$$n = mq + r \qquad 0 \le r < m$$

Vogliamo

$$n+1 = m\tilde{q} + \tilde{r} \qquad 0 \le \tilde{r} < m$$

$$n+1 = mq + r + 1$$

nel caso $0 \le r < m-1$ poniamo

$$\tilde{q} = q \qquad \tilde{r} = r+1 \implies 0 \le r+1 < m$$

$$0 \le \tilde{r} < m$$

Se invece $r = m-1$

allora

$$n+1 = mq + r + 1 = mq + \overbrace{m-1+1}^{m}$$

$$= mq + m = (q+1)m$$

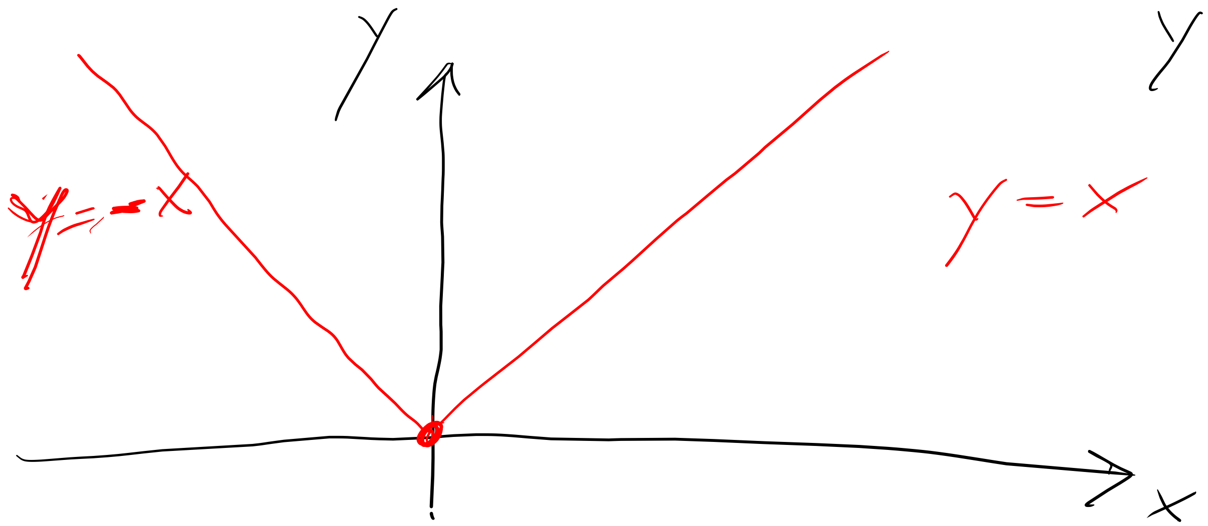
$$n+1 = (q+1)m$$

$$\tilde{q} = q+1 \qquad \tilde{r} = 0$$

Def (Funzione valore assoluto)

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$y = |x|$



Proprietà

1) $|x| = 0 \iff x = 0$

2) $|x_1 x_2| = |x_1|\,|x_2|$ $\quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \frac{|x_1|}{|x_2|}$$

$\forall x_1 \in \mathbb{R}$ e $\forall x_2 \in \mathbb{R}$, $x_2 \neq 0$

3) Vale il seguente

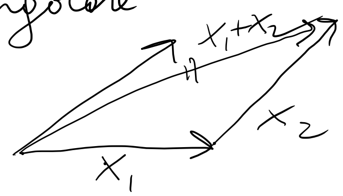
<u>Lemma</u> Sia $a \geq 0$. Allora

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

<u>Esercizio</u>

4) $|x_1+x_2| \leq |x_1| + |x_2| \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

disug triangolare



Dim di 4)

$$-|x_1| \leq x_1 \leq |x_1|$$
$$-|x_2| \leq x_2 \leq |x_2|$$

$$-|x_1|-|x_2| \leq x_1+x_2 \leq |x_1|+|x_2|$$
$$-(|x_1|+|x_2|) \leq x_1+x_2 \leq |x_1|+|x_2|$$

$\Updownarrow$ dal Lemma.

$$|x_1+x_2| \leq |x_1|+|x_2| \qquad \square$$

<u>Esercizio</u> Dimostrare che $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

Def (limite) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $\sup X = +\infty$ e sia $f : X \to \mathbb{R}$, e sia $L \in \mathbb{R}$.
Diremo che L è il limite di f per x che va a $+\infty$, e scriveremo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$
se vale la seguente proposizione:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_\varepsilon \quad t.c. \quad x > M_\varepsilon \text{ e } x \in X \implies |f(x) - L| < \varepsilon}$$

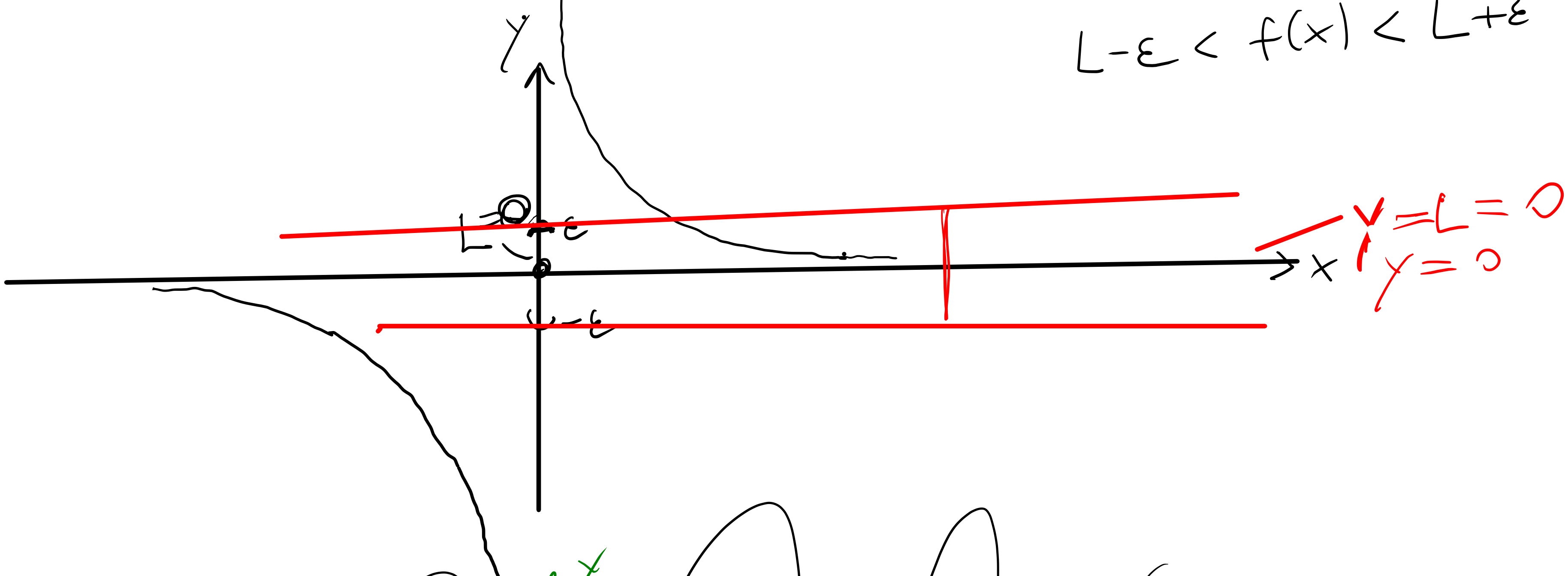
(dati $x, y \in \mathbb{R}$ la loro distanza è
$|x-y| = |y-x|$)

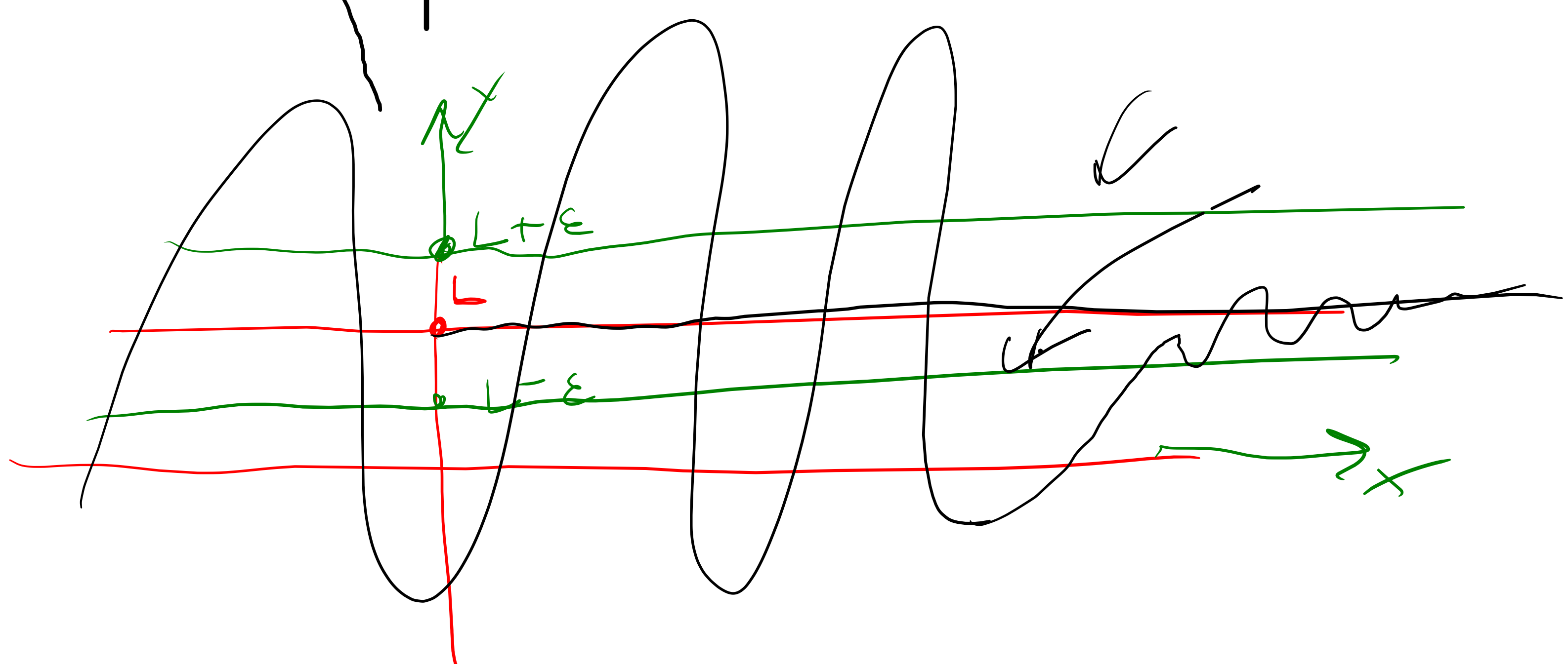
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \left(\forall \varepsilon>0 \ \exists M_\varepsilon \text{ t.c. } x>M_\varepsilon \text{ e } x\in\mathbb{R} \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon\right.$$

$$-\varepsilon < f(x)-L < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$$

$f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad x\neq 0$

$X=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad \sup X = +\infty$



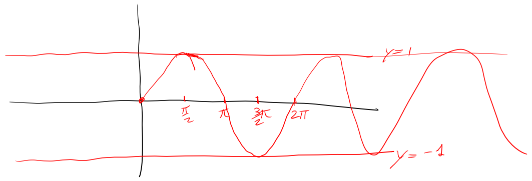


$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \iff$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon$ t.c. $x > M_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$

Qui tutta la questione è di trovare M_ε.
Possiamo limitarci a considerare solo $x > 0$.
Vogliamo $\frac{1}{x} < \varepsilon \iff x > \frac{1}{\varepsilon}$

Se scelgo $M_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$
allora da $\ast$ segue che $x > M_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon$

$\lim_{x\to+\infty} \sin x$ non esiste



$\sin(x) = \sin(x+2\pi) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Supponiamo per assurdo che $\exists L \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\lim_{x\to+\infty} \sin x = L$$

Allora

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_\varepsilon > 0$ t.c. $\quad x > M_\varepsilon \Rightarrow |\sin x - L| < \varepsilon$

so che $\quad \exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $\quad 2\pi n > M_\varepsilon$

$\Rightarrow \quad |\underbrace{\sin(2\pi n)}_{0} - L| < \varepsilon \quad$ cioè $\quad |L| < \varepsilon$

So anche che $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $\quad 2\pi n + \frac{\pi}{2} > M_\varepsilon$

$\Rightarrow \quad |\underbrace{\sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)}_{\sin(\frac{\pi}{2})} - L| < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad |1 - L| < \varepsilon$

Abbiamo concluso che

$\forall \varepsilon > 0 \qquad |L| < \varepsilon \quad$ e $\quad |1-L| < \varepsilon$

$1 = |1| = |(1-L) + L| \le |\underbrace{1-L}_{<\varepsilon}| + |\underbrace{L}_{<\varepsilon}| < 2\varepsilon$

cioè $\quad \forall \varepsilon > 0$ risulta

$$1 < 2\varepsilon$$

se scelgo $\quad \varepsilon = \frac{1}{4}$

$1 < 2\varepsilon \iff \quad 1 < \frac{1}{2} \quad$ falso

Non esiste il limite

1) Dimostrare che se $L \in \mathbb{R}$ è tale che

$|L| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \quad L = 0$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \qquad f: X \to \mathbb{R}$, $\sup X = +\infty$

a) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, M_\varepsilon$ t.c. $\ x > M_\varepsilon$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Introduciamo $\quad Y \subseteq \mathbb{R}_+ \qquad \inf Y = 0$

b) $\forall \varepsilon \in Y \ \exists\, M_\varepsilon$ t.c. $x > M_\varepsilon$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Dimostrare che a) e b) sono equivalenti

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T > 0$

(cioè $\quad f(x) = f(x+T) \quad \forall x \in \mathbb{R}$)

f non costante. Dimostrare che

$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad$ non esiste.