Lezione 2 (23/9/2025)

tabelle di verità di una certa proposizione composta

es. $\neg(p \vee \neg q)$

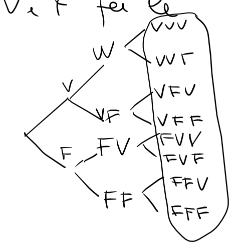
p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg(p \vee \neg q)$
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

1) quante sono le prop. elementari presenti

sono p e q (2)

2) Nelle righe della tabella devo comporre tutte le possibili combinazioni di V e F per le prop. elementari

p	q	r	...
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	



Insiemi

nozione intuitiva di famiglia / aggregato / gruppo di elementi con una qualche caratteristica

A, B, C insiemi

sono caratterizzati dagli elementi

a, b, c elementi

"appartiene"

Prop. fond. $a \in A$

significa "a è elemento di A"

Prop. fond.

due insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi

cioè

$A = B$ significa
$$\boxed{\begin{array}{l}(\forall a, \quad a \in A \Rightarrow a \in B) \\ \qquad\qquad \wedge \\ (\forall b, \quad b \in B \Rightarrow b \in A)\end{array}}$$

o equivalentemente

$$\boxed{\forall a, \quad a \in A \Leftrightarrow a \in B}$$

prop. fond.

se tutti gli elementi di A sono elementi di B diremo che A è sottoinsieme di B, $A \subseteq B$

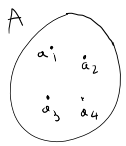
prop. fond.

se tutti gli elementi di A sono elementi di B diremo che A è sottoinsieme di B, $A \subseteq B$

quindi

$$\boxed{A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A}$$

- diagrammi di Venn



- Problema: come fare a rappresentare un insieme.

1° modo: dire chi sono i suoi elementi esplicitamente

es. $A = \{1, 3, 5\}$ graffe virgole

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ = {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}

2° modo prendere un insieme ambiente (che diciamo che esiste per assioma) e prendiamo un suo sottoinsieme fatto di elementi che soddisfano una certa proprietà (è un predicato a una variabile)

$$A = \underbrace{\{x \in U : \mathcal{P}(x)\}}$$

l'insieme degli elementi di U (ambiente) che soddisfano la proprietà $\mathcal{P}(x)$

es. $U = \mathbb{N} = \{\text{numeri naturali}\} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$

$\mathbb{P} = \{\text{numeri pari}\}$

$= \{2 \cdot n : n \in \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k\}$

def. Dato A insieme, posso considerare l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A

lo indico con $\mathcal{P}(A) = \{\text{sottoinsiemi di } A\}$
insieme delle parti.

def. è conveniente dire che esiste un insieme che non ha elementi, che diciamo insieme vuoto $\emptyset$

es. $A = \{1, 3, 5\}$ consideriamo $\mathcal{P}(A)$ $\cancel{\{3, 1\}}$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}\}$

$\{1,3\} = \{3,1\}$!

$$\left.\begin{array}{l} 1 \in \{3,1\} \\ 3 \in \{3,1\} \end{array}\right\} \Rightarrow \{1,3\} \subseteq \{3,1\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3 \in \{1,3\} \\ 1 \in \{1,3\} \end{array}\right\} \Rightarrow \{3,1\} \subseteq \{1,3\}$$

es. $|A| = 3$ (A ha 3 elementi)

$\Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 8$

e se $|A| = 10 \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^{10} = \underline{\underline{1024}}$

oss. Voglio contare gli elementi di $\mathcal{P}(A)$ a partire dal numero degli elementi di A

supponiamo A abbia n elementi

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n\}$

per individuare un sottoinsieme in modo univoco

basta rispondere a <u>n domande</u> $<$ sì / no

intendendo <u>sì</u> se l'elemento c'è
<u>no</u> se non c'è

es. $B = \{a_1, a_3, a_5\}$

è individuato da sì, no, sì, no, sì, no, no, no... no

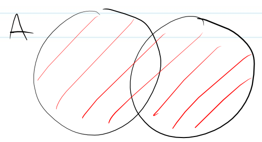
i sottoinsiemi sono tanti quanti le stringhe

$\underbrace{\boxed{\text{sì} \mid \text{no} \mid \text{sì} \mid \dots \mid \dots \mid \quad \mid \quad \mid}}_{n \text{ caselle}}$ $\qquad$ $\boxed{1 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \mid 0 \, 0}$

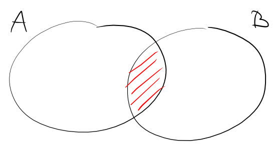
le stringhe sono 2^n

- Operazioni con gli insiemi.

unione $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$



intersezione $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

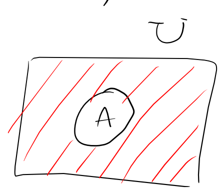


$\boxed{\overline{A}^{U},\ \overline{A}}$

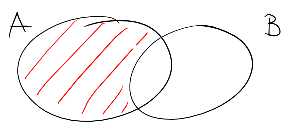
complementare (rispetto a un insieme ambiente)

$\mathcal{C}_U A = \{x \in U : x \notin A\}$

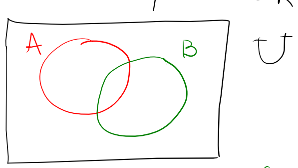
↑ c calligrafica



differenza $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$



es. supponiamo $A, B \subseteq U$ ← ambiente

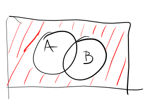


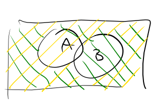
Leggi di De Morgan

$\mathcal{C}_U(A \cup B) = (\mathcal{C}_U A) \cap (\mathcal{C}_U B)$

$\mathcal{C}_U(A \cap B) = (\mathcal{C}_U A) \cup (\mathcal{C}_U B)$

$\mathcal{C}_U(A \cup B)$





$\mathcal{C}_U A$

$\mathcal{C}_U B$

- Coppie ordinate, prodotto cartesiano

consideriamo A, B insiemi

consideriamo una coppia ordinata di elementi di cui il primo sta in A e il secondo sta in B

$(a, b) \quad a \in A,\ b \in B$

attenzione $(a, b) \neq \{a, b\}$

↑ coppia ordinata ↑ insieme con a e b come elementi.

$(a, b) \neq (b, a)$ mentre $\{a, b\} = \{b, a\}$

in particolare $(a, b) = (a', b') \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

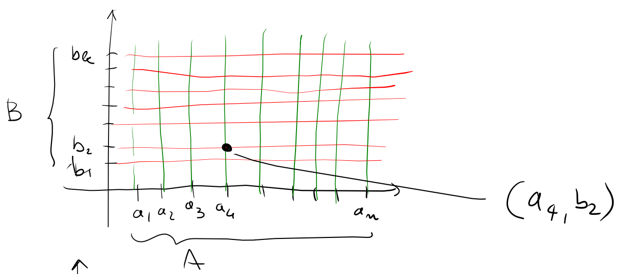
def. A, B insiemi $(A, B \neq \emptyset)$

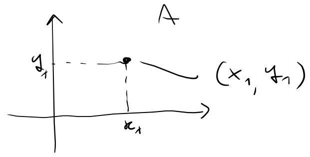
$$A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$$

↑ Prodotto cartesiano

coppie ordinate con primo el. in A e secondo in B

come lo rappresento.





oss. il prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme in cui ha senso considerare i predicati a due variabili di cui la prima varia in A e la seconda in B.

def. siano A, B insiemi, sia $R(x,y)$ un predicato con $x \in A$, $y \in B$

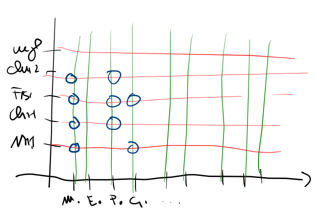
questo $R(x,y)$ lo diciamo <u>Relazione</u> tra A e B.

i punti di $A \times B$ in cui è vera la relazione costituiscono il grafico della relazione.

<u>esempio</u> $A = \{$studenti di chimica 1° anno$\}$

$B = \{$Mat1, chim in, Fisica, chim org, ingl$\}$

$R(x,y)$ lo studente x ha fatto l'esame y entro agosto 2026



def. nel caso in cui $A = B$, una relazione tra A e B la diciamo <u>relazione su A</u>

<u>ES.</u> $A = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

"$\geq$" è una relazione su $\mathbb{N}$

$\boxed{3 \geq 1 \text{ vera}}$

$3 \geq 5$ falso

no