23 settembre

$r = r$

Teor Sia $r \neq 1$. Allora

$$(P_n) \quad \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \qquad (\text{qui } r^0 = 1) \quad 0^0 = 1$$

Dim (Per induzione)

1) $n = 0$

$$\sum_{k=0}^{0} r^k = r^0 = 1$$

$$\left.\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\right|_{n=0} = \cancel{\frac{1-r}{1-r}} = 1$$

2) $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

supponiamo che sia vero

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

e dimostriamo

$$\sum_{k=0}^{n+1} r^k = \frac{1-r^{n+2}}{1-r}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} r^k = \sum_{k=0}^{n} r^k + \sum_{k=n+1}^{n+1} r^k =$$

$$= \frac{1-r^{n+1}}{1-r} + r^{n+1}$$

$$= \frac{1-r^{n+1} + r^{n+1}(1-r)}{1-r} =$$

$$= \frac{1-r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1-r}$$

$\square$

Osservazione

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \qquad (1-r)$$

$$(1-r)\sum_{k=0}^{n} r^k = 1-r^{n+1} \quad ✓$$

$$(1-r)\sum_{k=0}^{n} r^k = (1-r)(1+r+r^2+\dots+r^{n-1}+r^n)$$

$$= (1-\cancel{r}) + (\cancel{r}-\cancel{r^2}) + (\cancel{r^2}-\cancel{r^3}) + \dots + (\cancel{r^{n-1}}-\cancel{r^n}) + (\cancel{r^n}-r^{n+1})$$

$= 1 - r^{n+1}$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1}-a_k) = a_{n+1} - a_1$$

$a_1, \dots, a_{n+1}$

Teor (Disuguaglianza di Bernoulli)

Per ogni $a \geq -1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$(1+a)^n \geq 1 + n a \qquad (P_n)$$

Dim

1) $n = 1$

$$(1+a)^1 = 1 + a$$
$$1 + 1 \cdot a = 1 + a$$

2) $n \Rightarrow n+1$

si parte da $(1+a)^n \geq 1 + n a$ e si vuole $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1) a$

$$P_n \quad (1+a)^n \geq 1 + n a \qquad \cdot \underbrace{(1+a)}_{\geq 0}$$

$$(1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+na)$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + na + a + na^2$$
$$= 1 + (n+1)a + \underbrace{na^2}_{\geq 0}$$
$$\geq 1 + (n+1)a$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a \qquad P_{n+1}$$

∎

$$A \geq C$$

$$A \geq B \geq C \Rightarrow A \geq C$$

Numeri fattoriali

$n!$ $\qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$0! = 1$

$1! = 1$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$

Cercate la formula di Stirling

Coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$

$n \geq k \geq 0$

$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$

$\binom{n}{n-1} = n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =$$

$\cancel{(n-k)!}$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)\dots 1}{k!\,\cancel{(n-k)!}}$$

$$= \frac{n \dots (n-(k-1))}{k!}$$

__Teorema__ (Formula del binomio Newton)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$(a+b)^4$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$

$= \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} ab^3 + \binom{4}{4} b^4$

$6 = 3 + 3$

$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}$

Verifichiamo

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \overset{?}{=} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}$$

$$= (n-1)! \left[\frac{1}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{1}{k!\,(n-1-k)!} \right]$$

$$= (n-1)! \left[\frac{1}{(k-1)!\,(n-1-k)!\,(n-k)} + \frac{}{(k-1)!\,k\,(n-1-k)!} \right]$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k)!} \left[\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right]$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-k)!} \, \frac{\cancel{k} + n - \cancel{k}}{(n-k)\,k}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$\mathbb{R}$

Def (Classi separate) Dati $\underset{\neq \emptyset}{A} \subseteq \mathbb{R}$ e $\underset{\neq \emptyset}{B} \subseteq \mathbb{R}$

diciamo che la coppia A e B è una coppia separata se

$$a \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

Un numero $c \in \mathbb{R}$ si dice un elemento di separazione per la coppia se

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B.$$

Assioma (Completezza)
Data una coppia separata A e B in $\mathbb{R}$

$\exists\ c \in \mathbb{R}$ elemento di separazione.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : \; n \in \mathbb{Z} \;\text{ e }\; m \in \mathbb{Z} \;\; m \neq 0 \right\}$$

$$\mathbb{Z} = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots \}$$

$\mathbb{Q}$ non soddisfa l'assioma di separazione.

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ $X \neq \emptyset$.
Diciamo che X è illimitato superiormente e scriviamo $\sup X = +\infty$
se $\forall\ a \in \mathbb{R}$ $\exists\ x \in X$ t.c.

$$x > a.$$

Se X non è illimitato superiormente diciamo che è limitato superiormente