Relazioni e Funzioni: una breve introduzione

Fabio Vlacci

September 23, 2025

Introduzione

- Le relazioni collegano elementi di due insiemi.
- Le funzioni sono particolari relazioni, con condizioni più rigide rispetto a quelle di relazioni.
- Questi concetti sono di base in Matematica, Logica e Informatica.

Prodotto Cartesiano

Dati due insiemi A e B, il loro prodotto cartesiano è:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Prodotto Cartesiano

Dati due insiemi A e B, il loro prodotto cartesiano è:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ \ b \in B\}$$

Esempio:

$$A = \{a, a'\},\ B = \{b, b'\} \Rightarrow A \times B = \{(a, b), (a, b'), (a', b), (a', b')\}$$

Remark

$$A \times B \neq B \times A$$

Proprietà del Prodotto Cartesiano

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (associativa)
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ (distributiva)
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ (distributiva)
- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

Relazioni tra Insiemi

Una relazione (binaria) tra A a B è un sottoinsieme del prodotto cartesiano:

$$R \subseteq A \times B$$

Se $(a, b) \in R$, scriviamo: $a \; R \; b$ oppure $a \sim_R b$.

Relazioni tra Insiemi

Una relazione (binaria) tra A a B è un sottoinsieme del prodotto cartesiano:

$$R \subseteq A \times B$$

Se $(a, b) \in R$, scriviamo: $a\ R\ b$ oppure $a \sim_R b$.

Esempio

$A = \{a, a'\},\ B = \{b, b'\},\ R = \{(a, b'), (a', b')\}$

Rappresentazioni delle Relazioni

Le relazioni possono essere rappresentate con:

- Elenchi di coppie ordinate
- Diagrammi con frecce
- Tabelle o matrici
- Grafici cartesiani (se numeriche)

Tipi di Relazioni (su un insieme)

Una relazione $R \subseteq A \times A$ può essere:

- **Riflessiva:** $(x, x) \in R$ per ogni $x \in A$
- **Simmetrica:** $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
- **Antisimmetrica:** $(x, y), (y, x) \in R \Rightarrow x = y$
- **Transitiva:** $(x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

Tipi di Relazioni (su un insieme)

Una relazione $R \subseteq A \times A$ può essere:

- **Riflessiva:** $(x, x) \in R$ per ogni $x \in A$
- **Simmetrica:** $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
- **Antisimmetrica:** $(x, y), (y, x) \in R \Rightarrow x = y$
- **Transitiva:** $(x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

Qualora una relazione risulti riflesssiva, simmetrica e transitiva si dice che tale relazione è una relazione *di equivalenza* in A.

Tipi di Relazioni (su un insieme)

Una relazione $R \subseteq A \times A$ può essere:

- **Riflessiva:** $(x, x) \in R$ per ogni $x \in A$
- **Simmetrica:** $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
- **Antisimmetrica:** $(x, y), (y, x) \in R \Rightarrow x = y$
- **Transitiva:** $(x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

Qualora una relazione risulti riflesssiva, simmetrica e transitiva si dice che tale relazione è una relazione *di equivalenza* in A.

Qualora una relazione risulti riflesssiva, antisimmetrica e transitiva si dice che tale relazione è una relazione *di ordine parziale* in A.

Classi di equivalenza

Sia $R \subseteq A \times A$ una relazione di equivalenza in A,
Un sottoinsieme di A che contiene tutti e soli gli elementi equivalenti a un qualche elemento $a \in A$ prende il nome di *classe di equivalenza* di a per la relazione R. Spesso si indica tale classe di equivalenza con $[a]_R$ o con $[a]_{\sim_R}$. In una classe di equivalenza tutti gli elementi in essa contenuti sono tra loro equivalenti.

Classi di equivalenza

Sia $R \subseteq A \times A$ una relazione di equivalenza in A,
Un sottoinsieme di A che contiene tutti e soli gli elementi equivalenti a un qualche elemento $a \in A$ prende il nome di *classe di equivalenza* di a per la relazione R. Spesso si indica tale classe di equivalenza con $[a]_R$ o con $[a]_{\sim_R}$. In una classe di equivalenza tutti gli elementi in essa contenuti sono tra loro equivalenti.

L'insieme delle classi di equivalenza in A si chiama *insieme quoziente* di A per la relazione R, e viene talvolta indicato con l'espressione A/R o $A/\sim_R$.

Classi di equivalenza

Sia $R \subseteq A \times A$ una relazione di equivalenza in A,
Un sottoinsieme di A che contiene tutti e soli gli elementi equivalenti a un qualche elemento $a \in A$ prende il nome di *classe di equivalenza* di a per la relazione R. Spesso si indica tale classe di equivalenza con $[a]_R$ o con $[a]_{\sim_R}$. In una classe di equivalenza tutti gli elementi in essa contenuti sono tra loro equivalenti.

L'insieme delle classi di equivalenza in A si chiama *insieme quoziente* di A per la relazione R, e viene talvolta indicato con l'espressione A/R o $A/\sim_R$.

Si dimostra che esso rappresenta una partizione di A.

Classi di equivalenza

Sia $R \subseteq A \times A$ una relazione di equivalenza in A,
Un sottoinsieme di A che contiene tutti e soli gli elementi equivalenti a un qualche elemento $a \in A$ prende il nome di *classe di equivalenza* di a per la relazione R. Spesso si indica tale classe di equivalenza con $[a]_R$ o con $[a]_{\sim_R}$. In una classe di equivalenza tutti gli elementi in essa contenuti sono tra loro equivalenti.

L'insieme delle classi di equivalenza in A si chiama *insieme quoziente* di A per la relazione R, e viene talvolta indicato con l'espressione A/R o $A/\sim_R$.

Si dimostra che esso rappresenta una partizione di A.

Ogni $a' \in [a]_R$ è detto *rappresentante della classe di equivalenza* $[a]_R$.

Funzioni

Una funzione è una relazione R_f tra A e B che associa a ogni elemento di A uno e un solo elemento di B:

$$f : A \to B$$

$$\forall a \in A \ \exists \text{un solo } b \in B : (a, b) \in R$$

$$b := f(a) \text{ trasformato di } a \text{ tramite } f$$

Funzioni

Una funzione è una relazione R_f tra A e B che associa a ogni elemento di A uno e un solo elemento di B:

$$f : A \to B$$

$$\forall a \in A \ \exists \text{un solo } b \in B : (a, b) \in R$$

$$b := f(a) \text{ trasformato di } a \text{ tramite } f$$

Esempio:

$$A = \{a, a', a''\}, B = \{b, b'\} \quad f = \{(a, b), (a', b), (a'', b')\}$$

Dominio, Codominio e Immagine

In una funzione $f : A \to B$:

- A: **Dominio**
- B: **Codominio**
- $f(A) \subseteq B$: **Immagine**, ovvero l'insieme dei valori effettivamente ottenuti come trasformati di elementi di A tramite f

Dominio, Codominio e Immagine

In una funzione $f : A \to B$:

- A: **Dominio**
- B: **Codominio**
- $f(A) \subseteq B$: **Immagine**, ovvero l'insieme dei valori effettivamente ottenuti come trasformati di elementi di A tramite f

Tipi di Funzioni

Le funzioni possono avere proprietà specifiche:

- **Iniettiva (uno-a-uno):** immagini distinte per elementi distinti, $a \neq a' \implies f(a) \neq f(a')$
- **Suriettiva (sopra, su):** ogni elemento del codominio è il trasformato di un elemento del dominio $(f(A) = B)$ $\forall b \in B \ \exists a \in A \ : \ f(a) = b$
- **Biiettiva:** funzione sia iniettiva che suriettiva $\iff$ *corrispondenza biunivoca, funzione invertibile*

Composizione di Funzioni

Siano date due funzioni

$$f : A \to B \quad g : B \to C;$$

Composizione di Funzioni

Siano date due funzioni

$$f : A \to B \quad g : B \to C;$$

allora è definita la funzione $h : A \to C$

$$a \mapsto f(a) \in B \mapsto g(f(a)) := h(a)$$

$$h = g \circ f$$

che si dice funzione *composta* di f e g