

Strato limite incompressibile turbolento

Per una lastra piana sottile le equazioni di Prandtl per lo strato limite sono:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Se il moto è pienamente sviluppato

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

e si ha

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Dal metodo dei piccoli disturbi per la turbolenza

$$\frac{\partial(v + v')}{\partial y} = 0$$

$$\rho \frac{\partial(u + u')(v + v')}{\partial y} = -\frac{\partial(p + p')}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2(u + u')}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial(p + p')}{\partial y} = 0$$

Mediando nel tempo:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

$$\rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \rho \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0$$

Siccome

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \rightarrow \bar{v} = \text{cost in } y$$

$$\bar{v}(y=0) = 0 \rightarrow \bar{v} = 0$$

L'equazione di evoluzione del moto in direzione x diventa:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right)$$

$\bar{\sigma}_{xy} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}$ dove $\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ tensione viscosa e $\rho \overline{u'v'}$ tensione di Reynolds

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{xy}}{\partial y}$$

Integrando:

$$\int_0^\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} dy = \int_{\tau_w}^0 d\bar{\sigma}_{xy}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \delta = 0 - \tau_w$$

$$\tau_w = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \delta$$

$$\int_0^y \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} dy = \int_{\tau_w}^{\bar{\sigma}_{xy}} d\bar{\sigma}_{xy}$$

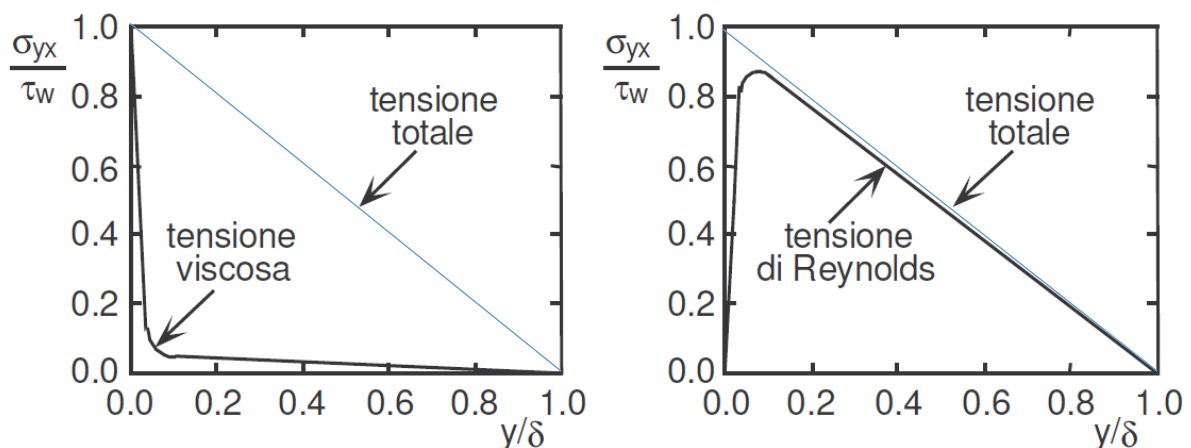
$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} y = \bar{\sigma}_{xy} - \tau_w$$

Da cui

$$\frac{\bar{\sigma}_{xy} - \tau_w}{-\tau_w} = \frac{y}{\delta}$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = \tau_w \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)$$

Nella figura vengono riportati i termini viscoso e turbolento della tensione tangenziale adimensionalizzata rispetto al valore assunto sulla parete $\frac{\bar{\sigma}_{xy}}{\tau_w}$, in funzione della distanza dalla parete adimensionalizzata rispetto all'altezza dello strato limite $\frac{y}{\delta}$.



La scala lineare con cui viene rappresentata la distanza $\frac{y}{\delta}$ non riesce a mettere bene in evidenza i profili delle tensioni nelle zone molto vicine alla parete. Viene allora proposta un'altra unità di distanza dalla parete y^+ , detta **unità di parete**, che ha lo scopo di dilatare tale zona come una lente di ingrandimento; essa è data dal rapporto fra la distanza effettiva y e la **scala viscosa** δ_v

$$y^+ = \frac{y}{\delta_v}$$

con

$$\delta_v = \frac{\nu}{u_\tau} \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

in cui u_τ è la velocità d'attrito.

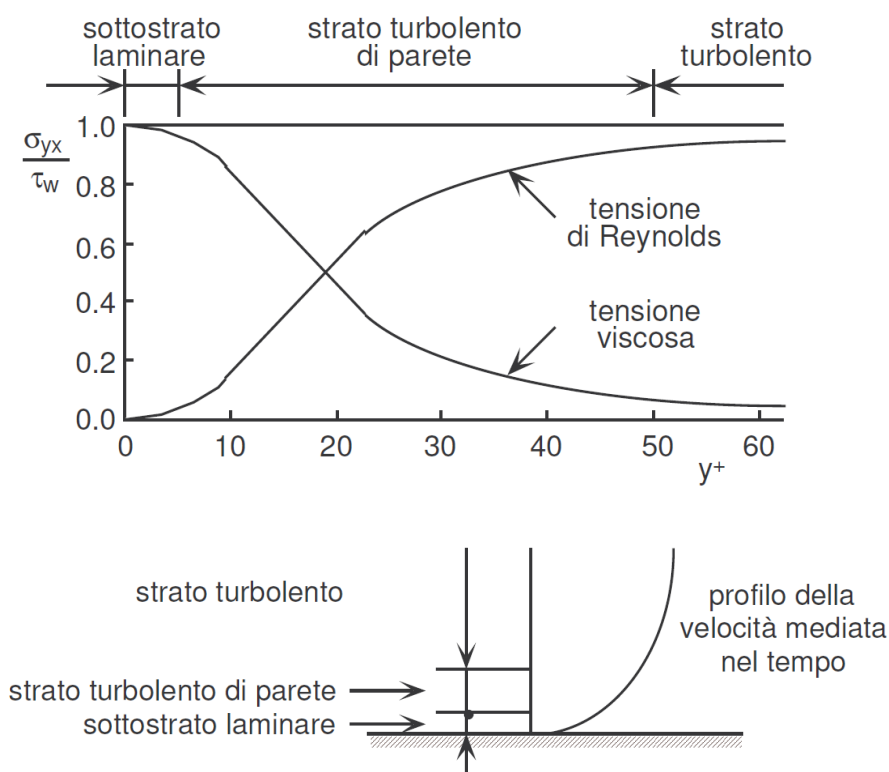
Il rapporto tra le due scale y^+ e y/δ non è fisso, ma dipende dal numero di Reynolds d'attrito

$$\frac{y^+}{\frac{y}{\delta}} = \frac{\frac{y}{\delta_v}}{\frac{y}{\delta}} = \frac{\delta}{\delta_v} = \frac{\delta}{\frac{\nu}{u_\tau}} = \frac{u_\tau \delta}{\nu} = Re_\tau$$

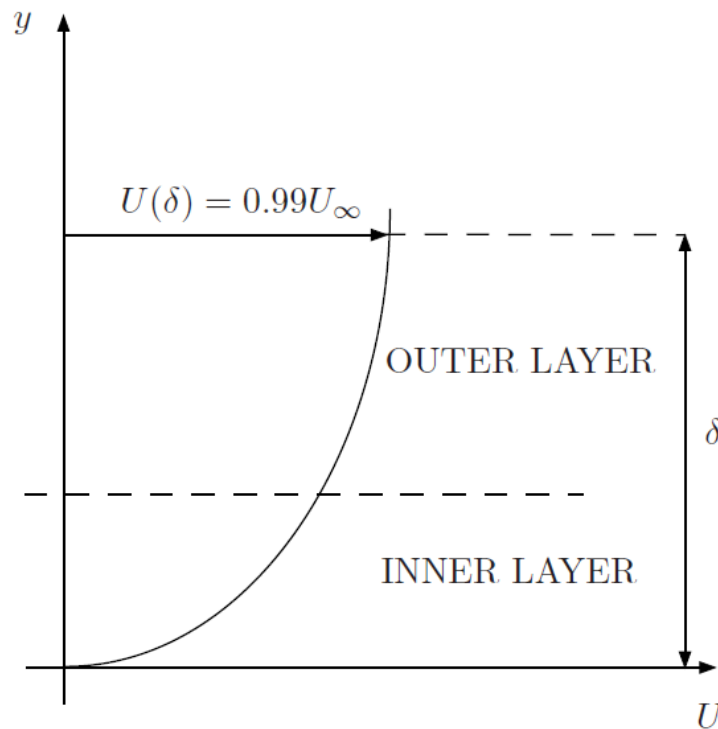
Poiché tutte le componenti della velocità turbolenta sono molto basse nelle immediate vicinanze della parete, anche tutte le componenti del tensore delle tensioni apparenti tendono a zero in corrispondenza della parete solida e su di essa rimangono attive solo le tensioni viscose dovute al moto laminare; di conseguenza in vicinanza della parete le tensioni di Reynolds sono piccole rispetto a quelle viscose e si forma uno strato molto sottile aderente alla parete in cui il moto è laminare.

Questo strato viene chiamato **sottostrato laminare** e il suo spessore è così piccolo che in molti casi è quasi impossibile, o molto difficoltoso, osservarlo con rilievi sperimentali ma, nonostante il suo limitato spessore, esso è di importanza decisiva per lo studio del moto dei fluidi perché è sede di fenomeni che determinano la tensione tangenziale sulla parete e le perdite per attrito viscoso.

Questo strato, in cui non esiste turbolenza, è delimitato da uno strato di transizione, che è chiamato **strato turbolento di parete**, in cui le fluttuazioni della velocità creano tensioni turbolente tangenziali confrontabili con quelle viscose. A distanze maggiori dalla parete le tensioni turbolente sovrastano quelle viscose in quello che viene chiamato **strato turbolento**.



In generale, la struttura dello strato limite può essere studiata a partire da un'analisi dimensionale. In uno strato limite turbolento si possono identificare due regioni. La regione più interna (inner layer) e quella più esterna (outer layer):



All'interno dell'inner layer, le variabili fondamentali sono:

velocità $u \text{ m s}^{-1}$

distanza da parete $y \text{ m}$

sforzo a parete $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$

densità kg m^{-3}

viscosità cinematica $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$

Ci sono 5 variabili e 3 grandezze fondamentali (LMT), perciò per il teorema di Buckingham il problema può essere descritto tramite 2 gruppi adimensionali:

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} = \frac{u}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}$$

$$y^+ = \frac{y}{\delta_v} = \frac{y}{\frac{\nu}{u_\tau}} = \frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

Nell'outer layer, più lontano da parete, la viscosità cinematica ν non è più importante, mentre diventa importante lo spessore dello strato limite δ . All'interno dell'outer layer, le variabili fondamentali sono:

velocità u $m s^{-1}$

distanza da parete y m

sforzo a parete τ_w $kg m^{-1} s^{-2}$

densità ρ $kg m^{-3}$

spessore dello strato limite δ m

Anche nell'outer layer ci sono 5 variabili importanti e 3 grandezze fondamentali (LMT), perciò anche qui possono essere definiti 2 gruppi adimensionali:

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} = \frac{u}{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}$$
$$\eta = \frac{y}{\delta}$$

Pertanto nello strato limite:

INNER LAYER

$$u^+ = f_w(y^+) = f_w\left(\frac{y}{\delta} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{\delta}{\delta}\right) = f_w\left(\eta \frac{\delta}{\delta} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}\right) = f_w(\eta \delta^+)$$

$$\text{con } \delta^+ = \frac{\delta}{\delta_v} \text{ e } \delta_v = \frac{\nu}{u_\tau} \text{ e } u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}.$$

OUTER LAYER

$$u^+ = f_o(\eta)$$

Affinchè vi sia una transizione graduale tra inner layer e outer layer, la velocità adimensionalizzata può essere scritta nel seguente modo:

$$u^+ = f_w(\eta \delta^+) + f_o(\eta)$$

Differenziando per δ^+

$$\frac{\partial u^+}{\partial \delta^+} = \eta f_w'(\eta \delta^+)$$

e quindi per η

$$\frac{\partial^2 u^+}{\partial \eta \partial \delta^+} = f_w'(\eta \delta^+) + \eta \delta^+ f_w''(\eta \delta^+) = f_w'(y^+) + y^+ f_w''(y^+)$$
$$= \frac{d}{dy^+} (y^+ f_w'(y^+))$$

La u^+ non dipende da η nell'inner layer ($\frac{\partial u^+}{\partial \eta} = 0$ e $\frac{\partial}{\partial \delta^+} \left(\frac{\partial u^+}{\partial \eta} \right) = 0$) quindi:

$$\frac{d}{dy^+} (y^+ f_w'(y^+)) = 0$$

Integrando due volte la funzione:

$$y^+ f_w'(y^+) = c_1$$

$$y^+ \frac{d}{dy^+} (f_w(y^+)) = c_1$$

$$d(f_w(y^+)) = \frac{c_1}{y^+} dy^+$$

$$f_w(y^+) = c_1 \ln y^+ + c_2$$

La precedente equazione viene spesso scritta come:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B$$

Questa è la legge logaritmica di parete (valida nell'inner layer)

κ è la costante di Von Karman. Dal confronto con strati limite reali si ricavano i valori delle costanti:

$$\kappa = 0.41$$

$$B = 5.0$$

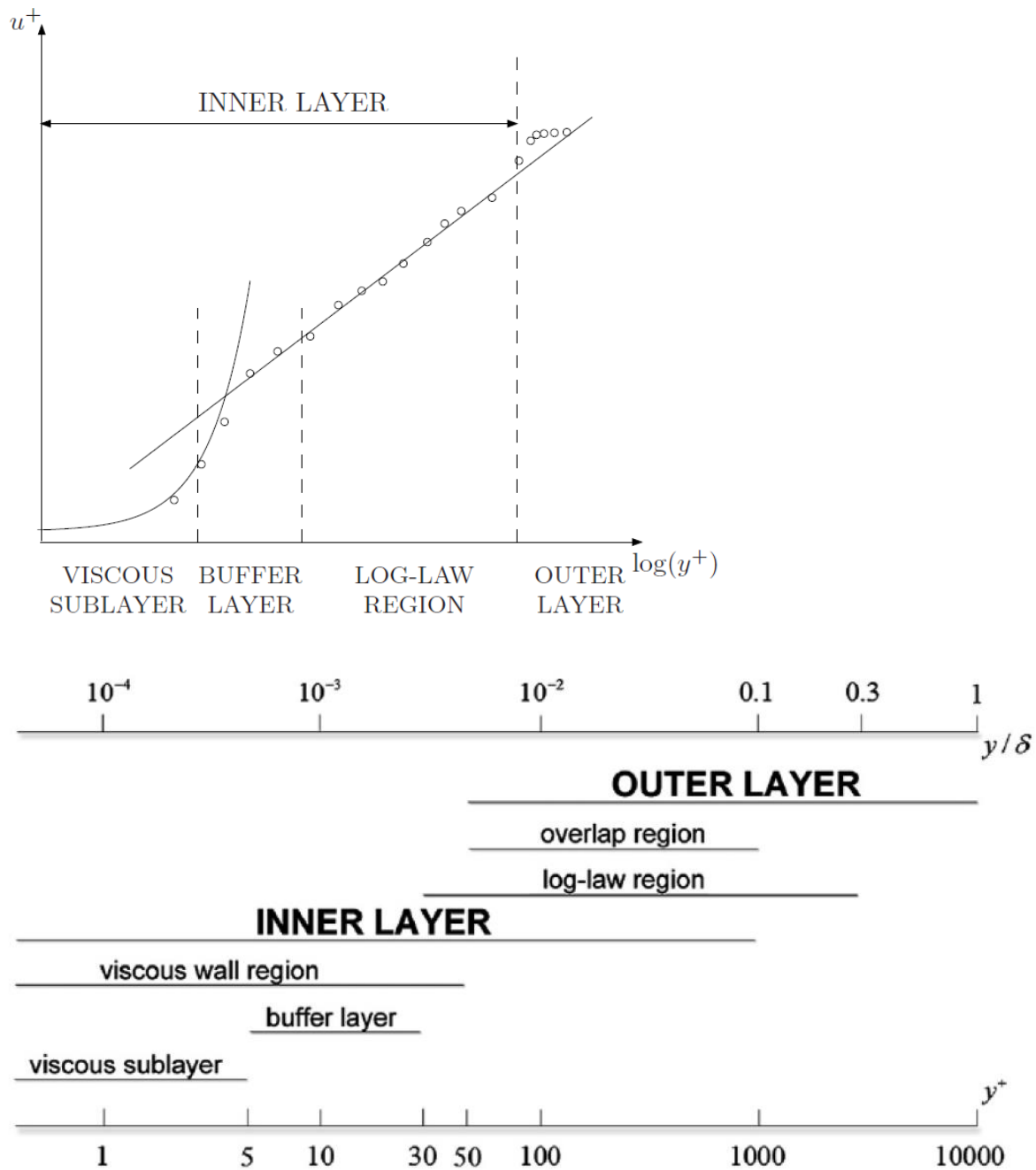
Nello strato limite c'è poi una regione dell'inner layer, la parte più vicina a parete detta viscous sublayer) dove dominano gli effetti viscosi e quindi:

$$\bar{\sigma}_{xy} = \mu \frac{du}{dy} = \text{costante}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} du^+ &= dy^+ \\ u^+ &= y^+ \end{aligned}$$

L'andamento della velocità d'attrito viene spesso mostrata in funzione della distanza y^+ , nello strato limite, in assi semi-logaritmici.



Suddivisione delle regioni vicino a parete in termini di y^+ e $\frac{y}{\delta}$ (Pope, 2000).

In base allo schema in figura abbiamo:

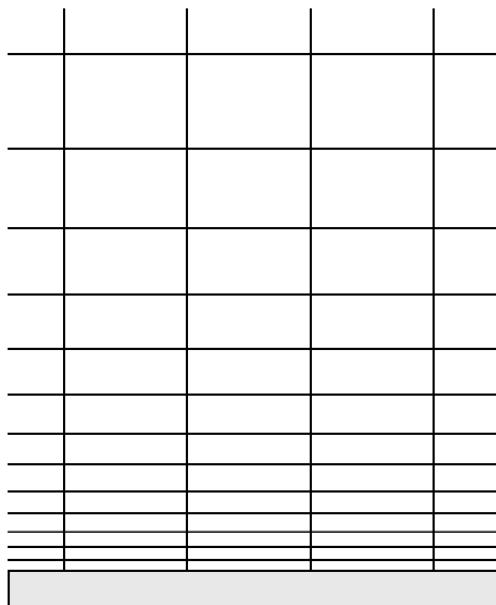
- **Inner layer:** $\frac{y}{\delta} < 0.1$, u è determinata da u_τ e y^+ , mentre è indipendente da U e δ ;
- **Viscous wall region:** $y^+ < 50$, il contributo viscoso allo sforzo d'attrito è significativo;
- **Viscous sublayer:** $y^+ < 5$, il tensore degli sforzi di Reynolds è trascurabile se comparato con gli sforzi viscosi;
- **Outer layer:** $y^+ > 50$, gli effetti diretti della viscosità su u sono trascurabili;

- Overlap region: $y^+ > 50$ e $\frac{y}{\delta} < 0.1$, regione di sovrapposizione tra l'inner e l'outer layer (a grandi numeri di Reynolds);
- Log-law region: $y^+ > 30$ e $\frac{y}{\delta} < 0.3$, permane la legge logaritmica;
- Buffer layer: $5 < y^+ < 30$, regione tra il sottostrato viscoso e la regione in cui vige la legge logaritmica.

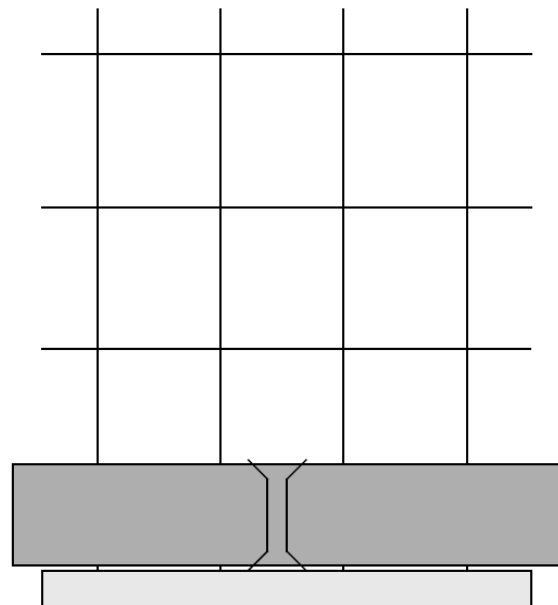
Funzioni di parete

Ad alti numeri di Reynolds risolvere lo strato limite direttamente richiederebbe delle celle molto piccole. Per ridurre lo sforzo computazionale, molti modelli fanno uso di funzioni di parete, che hanno la funzione di “collegare” il valore delle grandezze nella prima cella a parete senza necessità di risolvere lo strato limite nel dettaglio.

Nel caso si desideri risolvere lo strato limite la griglia deve essere abbastanza fitta, in modo che $y^+ \equiv 1$. Altrimenti utilizziamo una funzione di parete nella zona logaritmica ($11.3 < y^+ < 50$).



(a) Risoluzione diretta dello strato limite



(b) Risoluzione con funzione di parete