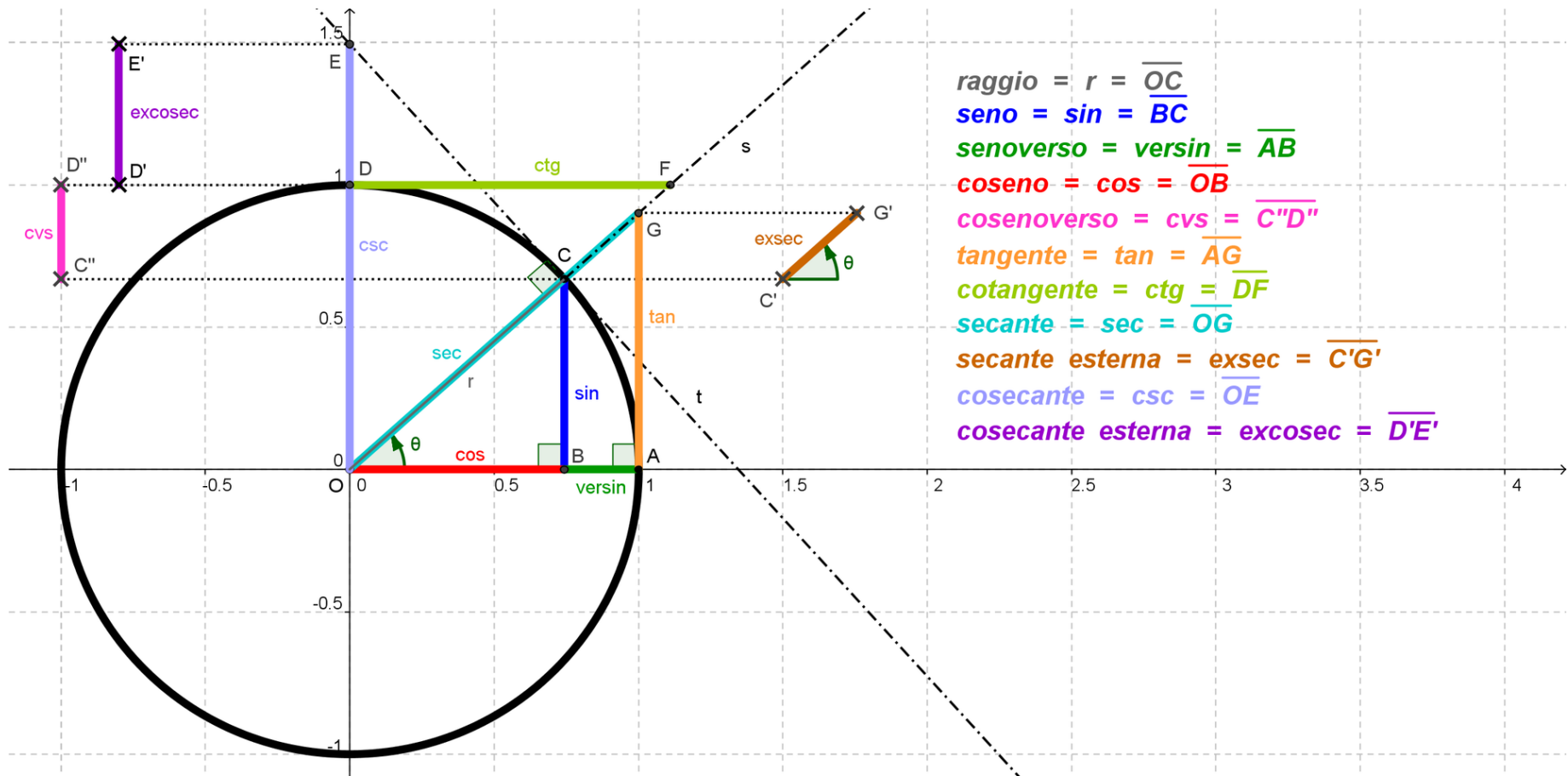
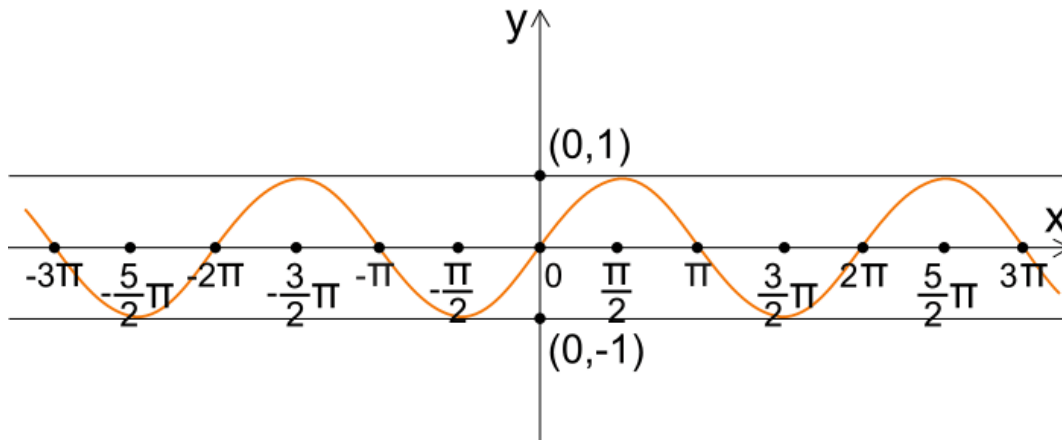




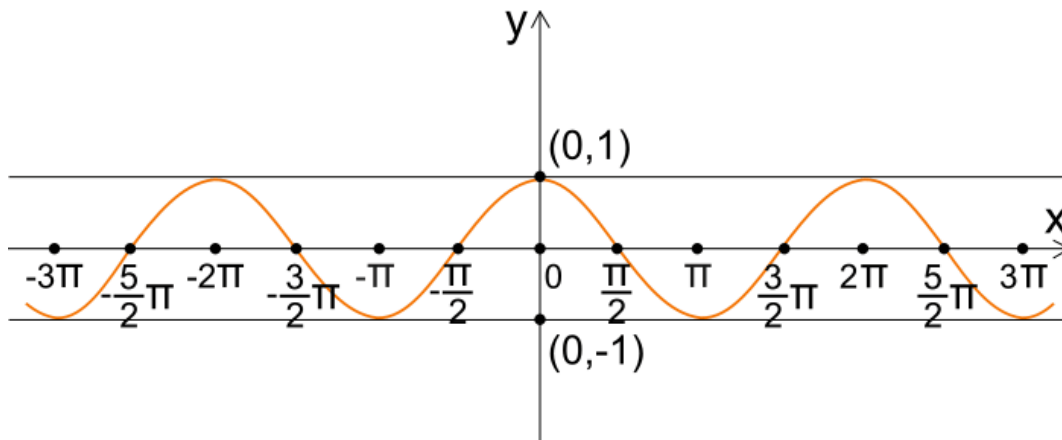
Richiami di trigonometria

- Funzioni trigonometriche elementari

Seno



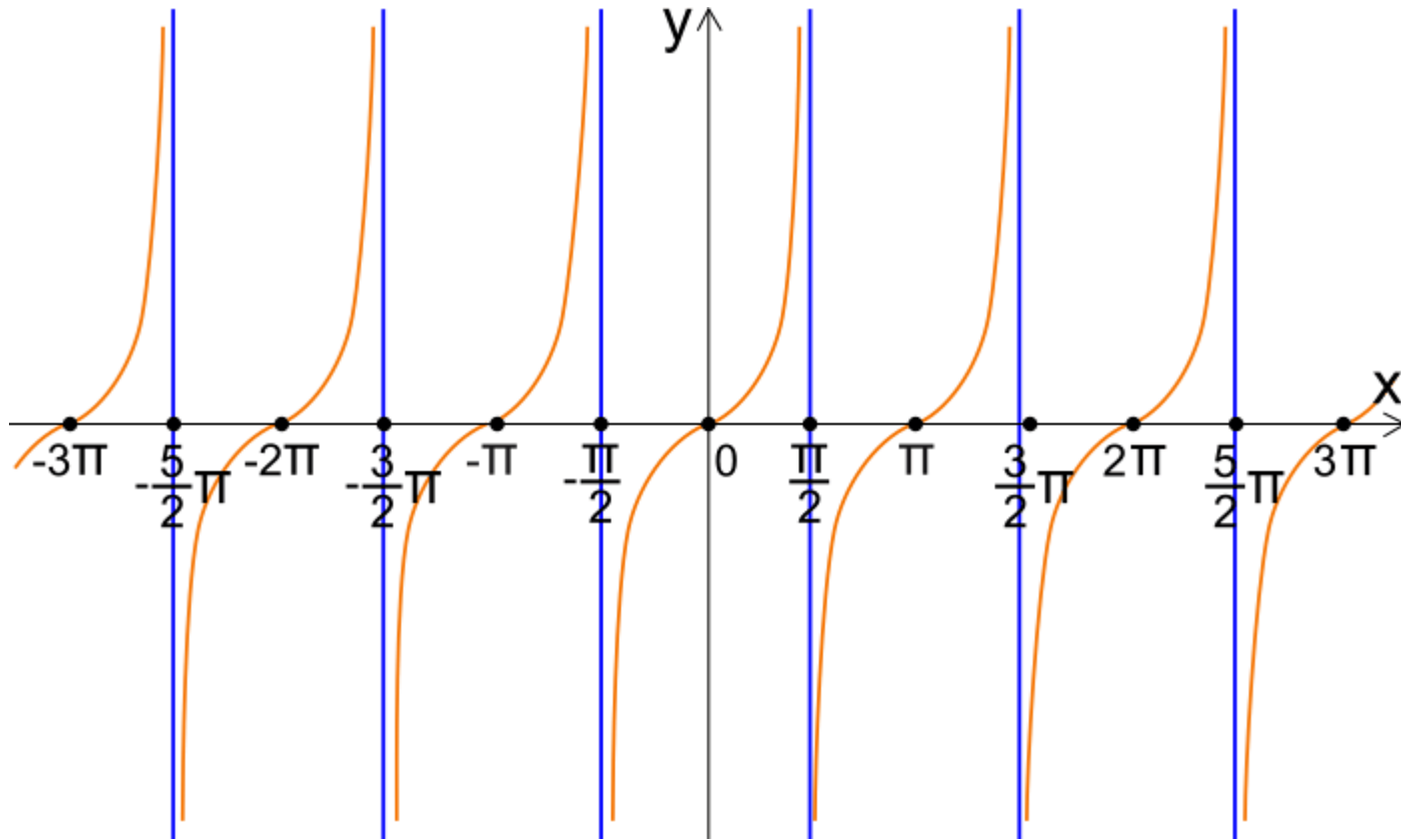
Coseno



Richiami di trigonometria

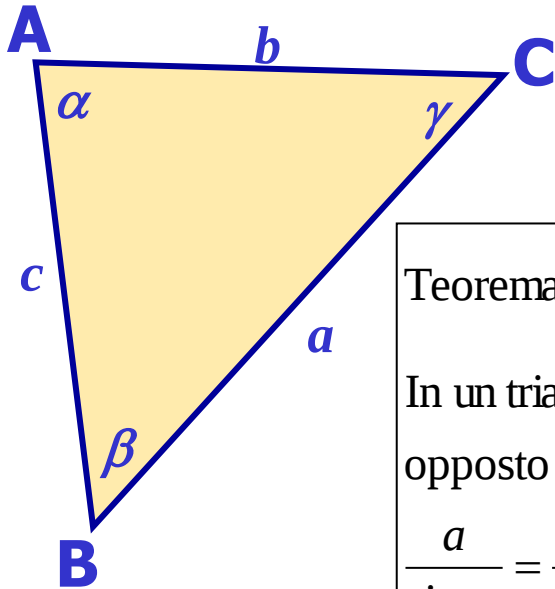
- Funzioni trigonometriche elementari

Tangente



Richiami di trigonometria

- Teorema dei seni e teorema di Carnot



$$\text{Teorema dei seni : } \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

In un triangolo il rapporto tra un lato e il seno dell'angolo opposto è costante, ed è uguale al diametro del cerchio circoscritto al triangolo .

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$\text{Teorema di Carnot : } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\text{Area : } S = \frac{ab \sin \gamma}{2}$$

Richiami di trigonometria

- Approssimazioni

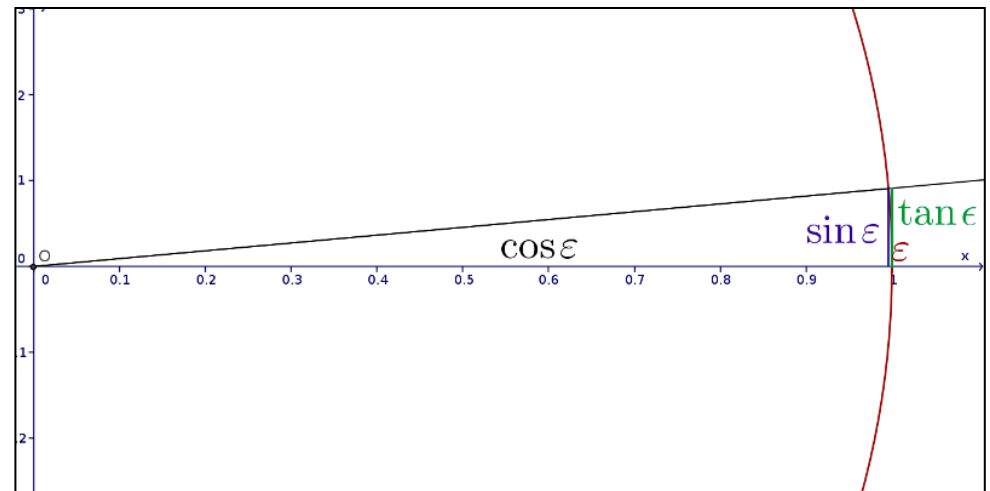
Per angoli molto "piccoli":

$$\sin(\varepsilon) \cong \varepsilon; \quad \cos(\varepsilon) \cong 1 \quad \tan(\varepsilon) \cong \varepsilon$$

Per angoli molto "piccoli":

$$\sin(\varepsilon) \cong \varepsilon; \quad \tan(\varepsilon) \cong \varepsilon$$

$$\cos(\varepsilon) = 1 - 2\sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \cong 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \cong 1$$



$$\cos(x + dx) = \cos x \cos dx - \sin x \sin dx \cong \cos x - \sin x dx$$

$$\sin(x + dx) = \sin x \cos dx + \cos x \sin dx \cong \sin x + \cos x dx$$

Serie

Quali sono le funzioni più facili da “maneggiare”: valutarle in un punto, disegnarne il grafico, derivarle, integrarle?

I polinomi !!!!

Se tutte le funzioni fossero polinomi, la vita sarebbe più facile.

- Data una funzione qualunque, è possibile “approssimarla” con un polinomio?
- E qual è l'errore che si commette con tale approssimazione?

Le serie numeriche

Serie numerica: ... somma infinita, ovvero una somma di infiniti numeri...

Serie numeriche infinite esempi:

$$1+1+1+1+1+...; \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+.....; \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....$$

Serie numeriche infinite notazione :

$$a_1 + a_2 + a_3 + + a_p + \rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} a_p$$

Serie numeriche infinite esempi :

$$1+2+3+..... = \sum_{p=1}^{\infty} p; \quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+..... = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p}$$

Convergenza, si hanno tre casi:

- La serie converge ed ha per somma L ;
- La serie diverge a $+\infty$ o $-\infty$;
- La serie è oscillante.

Convergenza

$$a_1 + a_2 + a_3 + + a_p + ... = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \quad \text{le somme parziali della serie sono } S_1, S_2, ...$$

$$S_1 = a_1; \quad S_2 = a_1 + a_2; \quad S_n = a_1 + a_2 + a_n$$

$$\text{se esiste il limite } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \text{ la serie converge ad } S \text{ e si ha : } \sum_{p=1}^{\infty} a_p = S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^n a_p$$

Le serie numeriche

Esempi di serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

serie armonica diverge;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$$

serie armonica generalizzata : converge per $\lambda > 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

serie geometrica : converge per $|q| < 1$ con somma : $\frac{1}{1-q}$

per $q \leq -1$ oscilla e per $q \geq 1$ diverge

Serie di potenze

Un polinomio di grado n nella variabile reale x è una scrittura del tipo :

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n,$$

con i coefficienti a_i numeri reali.

Es :

$$2 + x - x^3 + 3x^4 - x^5$$

è un polinomio di grado 5 con coefficienti

$$a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -1, a_4 = 3, a_5 = -1$$

Una serie di potenze è un'espressione del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$$

e può essere vista come la generalizzazione di un polinomio con infinite potenze.

Serie binomiale

Si chiama fattoriale di un numero naturale n e si indica con $n!$ il prodotto dei primi numeri naturali : $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 1$

Coefficiente binomiale :

se n e' un numero naturale e k e' un numero naturale compreso tra 0 ed n ,

si indica con il simbolo $\binom{n}{k}$ il "coefficiente binomiale n su k "

Definizione e: $\binom{n}{k}$ e' il numero di sottoinsiemi di k elementi estratti da un insieme di n elementi

Per esempio $\binom{5}{2}$ e' il numero di sottoinsiemi di 2 elementi in un insieme di 5 elementi

Proprietà del coefficiente binomiale :

$$\binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{n-1} = n; \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Coefficiente binomiale in termini fattoriali :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Serie binomiale

Teorema binomiale o binomio di Newton :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Serie Binomiale :

$$\text{la serie : } 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} x^3 + \dots$$

dove p è un numero reale (se p è naturale positivo $\rightarrow$ binomio di Newton)

converge al valore di $(1+x)^p$ se $|x| < 1$

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} x^3 + \dots$$

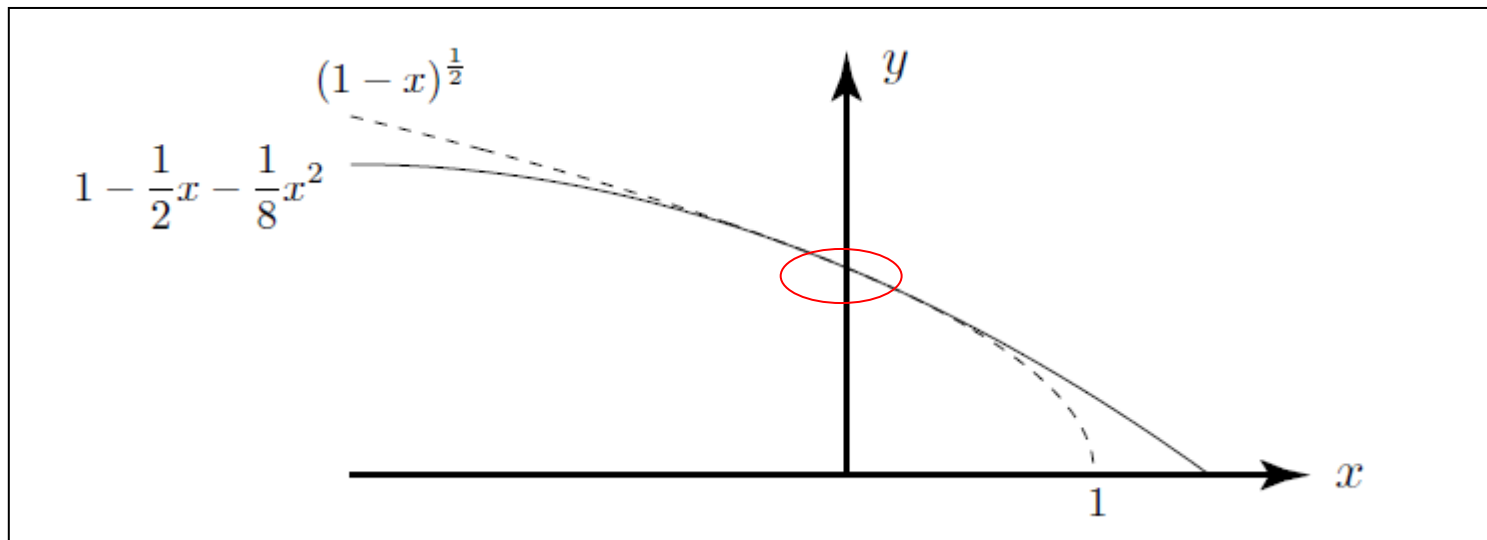
$$\text{Esempio : } (1+x)^2 = 1 + 2x + \frac{2(1)}{2} x^2 + 0 + 0 + \dots = 1 + 2x + x^2 + \dots$$

Serie binomiale

Serie binomiale esempio :

La funzione $(1-x)^{1/2}$ ($p = 1/2$ e $x = -x$) in serie binomiale diventa :

$$(1-x)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

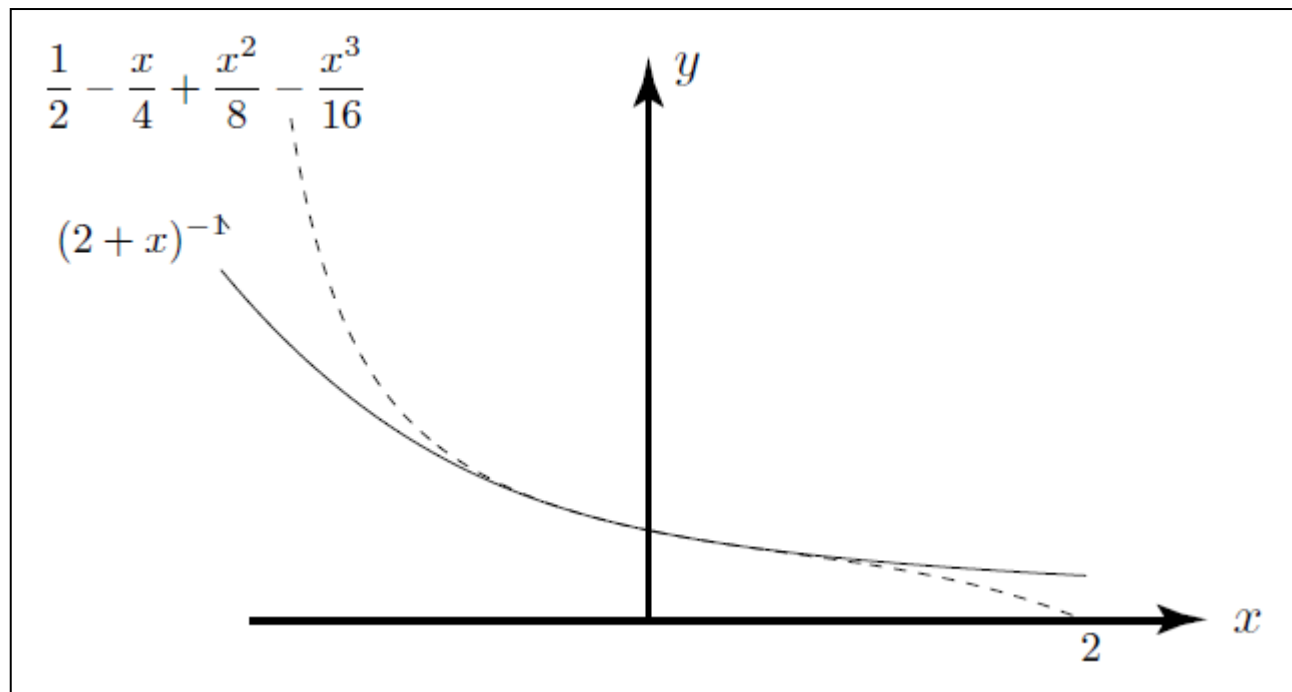


Serie binomiale

Serie binomiale esempio :

La funzione $\frac{1}{(2+x)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-1}$ ($p = -1$ e $x = \frac{x}{2}$) in serie binomiale diventa :

$$\frac{1}{(2+x)} \approx \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16}$$

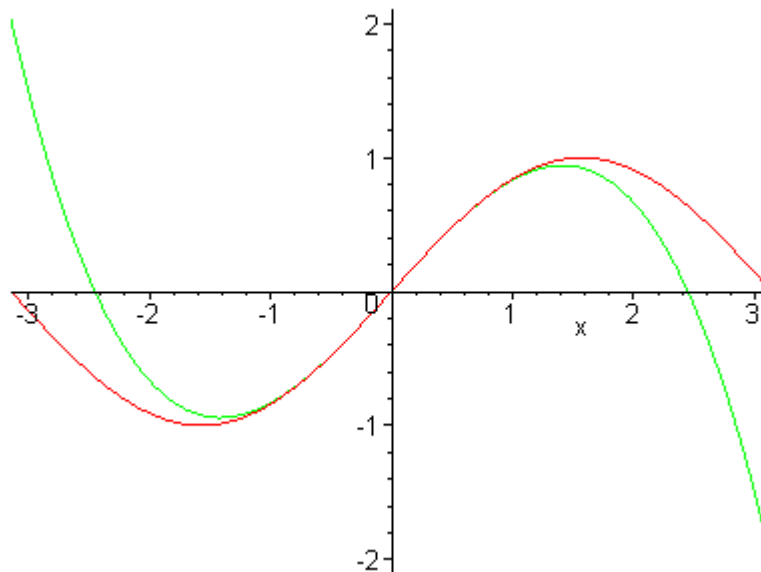


Serie di potenze... notevole

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Questo sviluppo è particolarmente importante, tra l'altro, perché le funzioni trigonometriche, così come la funzione esponenziale e, più in generale, le funzioni trascendenti, non hanno una formula algebrica finita con cui essere espresse. Per queste funzioni, il loro sviluppo in serie è quindi la cosa migliore che possiamo conoscere ed il metodo più semplice ed affidabile per calcolarne i valori, anche se approssimati.

$$\sin(x) \text{ e } x - \frac{x^3}{6}$$



Serie di potenze

Una lista di serie di potenze...

Funzione	Serie	Intervallo di convergenza
$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$(-\infty, +\infty)$
$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$(-\infty, +\infty)$
$\exp x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$(-\infty, +\infty)$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$	$(-1, 1)$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$	$(-1, 1)$
$\arctan x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$[-1, 1]$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$	$(-1, 1)$

Serie di Maclaurin e di Taylor

Serie di Maclaurin: una funzione $f(x)$ differenziabile in 0, può essere espressa come serie di potenze nella forma:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} f^{(p)}(0)x^p$$

Serie Maclaurin esempio :

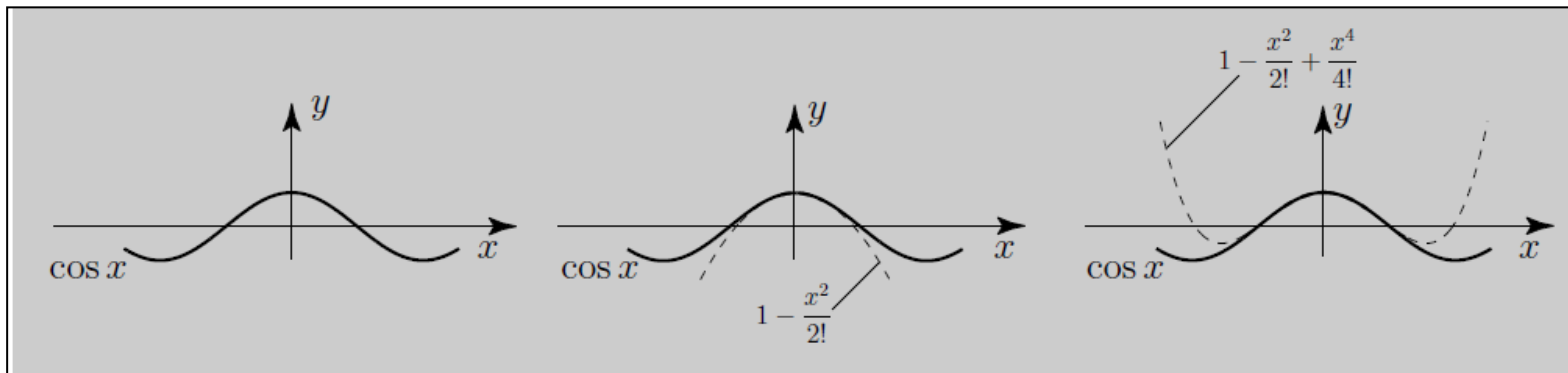
$$f(x) = \cos(x);$$

$$\text{derivate di } f(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x), \quad f''(x) = -\cos(x), \quad f'''(x) = \sin(x)$$

$$\text{nel punto } x = 0 \Rightarrow f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 0$$

$$\text{usando la serie di Maclaurin : } f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0)$$

$$\text{si ha : } \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$



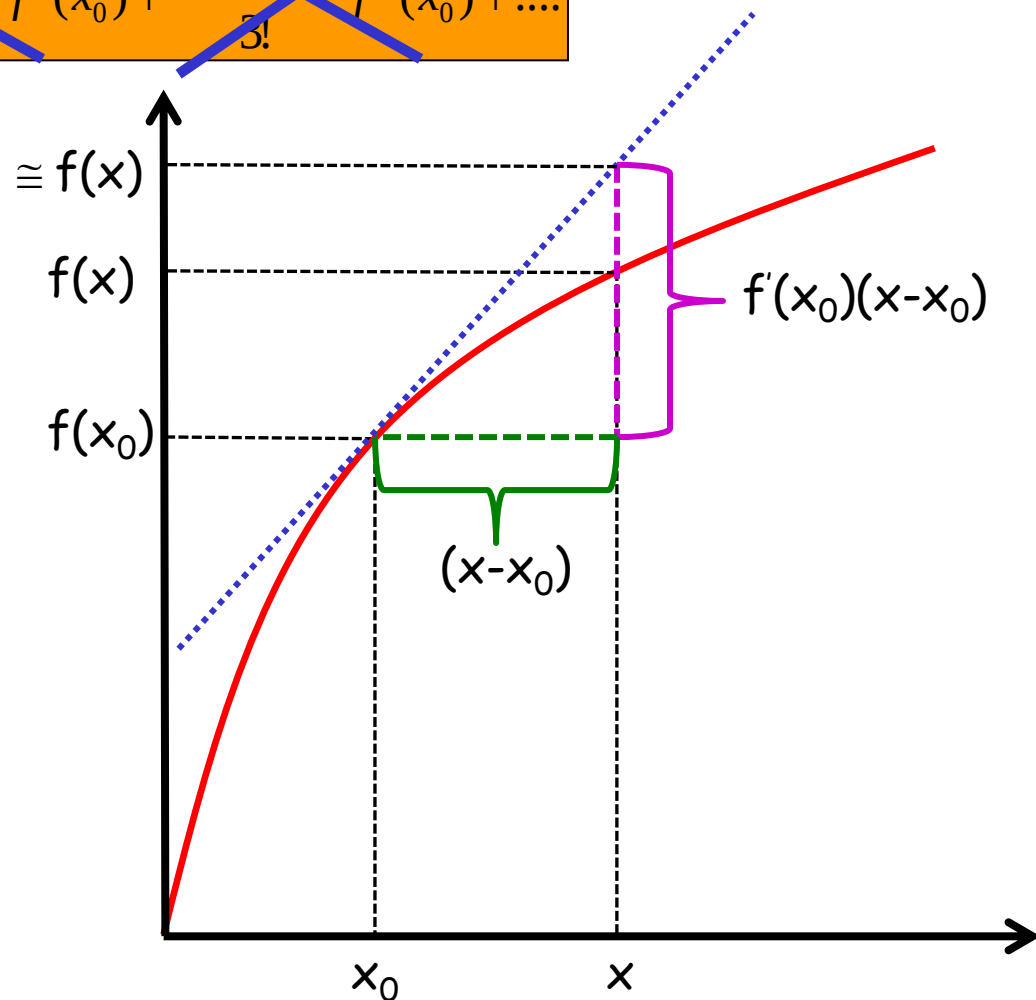
Serie di Maclaurin e di Taylor

Serie di Taylor: e' una generalizzazione delle serie di Maclaurin. La serie e' sviluppata per $(x-x_0)$ invece che per x

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \dots$$

Se si ferma l'espansione di Taylor alla derivata prima si effettua una "approssimazione lineare"in altre parole si approssima la funzione $f(x)$ con la retta tangente in x_0 ...

$$f(x) \cong f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)$$

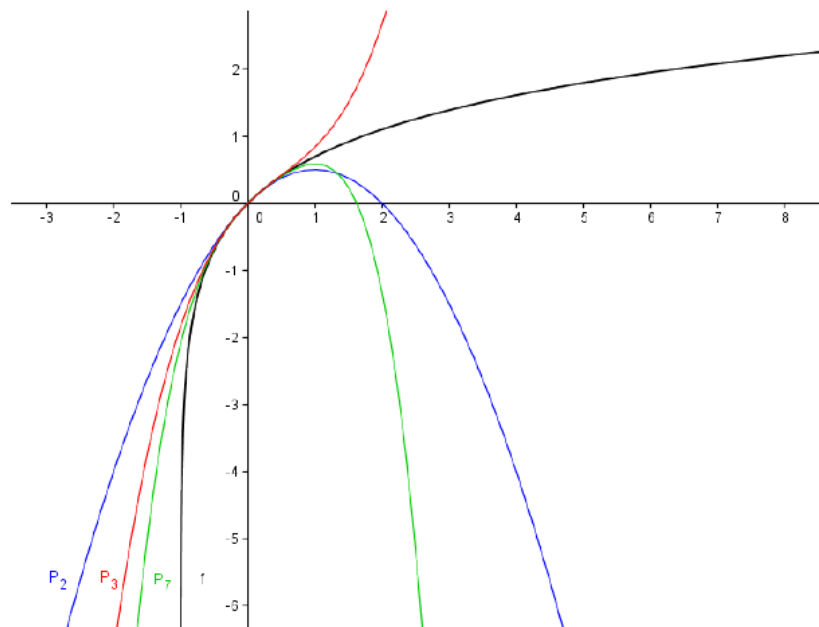


Serie di Taylor

La serie di Taylor di una funzione data $f(x)$ è una serie di potenze!

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \right) f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{con}$$

$$a_n = \left(\frac{1}{n!} \right) f^{(n)}(x_0)$$



Sviluppo di Taylor della funzione $\log(1+x)$ centrato in 0. In verde polinomio di grado 7

Grandezze

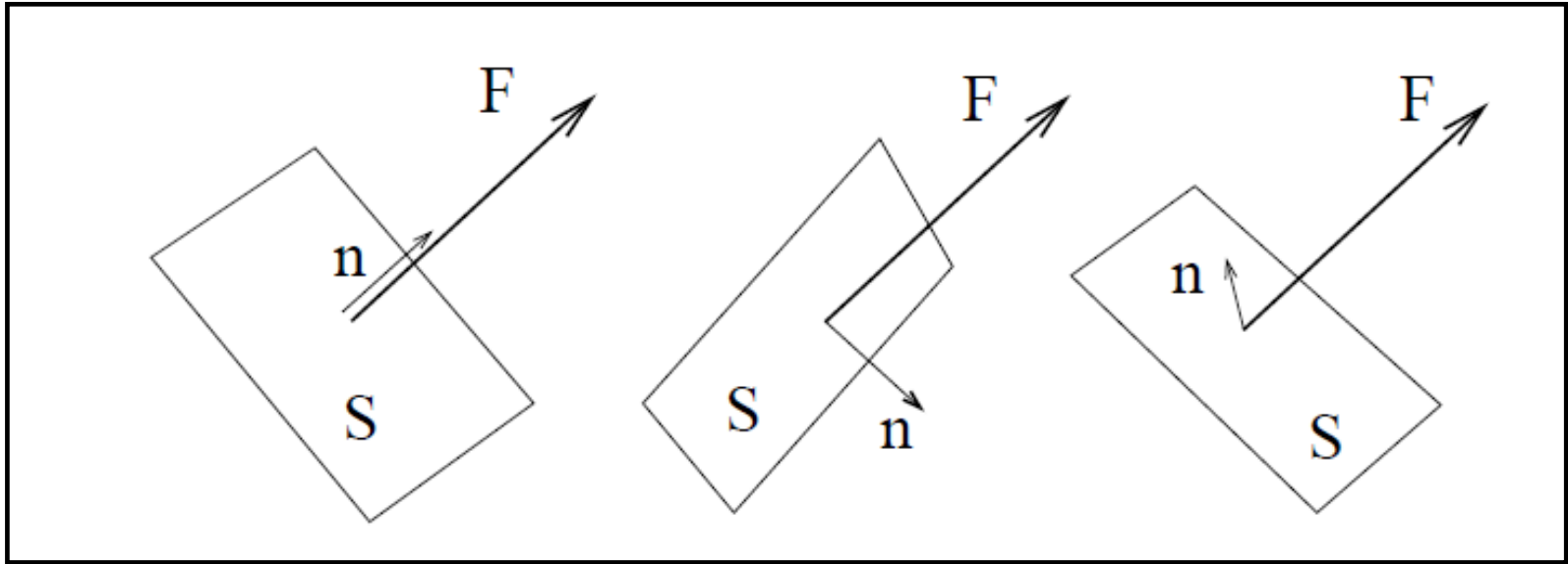
Si dice che una grandezza fisica ha carattere SCALARE quando essa è completamente rappresentata da un numero invariante rispetto a qualunque cambiamento del sistema di riferimento (ad esempio la temperatura, la massa, l'energia, la carica elettrica, etc.).

Si dice che una grandezza fisica ha carattere VETTORIALE quando essa è completamente rappresentata dall'insieme di una DIREZIONE, un VERSO lungo tale direzione ed una INTENSITA' scalare (ad esempio la velocità di un fluido, la forza di gravità, etc.).

Non tutte le grandezze fisiche sono però dei vettori. Esistono delle grandezze fisiche che non possono essere rappresentate da vettori. Esempio di ciò è quando si cerca di descrivere le deformazioni ("Strain") a cui è soggetto un corpo solido su cui agiscono delle forze. Questa descrizione non può essere fatta con l'aiuto dei vettori. Un altro esempio è il campo gravitazionale secondo la teoria della relatività generale. Il concetto di vettore può essere esteso definendo grandezze con più indici, ovvero con più gruppi di componenti rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali: i TENSORI.

Sforzo

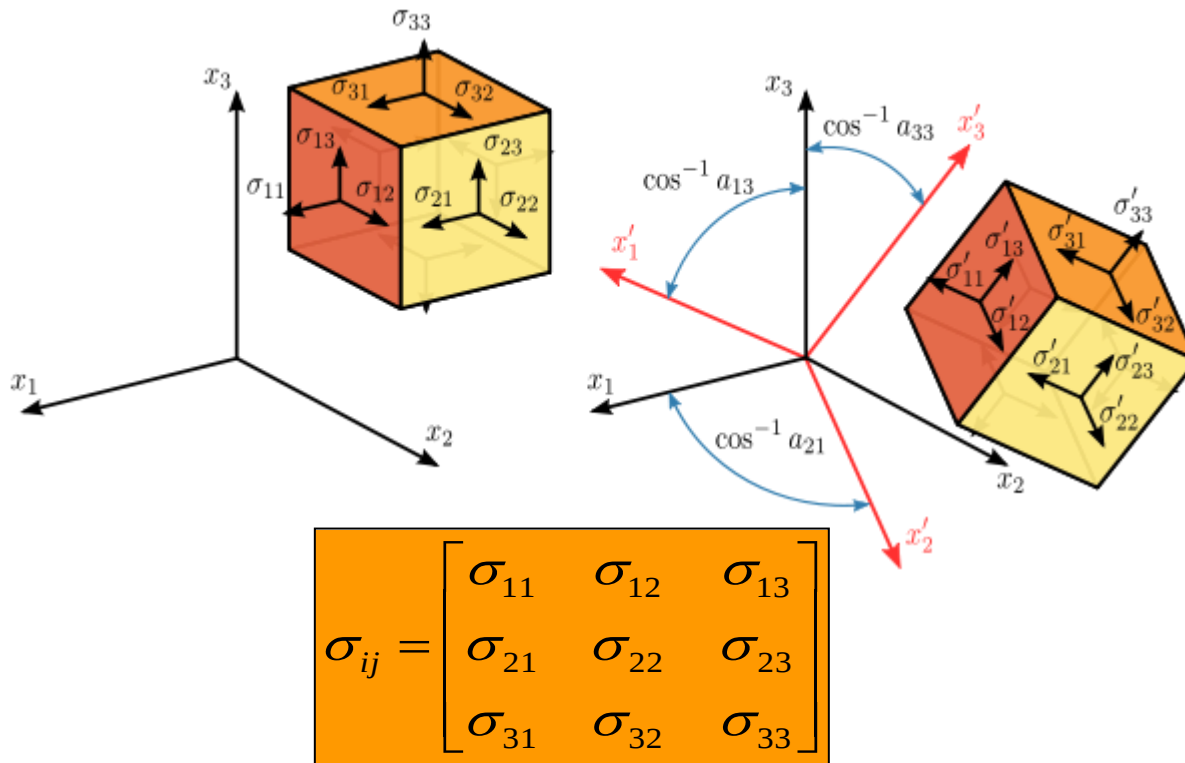
Lo sforzo ("Stress") è una forza (quantità vettoriale) divisa per una superficie..



Dagli schemi di figura 2, tuttavia, è evidente che con la stessa forza e la stessa area si possono immaginare infinite situazioni differenti a seconda dell'orientamento relativo tra la forza e la normale alla superficie. Contemplando tutte le possibili combinazioni tra le componenti della normale alla superficie (3) e le componenti della forza (3) si conclude che lo stato di sforzo è caratterizzato da nove quantità che sono le sue componenti (in tre dimensioni). Lo sforzo in quanto entità fisica va distinto dalle sue componenti che assumono significato solo nell'ambito di un sistema di unità di misura ed una terna di riferimento.

Sforzo

Le singole componenti dello sforzo possono essere indicate da un simbolo seguito da due pedici (per esempio il primo riferito alla componente delle forze ed il secondo alla normale alla superficie su cui agisce) σ_{ij} , $i, j = x, y, z$ e possono quindi essere raccolte, in tre dimensioni, in una matrice 3×3

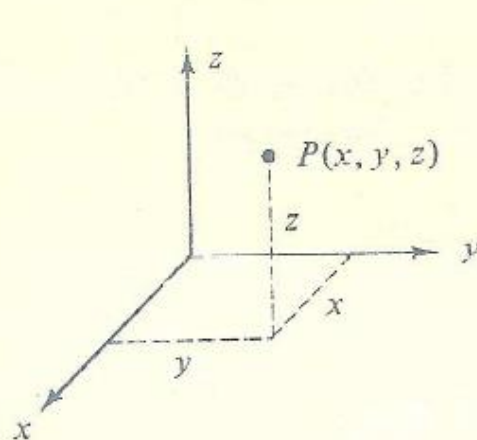


Introduzione ai tensori...

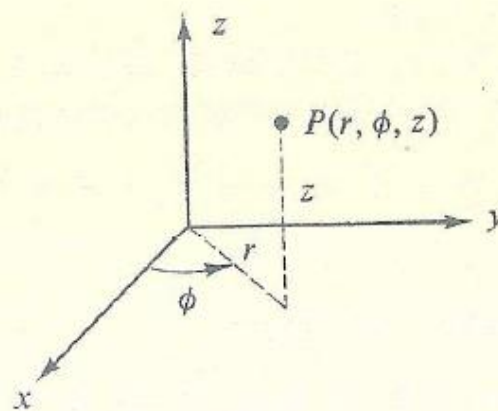
<https://www.youtube.com/watch?v=CFoKIW6DUt4>

Sistemi di assi coordinati

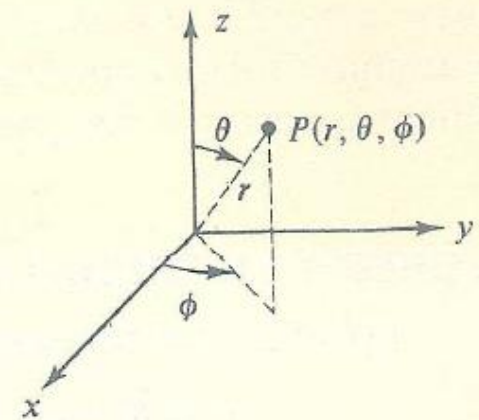
Un problema che presenti una simmetria cilindrica, o sferica, può essere espresso, e risolto, nel familiare sistema **cartesiano ortogonale**. La soluzione non conserverebbe però la simmetria e sarebbe inutilmente complessa. Per cui spesso, nell'ambito dei problemi che si affrontano in Fisica della Terra Solida, vengono utilizzate anche **coordinate polari cilindriche o sferiche** a seconda della simmetria del problema.



(a) Cartesiano



(b) Cilindrico



(c) Sferico

Nel sistema polare sferico la posizione di un punto viene definita da r , θ e ϕ . Nei problemi che affronteremo r rappresenta la distanza radiale dal centro della Terra, θ la colatitudine (0-180) e ϕ la longitudine.

Sistemi di assi coordinati

Note le coordinate x, y e z nell'usuale sistema cartesiano si possono calcolare le coordinate r, θ e ϕ nel sistema sferico

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Inversamente:

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

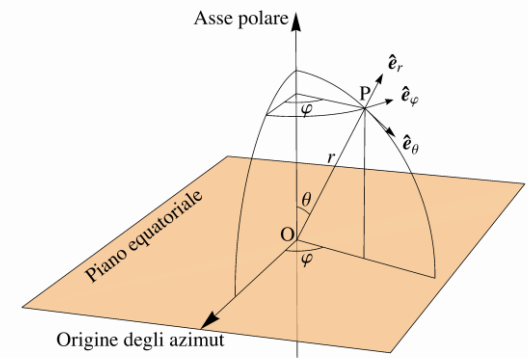
$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

Il gradiente in coordinate polari sferiche si esprime come:

$$\text{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

COORDINATE POLARI SFERICHE



Campi

Sia Ω una regione nello spazio in cui, in ogni suo punto, sia definita una grandezza J . La regione Ω si dice allora soggetta ad un campo. Un campo può essere scalare, vettoriale o tensoriale, a seconda che la grandezza J sia scalare, vettoriale o tensoriale.

Si dice che in una regione S dello spazio ordinario è presente un CAMPO SCALARE $g(P)$ quando in ogni punto $P = (x, y, z)$ è definito il valore della grandezza scalare J

Si dice che in una regione S dello spazio ordinario è presente un CAMPO VETTORIALE $\mathbf{V}(P)$ quando in ogni punto $P = (x, y, z)$ è definito il valore della grandezza vettoriale $\mathbf{V}$.

Campi Scalari

La struttura di un campo scalare Φ può essere visualizzata mediante le cosiddette superfici di livello. Si consideri un generico punto P_0 ed il valore Φ_0 ivi assunto dalla Φ : il luogo di tutti i punti in corrispondenza dei quali Φ assume lo stesso valore definisce una superficie (superficie di livello) a cui espressione analitica, in coordinate cartesiane è:

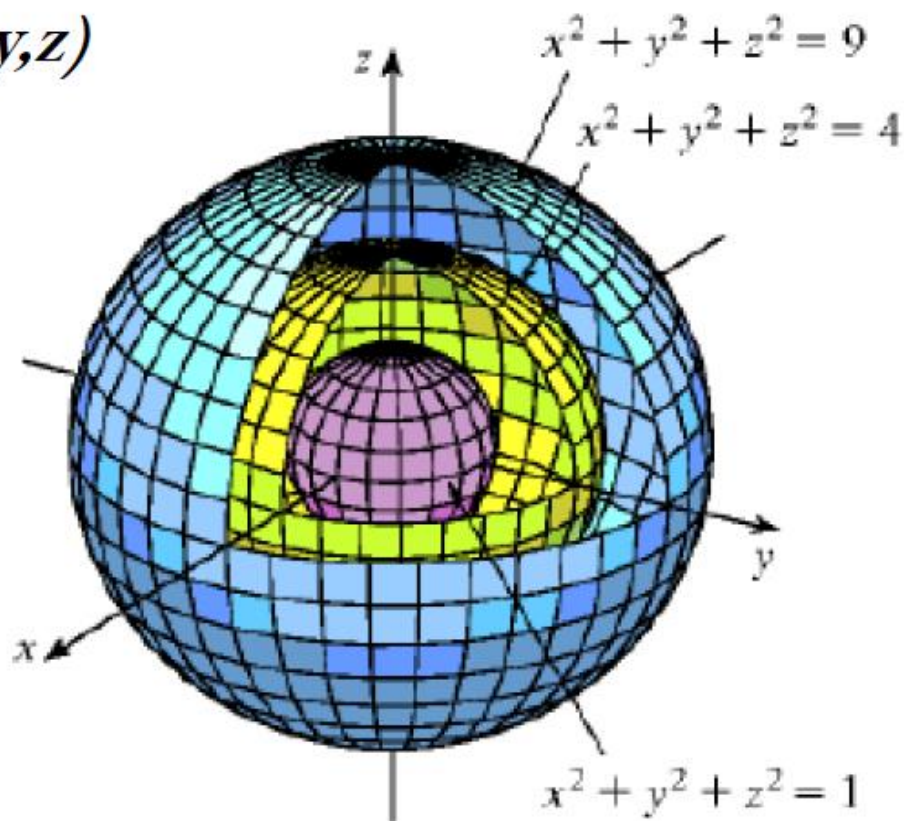
$$\Phi(x, y, z) = \Phi_0 = \text{costante}$$

Se la Φ è continua e derivabile due volte e se non esistono punti in cui il gradiente di Φ si annulla, per ogni punto passa una ed una sola superficie di livello: pertanto la conoscenza di tutte le superfici di livello, contrassegnate dai corrispondenti valori, permette di descrivere completamente il campo.

Questo tipo di rappresentazione risulta particolarmente utile quando il campo è definito in una regione bidimensionale: in tal caso, infatti, è possibile definire le linee di livello su tale piano

Campi Scalari: superfici di livello

$$F = f(x, y, z)$$



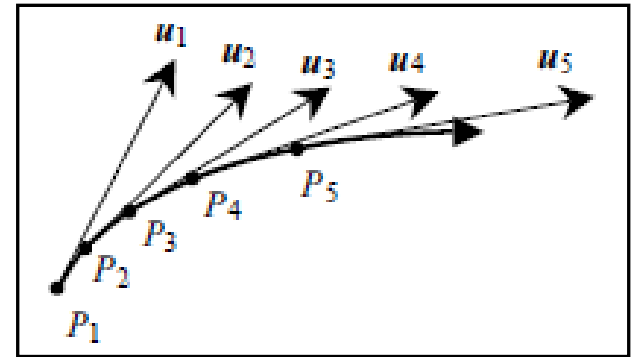
Esempio di Campo Scalare

Pressione atmosferica



Campi Vettoriali

Dato un campo vettoriale $\mathbf{U}$ (supposto definito in tutto lo spazio), si dice linea di campo (o di flusso) ogni linea che sia tangente in ogni suo punto P al vettore $\mathbf{U}(P)$. Per ogni punto dello spazio passa una ed una sola linea di campo. Pertanto, la mappa delle linee di campo fornisce un modo per visualizzare la struttura del campo vettoriale. Essa consente, infatti, di individuare subito in ogni punto la direzione ed il verso del vettore $\mathbf{U}$

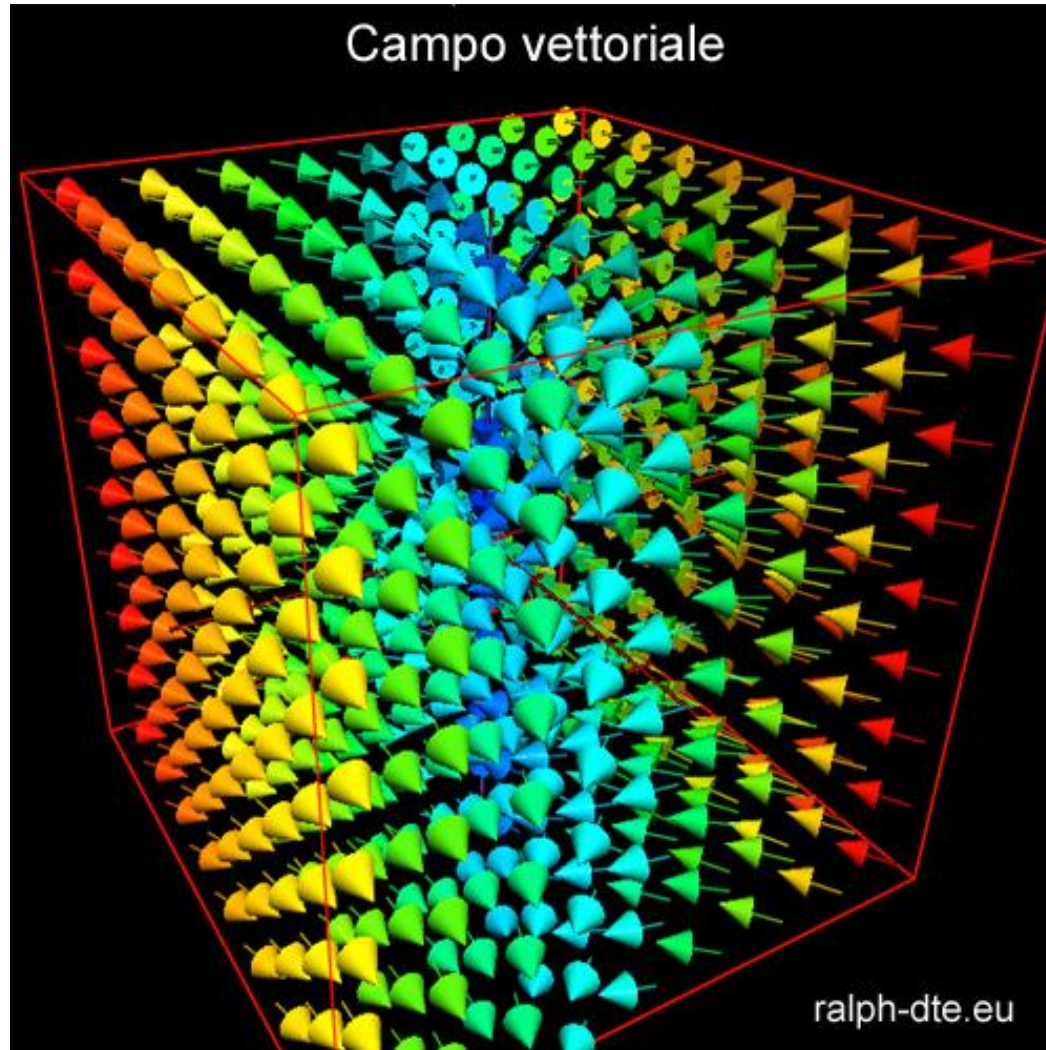


Le linee di campo presentano tre diverse tipologie, quindi possono

- **Formare linee chiuse**
- **Formare linee aperte di lunghezza infinita** senza inizio né fine
- **Formare linee aperte di lunghezza finita** (i punti di inizio si dicono sorgenti, quelli di fine sono detti pozzi)

Esempio di Campo vettoriale

Esempio di campo vettoriale nel mondo reale lo si ha considerando la velocità associata alle particelle di fluido che scorrono all'interno di una condotta o di un fiume o ancora in una corrente d'aria



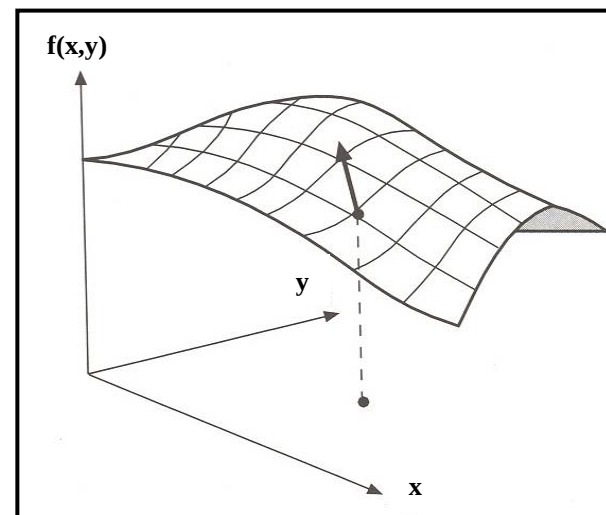
Gradiente di un campo scalare

Sia f funzione scalare continua: in ogni punto è possibile definire un vettore "gradiente" di f e indicato con $\text{grad } f$ o ∇f

La direzione del vettore ∇f è quella lungo la quale si ha l'incremento più rapido della funzione f . ∇f è una funzione vettoriale

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{X} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{Y} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{Z}$$

Ciascuna componente di ∇f esprime la rapidità di variazione di f lungo la direzione corrispondente

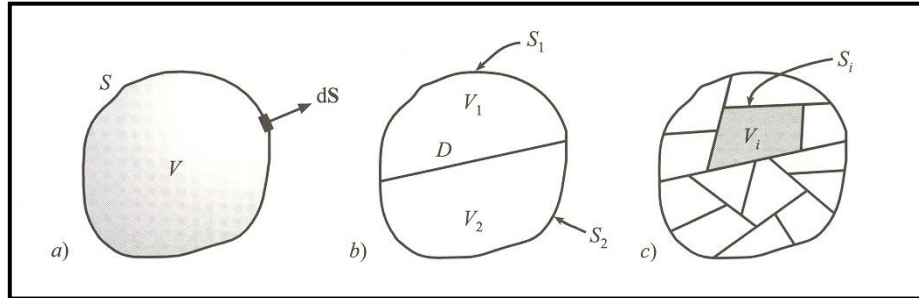


Conoscere il gradiente di f in un punto significa conoscere come varia f nell'intorno del punto.

N.B spesso indicheremo gli assi di un sistema ortogonale 3D come x_1 , x_2 e x_3 al posto di X,Y,Z

Divergenza di un campo vettoriale

Sia F funzione vettoriale. Consideriamo V un volume finito: si definisce flusso Φ della funzione F attraverso la superficie S :



$$\Phi = \oint_S F \cdot dS$$

dS è un vettore infinitesimo il cui modulo rappresenta l'area di un piccolo elemento di S ; direzione e verso sono quelli della normale n

Il limite per $V \rightarrow 0$ esprime una proprietà caratteristica della funzione F nell'intorno del punto. Esso è chiamato divergenza di F e indicato con $\text{div } F$ o $\nabla \cdot F$.

$$\nabla \cdot F = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \oint_{S_i} F \cdot dS_i$$

La divergenza di F rappresenta il flusso di F uscente dal volume V_i , per unità di volume, nel caso in cui V_i sia infinitesimo. E' una grandezza scalare funzione delle coordinate che varia a seconda del punto attorno al quale si calcola il flusso.

Divergenza di un campo vettoriale

La divergenza in coordinate cartesiane si esprime come:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right)$$

N.B Un campo vettoriale $\mathbf{F}=\mathbf{F}(x,y,z)$ di norma viene espresso attraverso tre campi scalari $F_x=F_x(x,y,z)$, ovvero il campo della componente x di $\mathbf{F}$, e $F_y=F_y(x,y,z)$ e $F_z=F_z(x,y,z)$

La divergenza di una funzione vettoriale dà informazioni sul flusso della funzione nell'intorno di un punto: se ad esempio $\text{div } \mathbf{F}$ è positiva in un punto P , ciò significa che esiste un flusso uscente netto nell'intorno di P . Se tutte e tre le derivate parziali sono positive in P , i vettori del campo $\mathbf{F}$ saranno diretti radialmente rispetto a P .

Laplaciano

Se prendiamo la divergenza del gradiente di una funzione scalare, otteniamo un'altra funzione scalare, nota come laplaciano della funzione iniziale. Se f è una funzione scalare, si definisce laplaciano di f la funzione:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$$

In coordinate cartesiane l'espressione generale del laplaciano di f diventa:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Il laplaciano di f è proporzionale alla differenza tra il valore medio di f nell'intorno del punto e il valore di f in quel punto.

L'equazione:

$$\nabla^2 f = 0$$

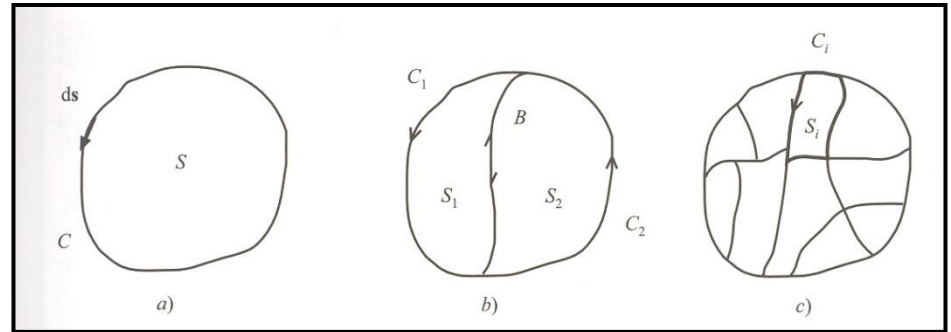
è detta equazione di Laplace e le funzioni che la soddisfano sono chiamate funzioni armoniche

Rotore

Sia F funzione vettoriale. Consideriamo una curva C che può essere immaginata come la linea che delimita una certa superficie S : si definisce circuitazione di F lungo C l'integrale di linea:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

$d\mathbf{S}$ è un vettore infinitesimo, tangente a C e orientato secondo un verso di percorrenza fissato.



Assumiamo che $S_i \rightarrow 0$ e consideriamo il rapporto tra la circolazione e l'area. Poiché occorre tenere conto dell'orientazione della superficie S_i nello spazio, l'area è un vettore nS_i dove n è il versore normale ad S_i , Mantenendo costante n scriviamo il limite:

$$\lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{S_i} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{1}{S_i} \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}_i$$

Rotore

Si adotta la convenzione per cui il verso di $\mathbf{n}$ e quello di percorrenza del circuito C_i soddisfano la regola della "mano destra". Il limite tra circuitazione e superficie in un punto è uno scalare: se scegliamo tre "circuiti" principali orientati secondo x_1 , x_2 e x_3 otteniamo tre scalari diversi, che possiamo considerare come le componenti di un vettore che si chiama rotore di F e si indica con $\text{rot } F$ o $\nabla \times F$. Il limite tra circuitazione e superficie per un circuito di orientato secondo $\mathbf{n}$ è quindi la proiezione del vettore $\nabla \times F$ nella direzione $\mathbf{n}$

$$(\nabla \times F) \cdot \mathbf{n} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{1}{S_i} \oint_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}_i$$

Il rotore di F è una grandezza vettoriale funzione delle coordinate del punto. La direzione di $\text{rot } F$ è in ogni punto normale al piano, passante per il punto, nel quale la circolazione è massima; la sua intensità è uguale al limite della circolazione per unità di area, in questo piano, attorno al punto in questione.

Rotore

Il rotore in coordinate cartesiane si esprime come:

$$(\nabla \times \mathbf{F}) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \mathbf{x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{z}$$

Se un campo vettoriale ha rotore diverso da 0, si dice che possiede una vorticità. Quando invece l'integrale di $\mathbf{F}$ lungo tutti i possibili percorsi chiusi è zero, si ha $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. Ciò segue dal teorema di Stokes: l'integrale di superficie di $\nabla \times \mathbf{F}$ deve essere nullo ovunque. Dal fatto che la circolazione è nulla per qualunque circuito discende che l'integrale di linea tra due punti non dipende dal percorso effettuato.

Divergenza ..e rotore e equazioni di Maxwell

<https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE>

Proprietà dei campi

Conservativi

$$(\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

L'integrale di $\mathbf{F}$ lungo una curva aperta dipende solo dagli estremi di integrazione. La circuitazione di $\mathbf{F}$ lungo una curva chiusa è nulla

$$\mathbf{F} = \nabla \varphi$$

La funzione φ è un potenziale scalare definito a meno di una costante: $\varphi = \varphi^* + \text{cost}$ cioè a meno di una funzione a gradiente nullo.

φ viene determinato in ogni punto fissando ad arbitrio il suo valore in un punto di riferimento arbitrario.

Solenoidali

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

Il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso una superficie aperta dipende solo dal contorno della superficie.

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$$

La funzione $\mathbf{A}$ è un potenziale vettore definito a meno di un gradiente. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^* + \nabla \varphi$. $\mathbf{A}$ viene determinato in ogni punto imponendo la condizione di compatibilità, ad esempio quella di Coulomb: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

Si conclude che un campo conservativo (o lamellare) è descritto da un potenziale scalare φ , mentre un campo solenoidale è descritto da un potenziale vettore $\mathbf{A}$.

Proprietà dei campi

Campi Armonici

Quando un campo è sia conservativo che solenoidale in un certo dominio, si ha:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ \nabla^2 \mathbf{A} = 0 \end{cases}$$

Queste equazioni si dicono equazioni di **Laplace**, rispettivamente scalare e vettoriale. Una funzione che soddisfi l'equazione di Laplace si dice **armonica**

Pierre-Simon Lapalce (1749-1827) dimostrò che il potenziale gravitazionale V soddisfa l'equazione differenziale:

$$\nabla^2 V = 0$$

Laplace



Dio è una ipotesi di cui non ho bisogno!

Nel 1796 **Laplace** presentò a Napoleone Bonaparte la prima edizione del suo "Trattato sul sistema del mondo", Napoleone disse: "Mi hanno riferito che in tutte queste pagine Dio non è neppure citato..... "

... per Laplace tutto avviene in maniera rigorosamente meccanicistica anche se si deve ricorrere al calcolo probabilistico perché non si hanno a disposizione strumenti adatti....

Equazione di Laplace

La prima volta in cui Laplace pubblica l'equazione che successivamente prenderà il suo nome è nella memoria *Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes* (1782) in cui essa appare in coordinate polari sferiche. In questo lavoro egli espone "una teoria dell'attrazione degli sferoidi e della forma dei pianeti più generale e più semplice di quelle note finora"

Si l'on représente par ρ la fonction $\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{-\frac{1}{2}}$;
on aura

$$V = \int \rho \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz',$$

L'intégration n'étant relative qu'aux variables x', y', z' , il est clair que l'on aura

$$\left(\frac{ddV}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddV}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddV}{dz^2}\right) = \int \rho \cdot dx' \cdot dy' \cdot dz' \cdot \left\{ \left(\frac{dd\rho}{dx^2}\right) + \left(\frac{dd\rho}{dy^2}\right) + \left(\frac{dd\rho}{dz^2}\right) \right\};$$

Mais

mais on a

$$0 = \left(\frac{dd\rho}{dx^2}\right) + \left(\frac{dd\rho}{dy^2}\right) + \left(\frac{dd\rho}{dz^2}\right);$$

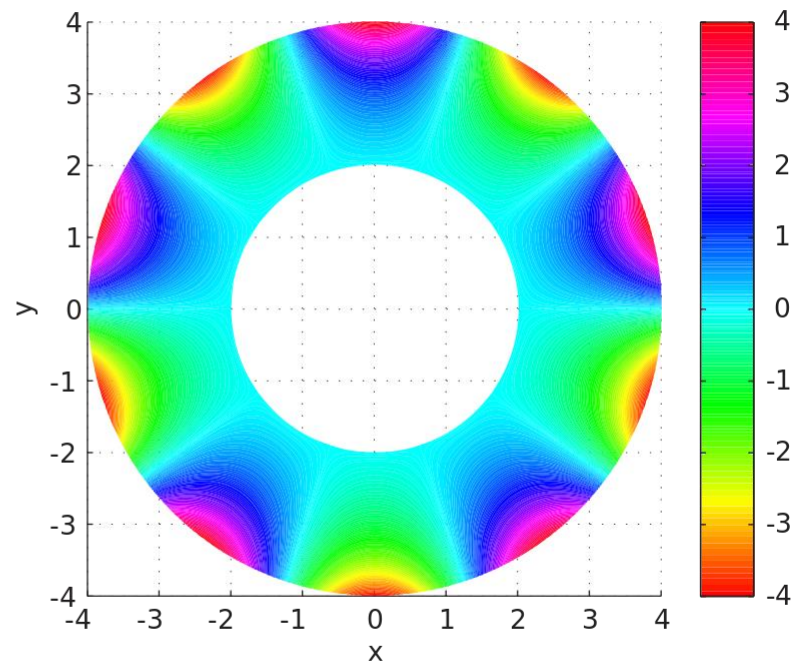
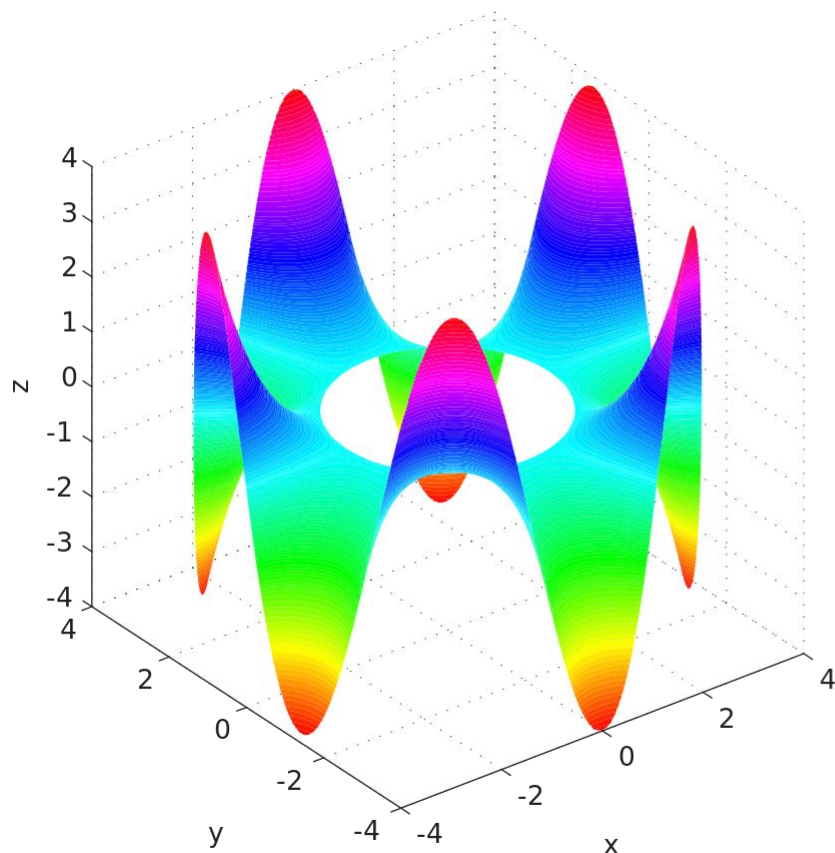
on aura donc pareillement

$$0 = \left(\frac{ddV}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddV}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddV}{dz^2}\right); \quad (A)$$

Il passo del *Traité de Mécanique céleste* in cui viene formalizzata l'equazione di Laplace (1799, II, pp. 136-137).

Equazione di Laplace

Esempio di funzione armonica



Funzioni armoniche... una semplice introduzione
<https://www.youtube.com/watch?v=JQSC0lCPG24>

Laplace ... Poisson

Nota storica.

La svista di Laplace: egli assume erroneamente che il potenziale gravitazionale all'interno di uno sferoide verifichi la stessa equazione che soddisfa nel vuoto. In altre parole supponeva che anche all'interno di uno sferoide dovesse valere la condizione:

$$\nabla^2 V = 0$$

Sarà Poisson, allievo di Laplace, a correggere l'errore del maestro, mentre quest'ultimo era ancora in vita. Alcuni storici sostengono che Laplace, essendo molto generoso nei confronti dei propri allievi, nonostante fosse consapevole del problema, avesse lasciato a Poisson l'opportunità di correggerlo, cosa che in effetti Poisson fece nel 1813.

Sia Green sia Gauss riprenderanno successivamente nelle proprie ricerche sulla teoria del potenziale il lavoro di Poisson, nel quale si mostra che l'equazione di Laplace è un caso particolare dell'equazione, oggi detta di Poisson, equazione è una forma particolare (omogenea) della equazione di **Poisson** (allievo di Laplace) che appare in tutte le branche della fisica matematica

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho$$

Serie di Fourier

Uno dei problemi più frequenti in matematica è legato alla necessità di approssimare una funzione. Uno degli strumenti più utilizzati a tal proposito è proprio lo sviluppo in serie di una funzione.

Intorno al 1800 il matematico **Joseph Fourier**, studiando a lungo la propagazione del calore, intuì che qualsiasi funzione $f(x)$ può essere sviluppata mediante una combinazione lineare di funzioni goniometriche del tipo:

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots a_n \sin nx + \dots b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots b_n \cos nx$$

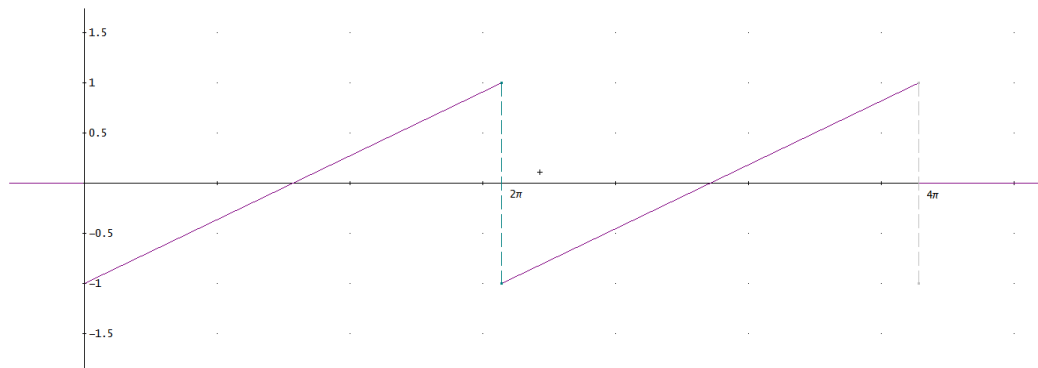
Dove a_i e b_i sono opportuni coefficienti che saranno determinati più avanti. Il suo lavoro venne poi formalizzato in maniera più rigorosa dal matematico **Ljeune Dirichelet** che esaminò scrupolosamente le funzioni periodiche, osservando che molti fenomeni fisici sono di tipo "periodico": le pulsazioni cardiache, gli impulsi elettrici, la trasmissione delle onde, le oscillazioni di un pendolo..

Serie di Fourier

In particolare, per molti tipi di onde vale oltretutto il cosiddetto principio di sovrapposizione per cui se in un determinato punto dello spazio transitano due o più onde, lo spostamento di una particella che si trova in quel punto è dato semplicemente dalla somma degli spostamenti che le onde, singolarmente, le conferiscono agendo da sole.

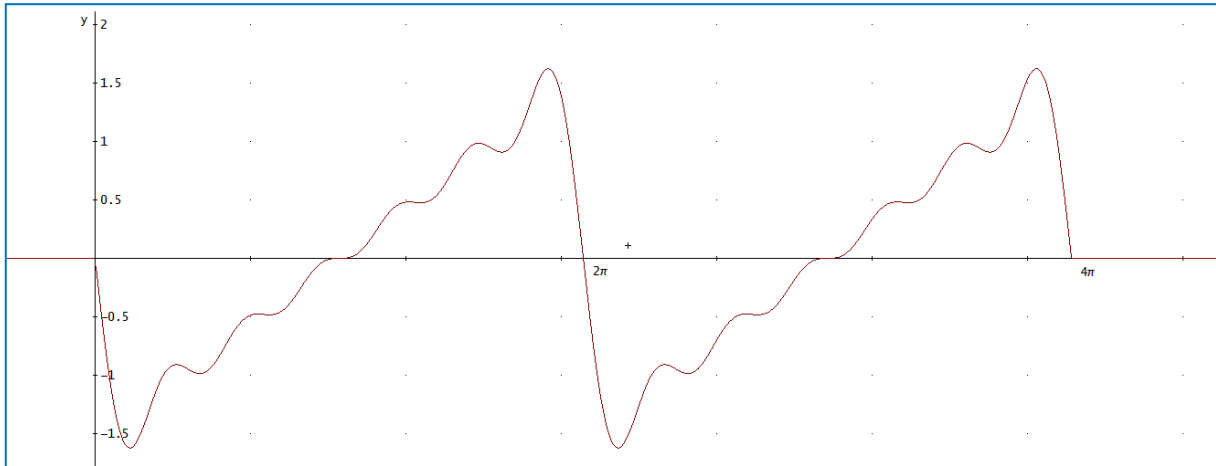
In tal modo è possibile analizzare un fenomeno ondulatorio, anche molto complesso, attraverso una combinazione di moti ondulatori più semplici.

Esempio: funzione a denti di sega

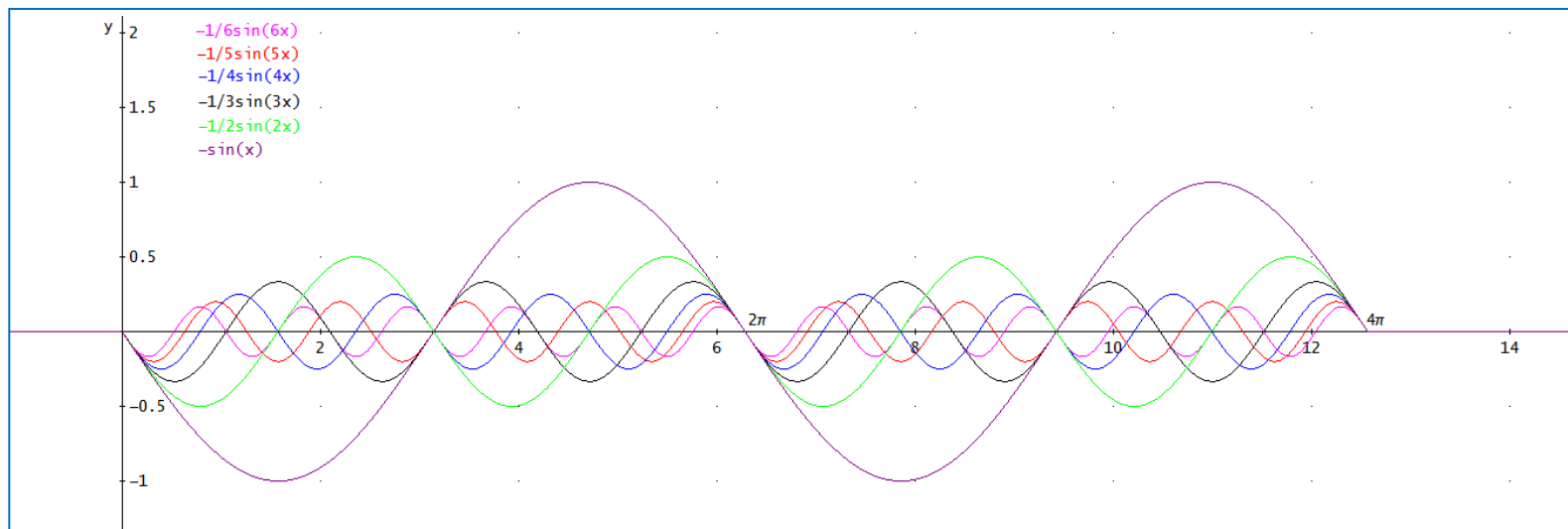


Serie di Fourier

Può essere approssimata da una curva di questo genere:



Ottenuta mediante la somma di semplici funzioni goniometriche:



Serie di Fourier

Funzioni Periodiche

Ogni funzione che soddisfa:

$$f(t) = f(t + T) \quad \text{è chiamata periodica e la costante } T \text{ è il periodo.}$$

Esempio:

$$f(t) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4}$$

$$f(t) = f(t + T) \quad \Rightarrow \quad \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4} = \cos \frac{1}{3}(t + T) + \cos \frac{1}{4}(t + T)$$

$$\cos \theta = \cos(\theta + 2m\pi)$$

$$\frac{T}{3} = 2m\pi$$

$$T = 6m\pi$$

$$\frac{T}{4} = 2n\pi$$

$$T = 8n\pi$$

$$T = 24\pi$$

Serie di Fourier

Funzioni Periodiche

Esempio:

$$f(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$$

$$f(t) = f(t+T) \quad \Rightarrow \quad \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t = \cos \omega_1 (t+T) + \cos \omega_2 (t+T)$$

$$\begin{array}{l} \omega_1 t = 2m\pi \\ \omega_2 t = 2n\pi \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow \quad \text{Deve essere un numero razionale !!}$$

Equazione di Laplace

$$\nabla^2 V = 0$$

L'equazione di **Laplace** è uno degli oggetti di studio più importanti dell'Analisi matematica, sia per le notevoli proprietà delle sue soluzioni, sia perchè compare nella modellizzazione di importanti fenomeni fisici di natura diversa.

Dal punto di vista storico, essa si colloca cronologicamente dopo l'equazione di d'**Alembert** della corda vibrante e prima dell'equazione di **Fourier** della propagazione del calore

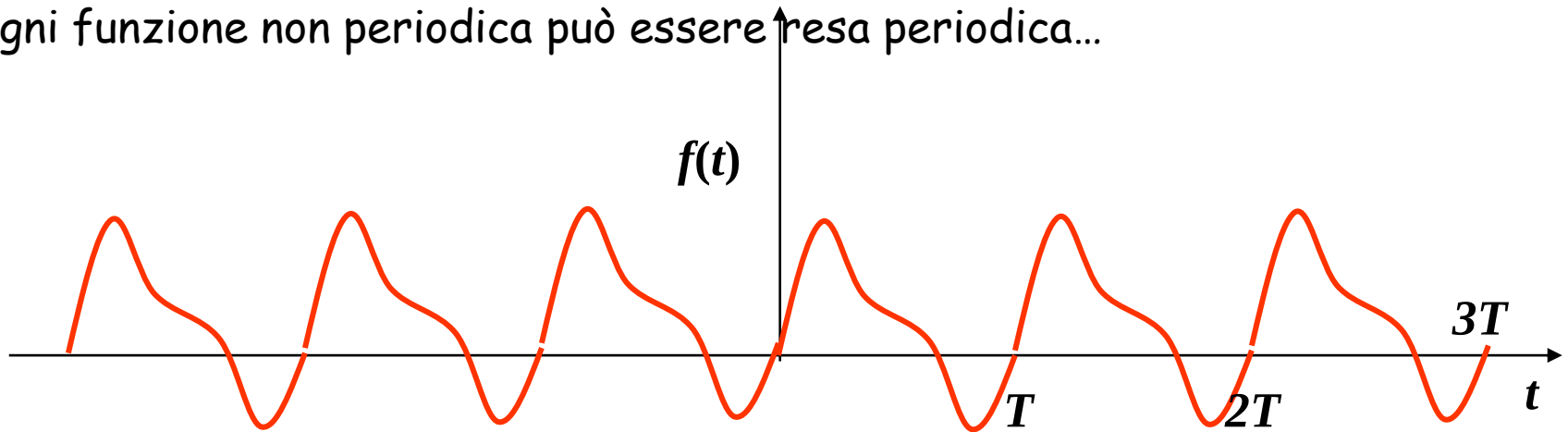
L'equazione di Laplace è soddisfatta, ad esempio:

- dal potenziale elettrostatico nei punti dello spazio privi di carica elettrica;
- dal potenziale gravitazionale nei punti dello spazio privi di materia;
- dalla temperatura di un corpo in equilibrio termico, nei punti in cui non sono presenti pozzi o sorgenti di calore;
- dall'altezza, rispetto al piano orizzontale, di una membrana elastica su cui non agiscono forze esterne, in equilibrio.

Serie di Fourier

Funzioni Periodiche

Ogni funzione non periodica può essere resa periodica...



Serie di Fourier

L'espansione in serie di una funzione $f(t)$ di periodo T è:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n t}{T}$$

“continua”

Parte pari

Parte dispari

T è il periodo del segnale

Serie di Fourier

Funzioni Ortogonali

Perchè per l'espansione in serie.... si utilizzano le funzioni sen e cos ????????

Un insieme di funzioni: $\{\varphi_n\}$ si definisce ortogonale nell' intervallo $a < t < b$ se:

$$\int_a^b \varphi_n(t) \varphi_m(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ r_n & \text{se } m = n \end{cases}$$

L' insieme delle funzioni $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$... $\sin Nx$, $\cos x$, $\cos 2x$, ... $\cos Nx$ rappresenta un insieme di funzioni ortonormaliovvero:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0, \quad \text{per qualsiasi } m \text{ e } n$$

Come conseguenza di questa proprietà si ha che qualsiasi funzione periodica $f(t)$ può essere espressa come una serie infinita di funzioni sin e cos (o in altre parole come combinazione lineare di tali funzioni)

Serie di Fourier

Coefficienti della serie di fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n t}{T}$$

sia $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ sostituendo si ottiene:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_0 n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \omega_0 n t$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n \omega_0 t dt \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n \omega_0 t dt \quad n = 1, 2, \dots$$

Serie di Fourier

Coefficienti della serie di Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_0 n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \omega_0 n t$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ viene definita come "Pulsazione angolare fondamentale"

$\omega_n = n\omega_0$ rappresenta la n-esima armonica della funzione periodica di periodo T

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \omega_n t$$

Serie di Fourier

Ampiezza e fase

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_0 n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \omega_0 n t$$

La serie può essere scritta anche come:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

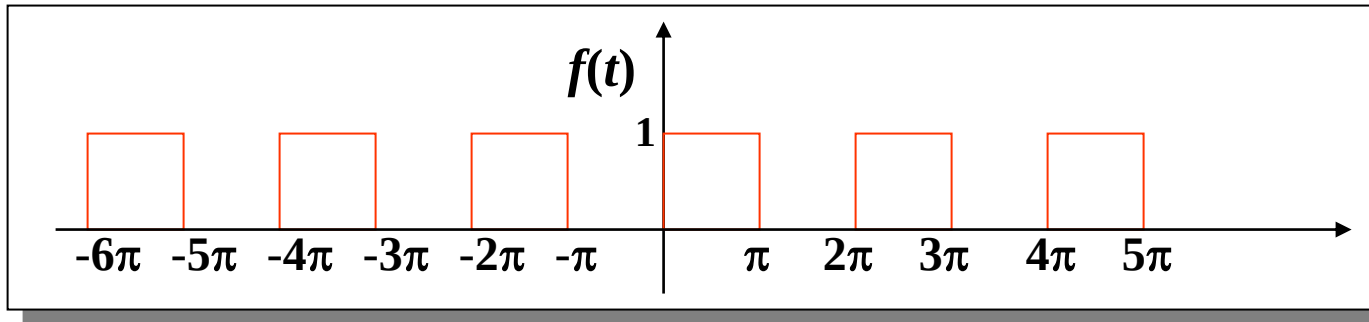
$$\frac{a_0}{2}$$

$$\varphi_n = \text{fase della } n\text{-esima armonica} = \tan^{-1} \left(\frac{b_n}{a_n} \right)$$

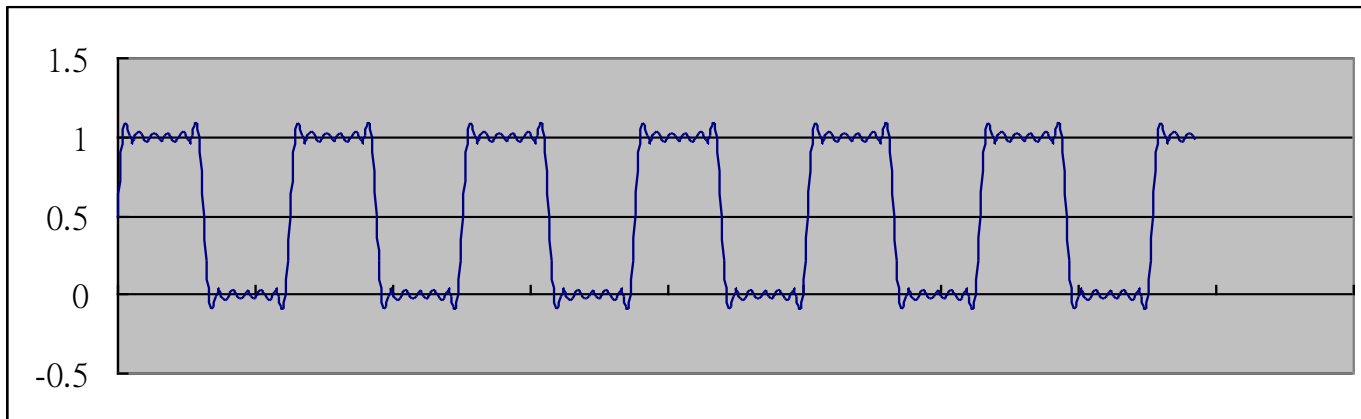
$$C_n = \text{ampiezza della } n\text{-esima armonica} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Serie di Fourier

Esempio onda quadra:

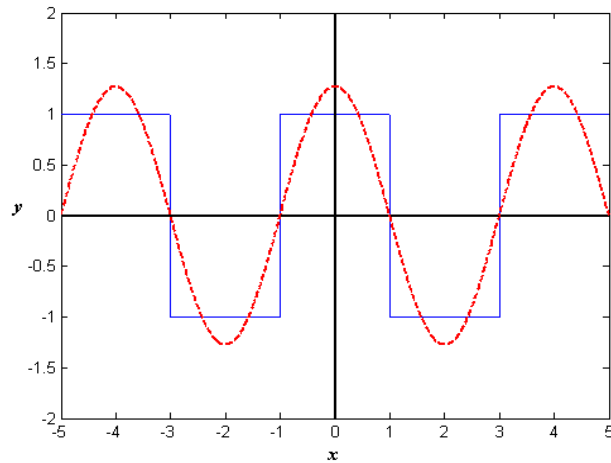


$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right)$$

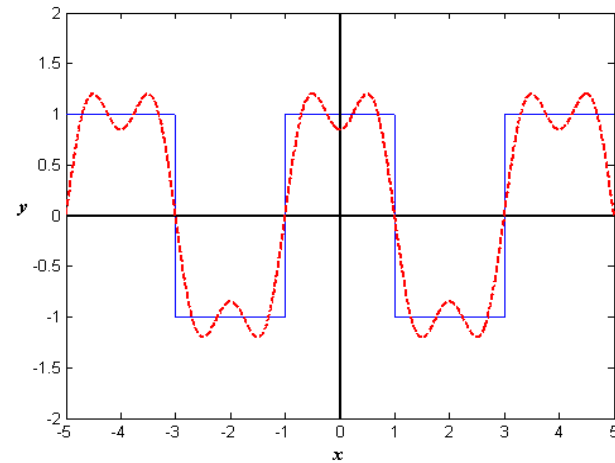


Serie di Fourier

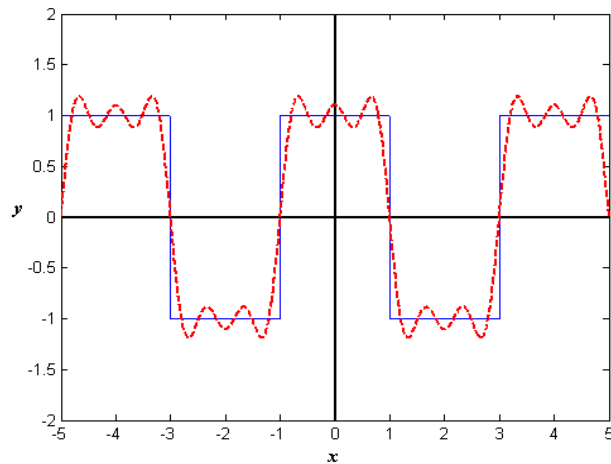
Esempio onda quadra:



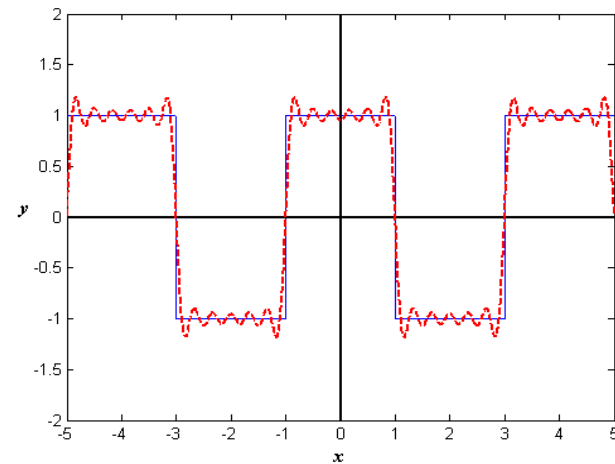
$N = 1$



$N = 3$



$N = 5$



$N = 11$

Serie di Fourier...

Fourier fu ossessionato dalla fisica del calore sviluppando la Serie di Fourier e la sua trasformata per modellizzare i problemi connessi con il flusso di calore.



".....The series formed of sines or cosines of multiple arcs are therefore adapted to represent, between definite limits, all possible functions.. "

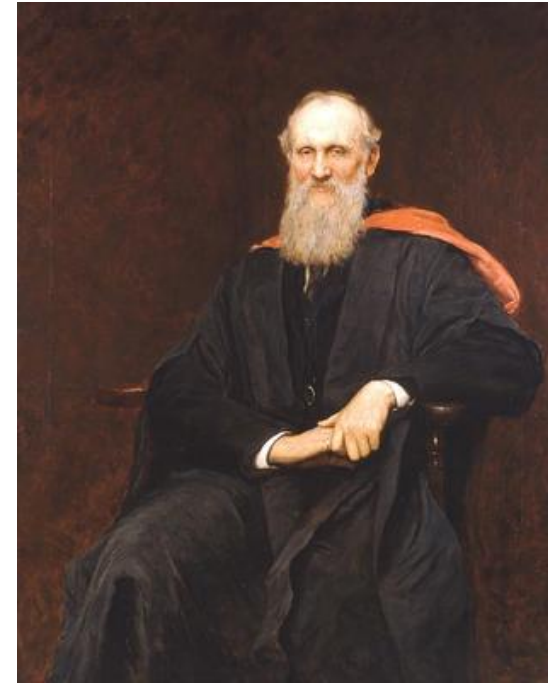
$$\phi(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \dots + a_i \sin ix + \text{etc.},$$

*L'étude profonde de la nature
est la source la plus féconde de
découvertes mathématiques.*

—Jean-Baptiste Joseph Fourier
(1768–1830)

Serie di Fourier...

Il teorema di Fourier non è solo uno dei risultati più belli dell'analisi moderna, ma fornisce uno strumento indispensabile nel trattamento di quasi tutte le domande recondite della fisica moderna (Lord Kelvin).



- https://www.youtube.com/watch?v=kP02nBNtjrU&list=RDCMU CFk__1iexL3T5gvGcMpeHNA&start_radio=1&rv=kP02nBNtjrU&t=
- <https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k>