25 settembre

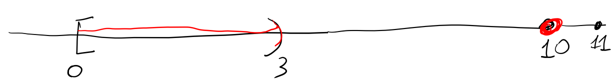
<u>Def</u> $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice illimitato superiormente se $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}\ \exists x \in X \text{ t.c. } x > a}$.

In questo caso diremo che l'estremo superiore di X è uguale a $+\infty$ e scriveremo $\sup X = +\infty$. Es. $\sup \mathbb{R} = +\infty$

<u>Def</u> $X \subseteq \mathbb{R}$ che non sia illimitato super. verrà detto limitato superiormente, cioè $\boxed{\exists a \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x \leq a \ \forall x \in X.}$ $(*)$

Vorremmo definire $\sup X$ quando X soddisfa $(*)$.

$X = [0,3) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 3\}$



$\sup [0,3) = 3$

$X = [0,3) \cup \{10\}$ $\quad \sup X = 10$

<u>Def</u> (Estremo superiore) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente. Un $S \in \mathbb{R}$ si dice estremo superiore di X se soddisfa (e scriviamo $S = \sup X$)

1) $x \leq S \ \forall x \in X$

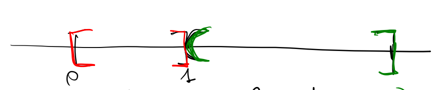
2) $x \leq M \ \forall x \in X \Rightarrow S \leq M$

<u>Def</u> Sia A e B una coppia separata in $\mathbb{R}$ cioè $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ e $a \leq b \ \forall a \in A$ e $\forall b \in B$

La coppia è detta contigua se esiste un unico elemento di separazione

Es $A = [0,1] = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$

$B = (1,3] = \{x : 1 < x \leq 3\}$



1 è l'unico elemento di separazione

Teor Sia X limitato sup. Esiste $\sup X$.

Dim Qui $X \neq \emptyset$, e inoltre è limitato superiormente

$$\boxed{\exists\, a \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \quad x \le a \quad \forall x \in X} \quad (1)$$

Sia $Y = \{ y \in \mathbb{R} : \quad x \le y \quad \forall x \in X \}$.

Y contiene il numero a della proposizione (1)

$Y \neq \emptyset$.

Dalla definizione di Y sappiamo che X e Y sono una coppia separata, con

$$x \le y \qquad \forall x \in X \text{ e } \forall y \in Y.$$

Dall'assioma di completezza sappiamo che $\exists\, c \in \mathbb{R}$ che separa X e Y, cioè

$$x \le c \le y \qquad \forall x \in X \text{ e } \forall y \in Y$$

In particolare

$x \le c \quad \forall\, x \in X$. Ossia c soddisfa la prop. 1) del sup

Ora vogliamo verificare che soddisfa la 2).

Sia $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$\boxed{x \le M \quad \forall x \in X}$. Vogliamo dimostrare che $c \le M$

Questo implica che $M \in Y \Rightarrow c \le M$

Abbiamo dimostrato la proprietà 2) del $\sup X$.

Retta reale estesa

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

$a \leq +\infty \quad \forall\, a \in \overline{\mathbb{R}}$

$-\infty \leq a \quad \forall\, a \in \overline{\mathbb{R}}$

$a + (+\infty) = +\infty \quad \forall\, a \in \overline{\mathbb{R}}$ eccetto $a = -\infty$

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$a + (-\infty) = -\infty \quad \forall\, a \in \overline{\mathbb{R}}$ eccetto $a = +\infty$

$$a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } a > 0 \\ \mp\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$+\infty \cdot 0$

$-\infty \cdot 0$ non li definiamo.

$\dfrac{1}{\pm\infty} = 0 \qquad \left(\dfrac{1}{0} \text{ non definito} \right)$

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $S \in \mathbb{R}$ $S = \sup X$. Se $S \in X$ diremo che X ha il massimo e porremo

$$\max X = S.$$

Es $\max\left([0,3) \cup \{10\} \right) = 10$

$\max [0,3)$ non esiste.

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, allora $S \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice l'estremo superiore di X se

1) $x \leq S \quad \forall x \in X$
2) $x \leq M \quad \forall x \in X \Rightarrow S \leq M$.

e scriviamo $S = \sup X$.

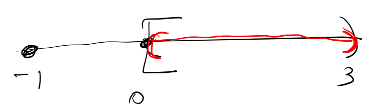
Def (Estremo inferiore) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, allora $s \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice l'estremo inferiore di X se

1) $x \geq s \quad \forall x \in X$
2) $x \geq m \quad \forall x \in X \Rightarrow s \geq m$

e scriviamo $s = \inf X$.

$\inf [0,3) = 0$

$\min [0,3) = 0$



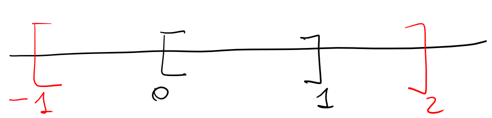
$\min (0,3) = \min \{ x : 0 < x < 3 \}$ non esiste.

Esercizio Siano $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$

Dimostrare che

$$\boxed{\inf X \leq \inf Y \leq \sup Y \leq \sup X}$$

Esempio

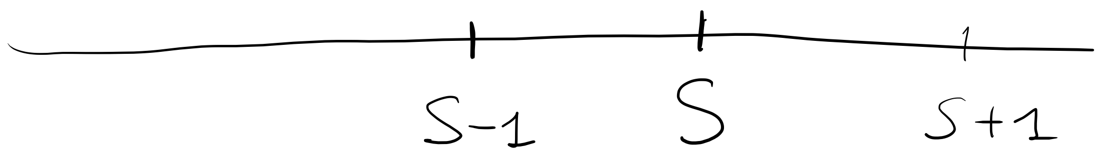


$X = [-1, 2]$, $\quad Y = [0, 1]$

$\inf X = -1 < 0 = \inf Y < 1 = \sup Y < 2 = \sup X$

Teor $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

Dim Supponiamo per assurdo che $S = \sup \mathbb{N} < +\infty$.



$\boxed{\text{Allora } \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } S-1 < n .}$ $\ast$

Infatti se ciò fosse falso allora avrei

$$n \le S-1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Siccome $S = \sup \mathbb{N}$ questo implicherebbe

$$S \le S-1 \iff 0 \le -1 \quad \text{falso.}$$

Quindi $\ast$ è vero, perciò esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$+1 \quad \boxed{S-1 < n} \le S = \sup \mathbb{N}$$

$$S < n+1 \le S \implies S < S$$

assurdo.

Deve essere $\boxed{S = +\infty}$

<u>Corollario</u> (Principio di Archimede)

Siano $x, y \in \mathbb{R}_+$. Allora $\exists\ n \in \mathbb{N}$ t.c. $y < nx$.

<u>Dim</u> $\sup \mathbb{N} = +\infty \Rightarrow \exists\ n$ t.c. $n > \frac{y}{x} \Leftrightarrow y < nx$

$\square$