

ESERCIZI DI ANALISI 2
Anno accademico 2024/2025 – Ingegneria
Prof.ssa Rodica Toader

Integrali e parametrizzazioni

1. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z^2 \leq 1, x - 2 \leq y \leq x + 2\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi $\int_{\sigma} f$, dove $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita da

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 + 2z^2}.$$

2. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq z = \sqrt{4x^2 + y^2} \leq 2\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi $\int_{\sigma} f$, dove $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione definita da

$$f(x, y, z) = xy.$$

3. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1, -1 \leq x = -z^2\},$$

dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$. Sia inoltre

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 7x\}$$

il dominio della funzione $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(x, y, z) = \sqrt{y - 7x}.$$

Calcolare l'integrale $\int_{\sigma} g$.

4. Trovare una parametrizzazione $\sigma : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = y^2 - 1, |x - z| \leq 1, |x + z| \leq 2\}.$$

Calcolare quindi l'area di tale superficie.

5. Trovare una parametrizzazione $\sigma : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 \leq x = y^2 + z^2 \leq 9\}.$$

Calcolare quindi l'area di tale superficie.

6. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x = 1 - (y^2 + z^2)\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi l'area di tale superficie.

7. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x + 1, x^2 + 2x = 3 - y^2 - z^2\},$$

dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$. Calcolare quindi la lunghezza di tale curva.

8. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 4x^2 + 4z^2 \leq 1\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi l'area di tale superficie.

9. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2 \leq 9\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi l'area di tale superficie.

10. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = |x + y| + 1 \leq 2, |y| \leq 1\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi l'area di tale superficie.

11. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, |z| \leq 1 \right\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi il flusso $\int_{\sigma} F \cdot dS$, dove $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è il campo di vettori

$$F(x, y, z) = (2x, 2y, z).$$

12. Trovare una parametrizzazione $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dell'insieme

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\},$$

dove I è un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Calcolare quindi il flusso $\int_{\sigma} F \cdot dS$, dove $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è il campo di vettori costante

$$F(x, y, z) = (1, 1, 0).$$