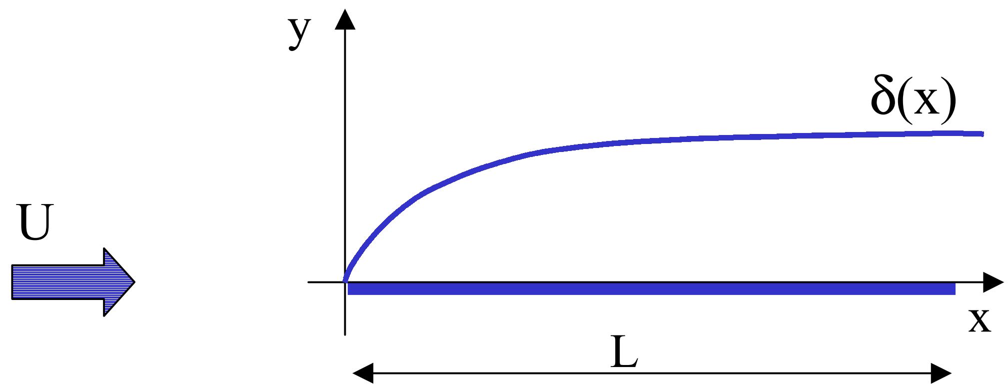
Variabili adimensionali

$$\tilde{x} = \frac{x}{L} \qquad \tilde{y} = \frac{y}{L} \qquad \tilde{u} = \frac{u}{U} \qquad \tilde{v} = \frac{v}{U}$$

$$\tilde{t} = t\frac{U}{L} \qquad \tilde{p}^* = \frac{p^*}{\rho U^2} \quad \text{con} \quad p^* = p + \gamma z$$

Equazioni di strato limite

- fluido incomprimibile
- flusso stazionario
- 2D



Equazioni del moto in forma adimensionale

$$\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Re}\nabla^2 \tilde{u} - \frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial \tilde{x}}$$

$$\tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Re}\nabla^2 \tilde{v} - \frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial \tilde{y}}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

Valide all'interno dello strato limite

$\downarrow$

termini viscosi non trascurabili

Ordini di grandezza

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\delta}{L} << 1}$$

$$u \in [0,\ 0.99U] \qquad \tilde{u} = \frac{u}{U} \approx O(1)$$

$$x \in [0,\ L] \qquad \tilde{x} = \frac{x}{L} \approx O(1)$$

$$y \in [0,\ \delta] \qquad \tilde{y} = \frac{y}{L} \approx O(\varepsilon)$$

equazione di continuità

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0}$$

$$\frac{O(1)}{O(1)} + \frac{?}{O(\varepsilon)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{v} \approx O(\varepsilon)$$

Ordini di grandezza

equazioni di bilancio della quantità di moto

lungo x

$$\boxed{\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}\right) - \frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial \tilde{x}}}$$

$$\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \approx O(1)\frac{O(1)}{O(1)} = O(1) \qquad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \approx O(1)$$

$$\tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \approx O(\varepsilon)\frac{O(1)}{O(\varepsilon)} = O(1) \qquad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \approx \frac{O(1)}{O(\varepsilon^2)} = O(1/\varepsilon^2)$$

$$\frac{\delta}{L} \approx \mathrm{Re}^{-1/2} \Rightarrow \frac{1}{\mathrm{Re}} \approx O(\varepsilon^2)$$

$$\xrightarrow{\text{sostituendo}} \boxed{\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial \tilde{x}} + O(\varepsilon^2)}$$

Ordini di grandezza

equazioni di bilancio della quantità di moto

lungo y

$$\boxed{\tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2}\right) - \frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial \tilde{y}}}$$

$$\tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \approx O(1)\frac{O(\varepsilon)}{O(1)} = O(\varepsilon)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} \approx \frac{O(\varepsilon)}{O(1)} = O(\varepsilon)$$

$$\tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \approx O(\varepsilon)\frac{O(\varepsilon)}{O(\varepsilon)} = O(\varepsilon)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \approx \frac{O(\varepsilon)}{O(\varepsilon^2)} = O(1/\varepsilon)$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}} \approx O(\varepsilon^2)$$

$$\xrightarrow{\text{sostituendo}} \quad \boxed{\frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial \tilde{y}} = O(\varepsilon)}$$

Equazioni di strato limite

$O(\varepsilon)$ trascurabili

$$\boxed{\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial \tilde{x}}}$$

equazione di evoluzione dello strato limite lungo la coordinata x

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial \tilde{y}} = 0}$$

p^* non varia in direzione trasversale al moto

$\downarrow$

p^* interna pari alla p^* esterna

$$\frac{\partial \tilde{p}^*}{\partial \tilde{x}}$$

funzione del campo di moto esterno

(Equazioni di Eulero)

Equazioni di strato limite

In forma dimensionale

equazioni di conservazione della quantità di moto

lungo x
$$\boxed{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial x}}$$

lungo y
$$\boxed{\frac{\partial p^*}{\partial y}=0}$$

$\frac{\partial p^*}{\partial x}$ funzione del campo di moto esterno

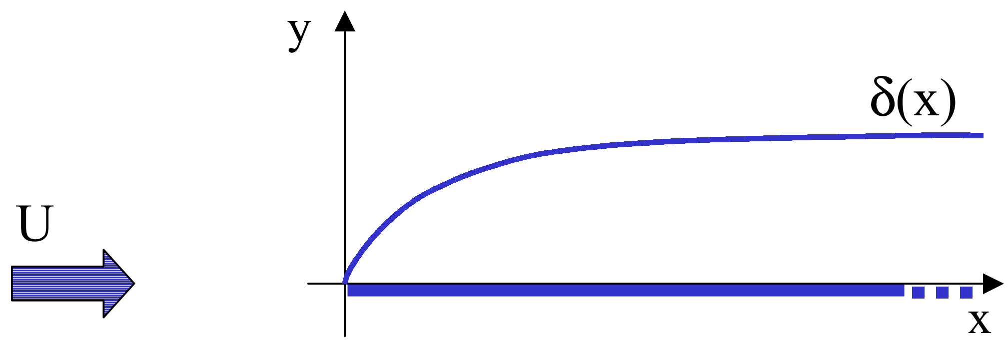
equazione di continuità

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0}$$

Soluzione di Blasius

- gradiente di pressione longitudinale nullo $\dfrac{\partial p^*}{\partial x} = 0$

- lastra piana infinita



Equazioni di strato limite in forma dimensionale

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

con condizioni al contorno:

$$y = 0 \quad u = v = 0$$

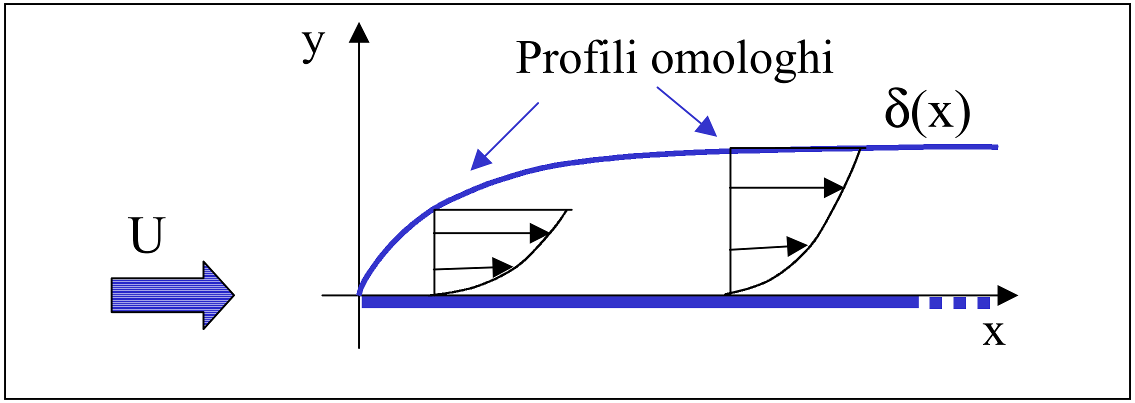
$$y \to \infty \qquad u \to U$$

Soluzione di Blasius

Hp: profili di velocità all'interno dello strato limite **omologhi**

Profilo di strato limite **adimensionale**

$$\frac{u}{U} = g(\eta) \qquad \eta = \frac{y}{L_{SL}}$$



L_{SL} : Lunghezza caratteristica dello strato limite

Sappiamo che: $\delta / x \approx \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$ $\qquad \mathrm{Re} = \mathrm{Re}_x = \rho \frac{Ux}{\mu}$

$$\delta \approx \frac{x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

Poniamo: $L_{SL} = \frac{x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\eta = y\sqrt{\frac{\rho U}{\mu \ x}}}$

Soluzione di Blasius

Funzione di corrente ψ

definita in modo tale che:

$$\boxed{u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

Funzione di corrente adimensionale

$$[\psi] = \frac{L}{T} L \quad \Rightarrow \quad \frac{\psi}{U L_{SL}} = \psi \sqrt{\frac{\rho}{\mu U x}} = f(\eta)$$

Riscriviamo le equazioni
di strato limite
utilizzando η e *f*(η)

$$\boxed{\eta = y \sqrt{\frac{\rho U}{\mu \, x}}}$$

$$\boxed{f(\eta) = \psi \sqrt{\frac{\rho}{\mu \, U \, x}}}$$

Soluzione di Blasius

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0}$$

Equazione di continuità identicamente verificata per la definizione di ψ

$$\boxed{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

Esprimiamo i termini in funzione di η e *f*(η):

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U\frac{df}{d\eta}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu U}{\rho x}}\left[\eta\frac{df}{d\eta} - f\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{U}{2x}\eta\frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U\sqrt{\frac{\rho U}{\mu x}}\frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\rho U^2}{\mu x}\frac{d^3 f}{d\eta^3}$$

Soluzione di Blasius

Equazione differenziale ordinaria del terzo ordine non lineare ⇒

$$\boxed{\frac{1}{2} f \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{d^3 f}{d\eta^3} = 0}$$

con condizioni al contorno:

$$\eta = 0 \qquad f = \frac{df}{d\eta} = 0$$

$$\eta \to \infty \quad \frac{df}{d\eta} \to 1$$

Non esiste soluzione in forma chiusa ⇒ soluzione numerica tabulata

η	f	$df/d\eta$	$d^2f/d\eta^2$
0	0	0	0.332
0.4	0.026	0.133	0.331
1	0.1655	0.3298	0.323
1.4	0.3230	0.4563	0.3079
2	0.650	0.630	0.267
2.4	0.992	0.7289	0.228
3	1.397	0.846	0.161
3.4	1.7469	0.9017	0.1179
4	2.305	0.956	0.064
4.4	2.692	0.9758	0.0389
5	3.283	0.992	0.0159
6	4.279	0.998	0.002

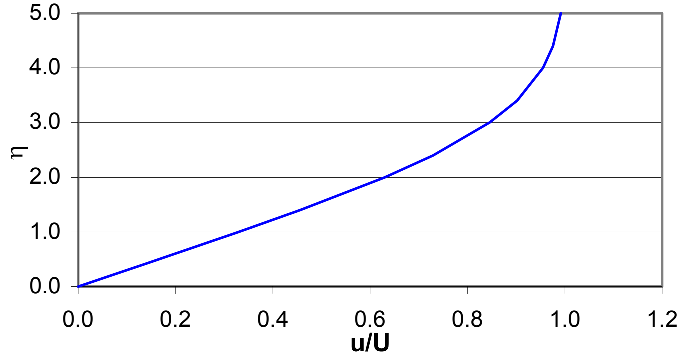


Figura 11. Profilo di velocità adimensionale

Soluzione di Blasius

dalla soluzione tabulata

Spessore dello dello starto limite δ

$$\frac{u}{U} \approx 0.99 \qquad \text{per} \qquad \eta = 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}}$$

Coefficiente di attrito C_f

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \mu U \sqrt{\frac{\rho U}{\mu x}} \left.\frac{d^2 f}{d x^2}\right|_{\eta=0} = 0.332 U \sqrt{\frac{\rho \mu U}{x}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{C_f = \frac{\tau_w}{0.5\,\rho U^2} = \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}}$$