22 settembre

$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\ldots\}$ numeri naturali

$(\mathbb{N} \supseteq S)$

Assioma (~~Peano~~) Se $S \subseteq \mathbb{N}$ soddisfa

1) $1 \in S$

2) $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$,

Allora $S = \mathbb{N}$.

Teorema (Dimostrazioni per induzione)

Sia $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di proposizioni. Supponiamo che le seguenti due proprietà sono soddisfatte:

1') P_1 è vero

2') P_n è vero $\Rightarrow$ P_{n+1} è vero.

Allora tutte le P_n sono vere.

Dim Utilizzeremo l'assioma di Peano

Definiamo

$$S = \{ n \in \mathbb{N} : P_n \text{ è vero} \}$$

Da 1') ricaviamo $1 \in S$ quindi 1) dell'Assioma è vero.

se $n \in S \Longleftrightarrow P_n$ è vero $\Rightarrow P_{n+1}$ è vero $\Updownarrow$ $n+1 \in S$

Abbiamo dimostrato che

$$n \in S \Rightarrow n+1 \in S$$

quindi 2) dell'Assioma è vero.

Dall'assioma $S = \mathbb{N}$, cioè P_n è vero $\forall n$. $\square$

Sommatorie

Dati i numeri $a_1, \dots, a_n$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j := a_1 + \dots + a_n$$

$$\sum_{j=1}^{1} a_j = a_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c\, a_j = c \sum_{j=1}^{n} a_j$$

$1 \leq j_0 < n$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{j_0} a_j + \sum_{j=j_0+1}^{n} a_j$$

$$\sum_{j=-27}^{31} a_j \qquad a_{-27} \dots \dots a_{31}$$

$$\sum_{j=2}^{1} a_j = 0$$

<u>Teorema</u> $\forall\, n \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{(n+1)\,n}{2} \qquad (P_n)$$

<u>Dim</u> Per induzione

s $\cancel{s}$
r r

1) P_1 è vero ✓

$$\sum_{j=1}^{1} j = 1$$

$$\left.\frac{(n+1)\,n}{2}\right|_{n=1} = \frac{(1+1)\;1}{2} = 1$$

2) Supponiamo P_n sia vera.

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n\,(n+1)}{2} \qquad P_n$$

Verifichiamo se P_{n+1} è vera

$$\sum_{j=1}^{n+1} j = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2} \qquad P_{n+1}$$

P_n vera

$$\sum_{j=1}^{n+1} j = \sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=n+1}^{n+1} j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} j + n+1 = \frac{n\,(n+1)}{2} + n+1$$

$$= (n+1)\left[\frac{n}{2} + 1\right] = (n+1)\,\frac{n+2}{2}$$

Abbiamo dimostrato $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Pertanto P_n è vera $\forall\, n$

$$\sum_{j=1}^{10} j = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

$$= \overbrace{(1+10)}^{11} + \overbrace{(2+9)}^{11} + \overbrace{(3+8)}^{11} + \overbrace{(4+7)}^{11}$$

$$+ \overbrace{(5+6)}^{11} = 5 \cdot 11 = \frac{10 \cdot 11}{2}$$

$$n = 10$$