Algebra lineare

Prerequisiti

- Numeri naturali, interi, razionali, reali
- Equazioni di I e II grado in 1 variabile
- Polinomi e loro scomposizione

Cos'è un'equazione? Un'equazione è una domanda.
Infatti

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

è un modo per formalizzare la domanda:

"Qual è quel numero (o quei numeri) tali per cui, se ne calcolo il quadrato, ci aggiungo il doppio del numero stesso e sommo 1, ottengo 0?"

Una soluzione è una risposta corretta alla domanda. Infatti, il fatto che -1 sia soluzione segue dal fatto che, sostituendo -1 a x nella equazione otteniamo:

$$\underbrace{(-1)^2 + 2(-1) + 1}_{=0} = 0$$

la quale è un'uguaglianza vera. Nomenclatura:

"membro sinistro" = "membro destro"

La teoria delle equazioni di II grado ci dice che -1 è l'unica soluzione dell'equazione data che

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

Consideriamo un'altra equazione ovvero

$$3x + y - 2z = 0$$

Risolvere questa equazione significa trovare 3 numeri x, y, z che rendano vera l'uguaglianza precedente. In altri termini, una soluzione è una terna (ordinata) (x, y, z) di numeri che se sostituiti al membro sinistro rendono vera l'uguaglianza.
Una soluzione possibile è

$x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ ovvero la terna $(0, 0, 0)$

Infatti, vale che

$$3 \cdot 0 + 0 - 2 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0$$

Allo stesso modo, anche la scelta

$x = 1,\ y = 1,\ z = 2,$ ovvero la terna $(1, 1, 2)$

è soluzione, infatti

$$3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 3 + 1 - 4 = 0$$

Similmente, anche

$x = 0,\ y = 2,\ z = 1,$ ovvero la terna $(0, 2, 1)$

è soluzione, infatti

$$3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2 - 2 = 0$$

Vediamo ora che a partire da queste due soluzioni possiamo crearne delle altre. Lo faremo utilizzando le proprietà commutativa, associativa e distributiva dei numeri reali.

(Ricordiamo che, se a e b sono numeri reali, allora vale che

$$a + b = b + a \quad \text{e} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

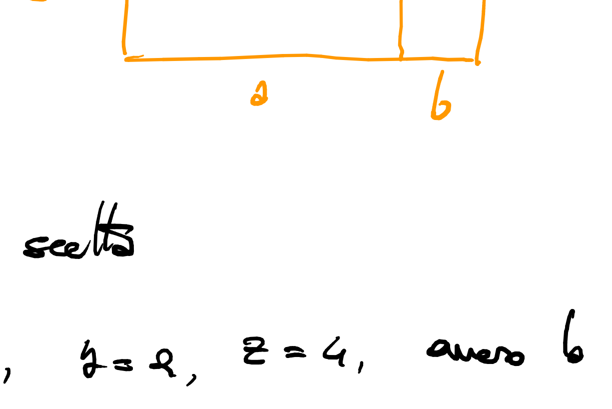
ovvero vale la proprietà commutativa della somma e del prodotto tra numeri reali.
Inoltre, se a, b e c sono numeri reali vale che

$$(a+b) + c = a + (b+c) \quad \text{e} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

ovvero vale la proprietà associativa della somma e del prodotto tra numeri reali.
Infine, se a, b e c sono numeri reali, vale che

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$
$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

ovvero vale la proprietà distributiva tra somma e prodotto tra numeri reali



)

Notiamo che la scelta

$x = 2,\ y = 2,\ z = 4,$ ovvero la terna $(2, 2, 4)$

è soluzione. Infatti:

$$3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = 6 + 2 - 8 = 0$$

Riotteniamo questo risultato cercando di utilizzare la conoscenza pregressa che abbiamo del fatto che $(1, 1, 2)$ è soluzione:

$$3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = 3 \cdot (2 \cdot 1) + 1 \cdot (2 \cdot 1) - 2 \cdot (2 \cdot 2)$$

prop. commutativa e associativa $\rightarrow$ $= 2 \cdot (3 \cdot 1) + 2 \cdot (1 \cdot 1) - 2 \cdot (2 \cdot 2)$

prop. distributiva $\rightarrow$ $= 2\,(\underbrace{3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2}_{=0 \text{ perché } (1,1,2) \text{ è soluzione}})$

$$= 0$$

Lo stesso ragionamento ci mostra che anche

$x = 15,\ y = 15,\ z = 30,$ ovvero la terna $(15, 15, 30)$

è soluzione, infatti:

$$3 \cdot 15 + 1 \cdot 15 - 2 \cdot 30 = 15 \cdot (\underbrace{3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2}_{=0})$$
$$= 15 \cdot 0 = 0$$

Generalizzando, possiamo dire che:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ vale che $(\alpha, \alpha, 2\alpha)$ è soluzione dell'equazione $3x + y - 2z = 0$

"per ogni" "appartiene" "insieme dei numeri reali"

Possiamo introdurre la seguente notazione:

$$\alpha \cdot (1, 1, 2) := (\alpha, \alpha, 2\alpha)$$

"per definizione"

In questo modo diamo senso alla nozione di moltiplicazione di un numero reale per una terna di numeri reali e possiamo dire che dato che $(1, 1, 2)$ è soluzione dell'equazione allora ogni suo multiplo è anche esso soluzione dell'equazione.