Lezione 3 (25/9/2025)

rappresentanti RICCARDO.SAMARITAN@STUDENTI.UNITS.IT
GIOVANNI.CHIUSSO@STUDENTI.UNITS.IT

WELCOME DAY : AI25.IT

Relazioni su un insieme

- Sia A un insieme, ρ relazione su A

i) ρ si dice riflessiva se $\forall a \in A$, $a \rho a$

ii) ρ si dice simmetrica se $\forall a, b \in A$, $a \rho b \Rightarrow b \rho a$

iii) ρ si dice antisimmetrica se $\forall a, b \in A$, $a \rho b \wedge b \rho a \Rightarrow a = b$

iv) ρ si dice transitiva se $\forall a, b, c \in A$, $a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c$.

ES. considero A insieme e considero $\mathcal{P}(A)$

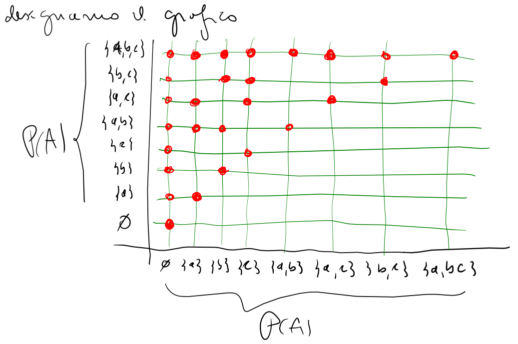
"insieme dei sottoinsiemi di A"
"insieme delle parti di A"

Su $\mathcal{P}(A)$ consideriamo la relazione $\subseteq$

$A = \{a, b, c\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

disegnamo il grafico



$\emptyset \subseteq \emptyset$

$\{a\} \not\subseteq \emptyset$ no

$\emptyset \subseteq \{a\}$ sì

$\emptyset \subseteq \{b\}$ sì

i punti rossi rappresentano le coppie di $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ che soddisfano la relazione $\subseteq$

¿ $\subseteq$ è riflessiva? sì perché $\forall B \subset \mathcal{P}(A)$, $B \subseteq B$

¿ $\subseteq$ è simmetrica? ¿è vero che per ogni coppia $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(A)$ se $B_1 \subseteq B_2$ allora $B_2 \subseteq B_1$? no NO

$\emptyset \subseteq \{a\}$ ma $\{a\} \not\subseteq \emptyset$

¿ $\subseteq$ è antisimmetrica? ¿è vero che se $B_1 \subseteq B_2 \wedge B_2 \subseteq B_1$ allora $B_1 = B_2$?

¿ $\subseteq$ è transitiva? ¿è vero che se $B_1 \subseteq B_2 \wedge B_2 \subseteq B_3$ allora $B_1 \subseteq B_3$? sì

ES. $A = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$n, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $n \mid m$ se "n divide m"

relazione

se $\exists k \in \mathbb{N}\setminus\{0\} : m = k \cdot n$

¿ 2 divide 5 ? no

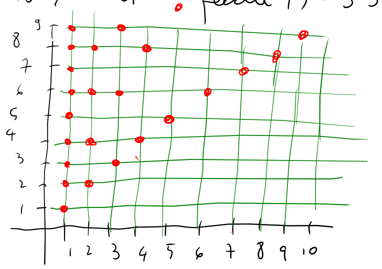
perché non c'è $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ t.c. $\boxed{5 = 2 \cdot k}$

¿ 3 divide 9 ? sì

perché $9 = 3 \cdot 3$

¿ 3 divide 15 ? sì perché $15 = 3 \cdot 5$ ← k

grafico



questa è riflessiva!

questa non è simmetrica

è transitiva? $n \mid m \wedge m \mid h \overset{?}{\Longrightarrow} n \mid h$ sì

$m = n \cdot k_1$ $\quad$ $h = m \cdot k_2$

$h = m \cdot k_2 = n \cdot (k_1 \cdot k_2)$

k_3

$h = n \cdot k_3 \Rightarrow n \mid h$

è antisimmetrica?

¿ $m \mid n \wedge n \mid m \overset{?}{\Longrightarrow} n = m$?

$n = m \cdot k_1$ $\quad$ $m = n \cdot k_2$ $\quad \Rightarrow n = \overbrace{n \cdot k_2}^{m} \cdot k_1$

$\Downarrow$

$n = n(k_1 \cdot k_2)$

$n - n(k_1 \cdot k_2) = 0$

$\Downarrow$

$n(1 - k_1 \cdot k_2) = 0$

$\Downarrow$

$1 - k_1 k_2 = 0$

$k_1 \cdot k_2 = 1$

$\Downarrow_{\mathbb{N}}$ $k_1 = k_2 = 1$

def. una relazione che sia riflessiva, antisimmetrica, transitiva si dice **relazione d'ordine** (ordinamento)

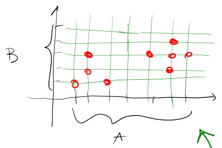
def se A insieme, ρ relazione d'ordine, ρ si dice relazione d'ordine TOTALE se $\forall a, b \in A$, $a \rho b \vee b \rho a$

ES. $\mathbb{N}$ con $\leq$

è una relazione d'ordine Totale

Funzioni

def siano A, B insiemi
sia R tra A e B
relazione

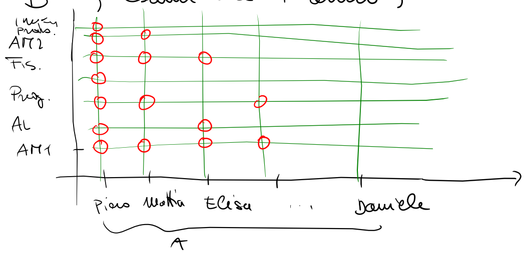


la chiamo funzione
se per ogni elemento a di A
esiste un unico elemento b di B
tale che $R(a,b)$

questo significa
"su ciascuna delle linee verticali
(che partono dagli elementi di A)
ci deve essere una unica pallina rossa"

Es. $A = \{$ studenti 1° anno di IADA $\}$

$B = \{$ esami del 1° anno $\}$



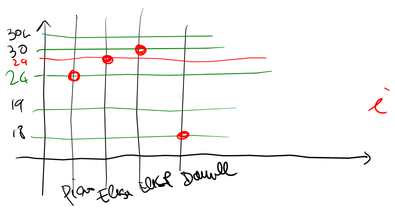
alla data del 10 agosto 2026
x ha fatto l'esame y

questa è una funzione?

Es $A = \{$ studenti di IADA che hanno fatto A.M.1 entro il 10 agosto 2026 $\}$

$B = \{ 18, 19, \dots, 30, 30L \}$

il voto di x è y



è una funzione?
sì

definizione equivalente (di funzione)
si dice funzione una terna (A, B, f)
A insieme (lo chiamo dominio)
B insieme (lo chiamo codominio)
f è una relazione tra A e B (la chiamo "legge" che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B)

scriviamo

$$f : A \to B$$
$$x \mapsto f(x)$$

(significa sia una funzione f con dominio A e codominio B)

↑ elemento immagine di x tramite la funzione f

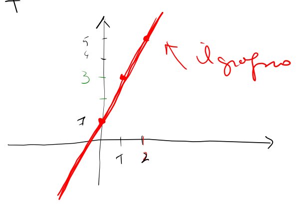
Es. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto 2x+1$

$\mathbb{R}$ = insieme dei numeri reali (lo vedremo)

$\mathbb{R}$ è sia dominio che codominio

f manda x in $2x+1$



il grafico è una retta

x	$f(x)$
0	1
1	3
2	5

$f(x) = 2x+1$

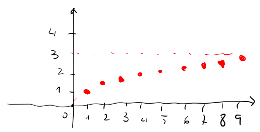
coeff angolare

intercetta ordinata all'origine

Es. $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \longmapsto \sqrt{n}$

$f(x) = \sqrt{x}$



n	$\sqrt{n}$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
4	2
5	$\sqrt{5}$

oss. quando si considera una funzione è necessario tener conto di chi è il dominio (non basta la sola f)

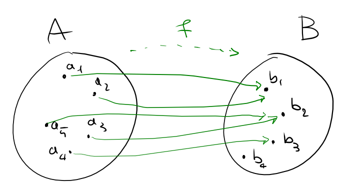
def. sia $f: A \to B$ sia $a \in A$

allora $f(a) \in B$ si dice elemento immagine di a

l'insieme degli elementi immagine si dice insieme immagine

$$f(A) = \{ f(a) \in B : a \in A \}$$

es.



$f(A) = \{ b_1, b_2, b_3 \}$

$\subseteq$ ma $\neq$

B

$f(A) \subseteq B$

ma in generale $f(A) \neq B$

def. se $f(A) = B$ f si dice suriettiva

def. se $\forall a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

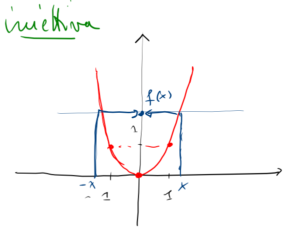
f si dice iniettiva

Es. sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$

è una funzione? ok

è iniettiva?



$(1)^2 = (-1)^2$

$f(1) = f(-1) \Rightarrow$ non è iniettiva

è suriettiva? no perché $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$

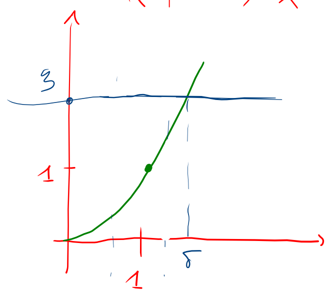
"$\{ y \in \mathbb{R} : y \geq 0 \}$"

è facile vedere che $f(\mathbb{R}) \subseteq [0, +\infty[$

più difficile $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$

Es. $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$

$x \longmapsto x^2$



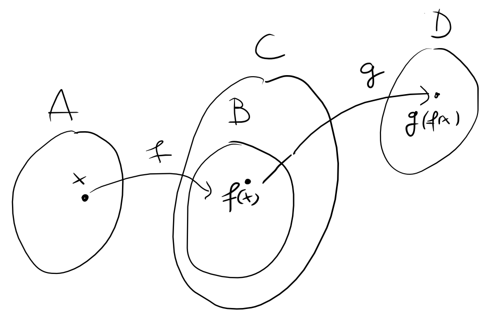
se iniettiva e suriettiva la diciamo biiettiva

$\delta^2 = \xi$

def. sia $f : A \longrightarrow B$

sia $g : C \longrightarrow D$

con $B \subseteq C$



la funzione $h : A \longrightarrow D$

$x \longmapsto g(f(x))$

la diciamo $g \circ f$ funzione composta di "g dopo f".

Es. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 2x+1$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$y \longmapsto y^2 - 1$

$g \circ f(x) = g(f(x)) \stackrel{?}{=} 4x^2 + 4x$

$x \longrightarrow 2x+1 = y \longrightarrow y^2 - 1 = (2x+1)^2 - 1 = 4x^2 + 4x + \cancel{1} \cancel{-1} = 4x^2 + 4x$

ha senso considerare $f \circ g(x)$

$f(g(x)) = 2x^2 - 1$

$x \longmapsto x^2 - 1 = y \longmapsto 2y+1$

$2(x^2-1)+1$

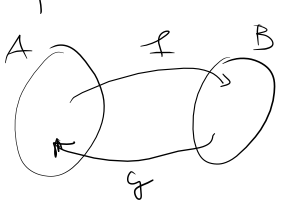
$2x^2 - 2 + 1$

$$\boxed{g \circ f \neq f \circ g}$$

def. $id_A : A \longrightarrow A$

$x \longmapsto x$

def. sia $f : A \longrightarrow B$ e sia $g : B \longrightarrow A$



g si dice inversa di f se $g \circ f = id_A$

$f \circ g = id_B$

l'inversa è unica e la diciamo f^{-1}