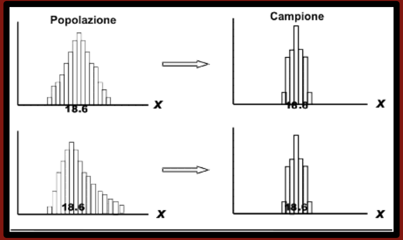
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

# Corso di misure meccaniche, termiche e collaudi

*Prof. Lucia Parussini*
*Prof. Ronelly De Souza*
*Prof. Rodolfo Taccani*




*a.a.2025-2026*

# Outline

- Disuguaglianza di Markov
- Disuguaglianza di Chebyshev
- Legge dei Grandi Numeri
- Teorema del Limite Centrale

# Due importanti disuguaglianze

Consideriamo una variabile casuale $X$ e indichiamo con $f(x)$ la funzione che ne descrive la densità di probabilità. Supponiamo $P(X \geq 0) = 1$.

**Disuguaglianza di Markov**

$$E(X) \geq zP(X \geq z) \qquad \forall z > 0$$

**Disuguaglianza di Chebyshev**

$$P(|X - E(X)| \geq z) \leq \frac{Var(X)}{z^2}$$

La disuguaglianza di Chebyshev è una diretta conseguenza della disuguaglianza di Markov e ha senso solo per le densità di probabilità per cui la varianza esiste.

# Due importanti disuguaglianze

## Disuguaglianza di Markov

Se $X$ è discreta: indichiamo con k l'indice per cui $x_{k-1} < z$ e $x_k \geq z$, allora

$$E(X) = \sum_{i} x_i f(x_i) = \sum_{i<k} x_i f(x_i) + \sum_{i\geq k} x_i f(x_i)$$

$$E(X) \geq \sum_{i\geq k} x_i f(x_i) \geq \sum_{i\geq k} z f(x_i) = z \sum_{i\geq k} f(x_i) = zP(X \geq z)$$

Se $X$ è continua:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{z} xf(x)dx + \int_{z}^{+\infty} xf(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{z} xf(x)dx + \int_{z}^{+\infty} xf(x)dx \geq \int_{z}^{+\infty} xf(x)dx \geq \int_{z}^{+\infty} zf(x)dx = z\int_{z}^{+\infty} f(x)dx = zP(X \geq z)$$

# Due importanti disuguaglianze

## Disuguaglianza di Chebyshev

Sia, dunque, $X$ una variabile casuale qualunque la cui densità di probabilità ha **varianza finita**. Consideriamo allora la variabile casuale

$$Y = [X - E(X)]^2$$

$Y$ è una variabile casuale non negativa, quindi soddisfa l'ipotesi alla base della disuguaglianza di Markov: $P(Y \geq 0) = 1$, di conseguenza

$$P(Y \geq z^2) \leq \frac{E(Y)}{z^2}$$

Poichè

$$E(Y) = E\{[X - E(X)]^2\} = Var(X)$$

possiamo anche scrivere che, per ogni numero reale $z > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq z) \leq \frac{Var(X)}{z^2}$$

# Probabilità che i dati sperimentali differiscano dal valor medio per più di una fissata quantità

Dalla disuguaglianza di Chebyshev segue immediatamente che

$$P(|X-\mu| \geq n\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{n^2\sigma^2} = \frac{1}{n^2}$$

La probabilità che una misura differisca dal valore atteso per più di

- ❑ $\sigma$ è certamente minore o uguale al 100%
- ❑ $2\sigma$ è certamente minore o uguale al 25%
- ❑ $3\sigma$ è certamente minore o uguale al 11%

# Probabilità che i dati sperimentali differiscano dal valor medio per più di una fissata quantità

Se la densità della variabile casuale è normale, la probabilità che una misura cada in un intervallo di semiampiezza

- $2\sigma$ intorno alla media è pari a $\phi_g(2) - \phi_g(-2)$ = 0.9773 – (1 – 0.9773) = 0.9546
- $3\sigma$ intorno alla media è pari a $\phi_g(3) - \phi_g(-3)$ = 0.9987 – (1 – 0.9987) = 0.9974

Questo significa che la probabilità che una misura differisca dal valore atteso per più di

- $2\sigma$ è certamente minore o uguale al 4.5%
- $3\sigma$ è certamente minore o uguale al 0.3%

La disuguaglianza di Chebyshev fornisce dunque una valutazione per eccesso di tali probabilità, la sua utilità sta nella sua grande generalità.

# Valore atteso e varianza della media di una serie di osservazioni

Consideriamo $n$ variabili casuali indipendenti $X_1, \dots, X_n$ tutte provenienti dalla stessa distribuzione teorica con media $\mu$ e varianza $\sigma^2$.

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E(\bar{X}_n) = \mu$$

$$Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

# Valore atteso e varianza della media di una serie di osservazioni

Ricordiamo che

$$E(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + \cdots + a_nE(X_n)$$
$$Var(aX) = a^2Var(X)$$

quindi

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}[E(X_1) + \cdots + E(X_n)] = \frac{1}{n}n\mu = \mu$$
$$Var(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

La variabile casuale $\bar{X}_n$ è caratterizzata da una densità di probabilità diversa da quella di cui le singole variabili casuali $X_1, \dots, X_n$ costituiscono un campione casuale.

# Valore atteso e varianza della media di una serie di osservazioni

*Numero minimo di osservazioni*

Osserviamo che, applicando la disuguaglianza di Chebyshev alla variabile casuale rappresentata dalla media del campione, $\bar{X}_n$, troviamo che, per ogni numero reale $z$ maggiore di zero,

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq z) \leq \frac{\sigma^2}{nz^2}$$

Esempio: Sia $\sigma = 3$, espressa nell'unità di misura della grandezza che stiamo osservando; desideriamo che sia minore o uguale all'1 per cento la probabilità che la media aritmetica delle misure si discosti dal valore atteso per più di un'unità

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq 1) \leq \frac{9}{n} \leq 0.01$$

$$n \geq 900$$

*Se conoscessimo la particolare densità di probabilità che caratterizza le nostre misure, scopriremmo che 900 è una valutazione per eccesso e che, per ottenere il risultato desiderato, è sufficiente un valore più piccolo di n.*

# Legge dei Grandi Numeri

Supponiamo che $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sia un campione casuale proveniente da una densità di probabilità con media $\mu$ e varianza finita $\sigma^2$.

Consideriamo la variabile casuale $\bar{X}_n$ che rappresenta la media aritmetica del campione casuale:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

La Legge dei Grandi Numeri asserisce che

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu \quad \text{per } n \to \infty$$

# Legge dei Grandi Numeri

Dimostrazione:

Per ogni $n$ finito,

$$E(\bar{X}_n) = \mu \quad \text{e} \quad Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Applicando la disuguaglianza di Chebyshev:

$$P(|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

$$P(|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon) = 1 \quad \text{equivalente a} \quad \bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu \quad \text{per } n \to \infty.$$

# Teorema del Limite Centrale

Consideriamo un insieme di variabili casuali $X_1, \ldots X_n$, indipendenti ed identicamente distribuite, quindi provenienti dalla medesima densità di probabilità con valore atteso $\mu$ e varianza finita $\sigma^2$.

Allora

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{(\bar{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} \leq t\right] = \phi_g(t) \qquad \forall t \in \Re$$

con

$$\phi_g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du = P(X \leq t)$$

densità di probabilità gaussiana dove

$$X = \frac{(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$$

# Teorema del Limite Centrale

Nessuna ipotesi relativa alla natura della densità di probabilità da cui proviene il campione casuale: può essere qualunque (sia continua che discreta).

Unico vincolo: la densità di probabilità da cui proviene il campione casuale ha varianza finita.

Se un campione casuale proviene da una qualunque distribuzione, non necessariamente nota, la densità di probabilità della media aritmetica $\bar{X}_n$ approssimerà sempre meglio (al crescere di n) una densità di probabilità gaussiana con media $\mu$ e varianza $\sigma^2/n$.

Soglia di applicabilità: $n \geq 30$

# Teorema del Limite Centrale

La media del campione sarà la media dell'intera popolazione. Se si calcola la media di più campioni della popolazione, si sommano e si trova la loro media, il risultato sarà la stima della media della popolazione.

Da un punto di vista statistico, la deviazione standard di un set di dati è una misura della grandezza delle deviazioni tra i valori delle osservazioni contenute.

Se si calcola la deviazione standard di tutti i campioni nella popolazione, li si somma e si trova la media, il risultato sarà la deviazione standard dell'intera popolazione.

# Teorema del Limite Centrale

Esempio:
Si vuole stimare la vita media di un modello di cuscinetto. A questo scopo si seleziona un campione casuale composto da n = 100 cuscinetti avente media $\bar{x}$= 5.7 anni e deviazione standard $\bar{s}$ = 0.8 anni. Trovare intervalli di confidenza per la durata media $\mu$ al 95% ed al 99%.

Poiché il campione è composto da n = 100 > 30 individui, possiamo applicare il teorema del limite centrale.
Nel 95% dei casi la media $\mu$ appartiene all'intervallo $\bar{x}$−1.96 $\bar{s}/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x}$ +1.96 $\bar{s}/\sqrt{n}$.
Nel 99% dei casi la media $\mu$ appartiene all'intervallo $\bar{x}$−2.58 $\bar{s}/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x}$ +2.58 $\bar{s}/\sqrt{n}$.
Inserendo i dati, concludiamo che 5.54 $\leq \mu \leq$ 5.86 con un grado di fiducia pari al 95% e 5.49 $\leq \mu \leq$ 5.91 con un grado di fiducia pari al 99%.

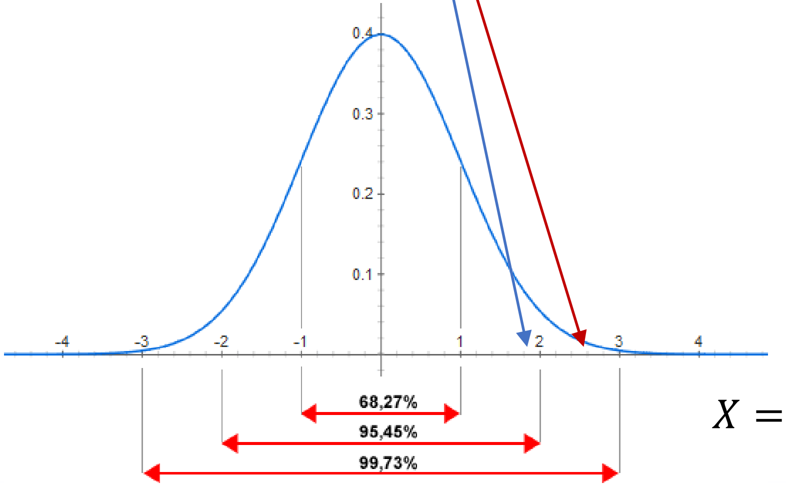
# Teorema del Limite Centrale

Esempio:

$\bar{x}-1.96\ \bar{s}/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + 1.96\ \bar{s}/\sqrt{n}$ con un grado di fiducia pari al 95%

$\bar{x}-2.58\ \bar{s}/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + 2.58\ \bar{s}/\sqrt{n}$ con un grado di fiducia pari al 99%

Funzione di densità di probabilità gaussiana standard N(0,1)




$$X = \frac{(\bar{x}-\mu)}{\bar{s}/\sqrt{n}}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dipartimento di
Ingegneria
e Architettura