Abbiamo studiato l'equazione

$$3x + y - 2z = 0$$

Abbiamo visto che dal fatto che $(1,1,2)$ è soluzione segue che $\alpha\cdot(1,1,2) = (\alpha, \alpha, 2\alpha)$ è soluzione per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
Questa proprietà è peculiarità di questo tipo di equazioni: se consideriamo ad esempio $x + 2y - 1 = 0$ oppure $x^2 - 5x + 6 = 0$ (verificare per esercizio che non è vero che ogni multiplo di una soluzione è soluzione anch'esso)
Analizziamo ora un'altra proprietà particolare dell'equazione $3x + y - 2z = 0$.
Abbiamo già visto che

$$(1,1,2) \quad e \quad (0,2,1)$$

sono soluzione. Vorrei mostrare che $(1,3,3)$ è soluzione. Per farlo notiamo che $(1,3,3)$ è ottenuto sommando "entrata per entrata" le terne $(1,1,2)$ e $(0,2,1)$

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + 0 \\ 3 &= 1 + 2 \\ 3 &= 2 + 1 \end{aligned}$$

Introduciamo quindi una notazione più compatta:

$$(1,3,3) = (1,1,2) + (0,2,1)$$

In generale possiamo definire

$$(a,b,c) + (a',b',c') \underset{\uparrow}{:=} (a+a', b+b', c+c')$$

"per definizione"

In questo modo abbiamo introdotto una nozione di somma tra terne.
Come fatto in precedenza, mostriamo che $(1,3,3)$ è soluzione della equazione utilizzando la nostra conoscenza pregressa:

$$\begin{aligned} 3\cdot 1 + 1\cdot 3 - 2\cdot 3 &= 3\cdot(1+0) + 1\cdot(1+2) - 2\cdot(2+1) \\ &= \underbrace{(3\cdot 1 + 1\cdot 1 - 2\cdot 2)}_{\substack{=0 \text{ perché } (1,1,2) \\ \text{è soluzione}}} + \underbrace{(3\cdot 0 + 1\cdot 2 - 2\cdot 1)}_{\substack{=0 \text{ perché } (0,2,1) \\ \text{è soluzione}}} \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Generalizzando possiamo convincerci che la somma di due soluzioni dell'equazione è essa stessa soluzione dell'equazione. Ciò non vale per tutti i tipi di equazione: consideriamo ad esempio l'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$; allora le sue soluzioni sono 2 e 3, e quindi non è vero che $2 + 3 = 5$ sia soluzione.
Riassumendo, abbiamo visto che, riguardo alle soluzioni di $3x + y - 2z = 0$:

A. la terna $(0,0,0)$ è soluzione.

B. se la terna $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è soluzione, allora per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ anche la terna $\alpha\cdot(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ è soluzione.

C. se le terne $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ sono soluzioni, allora anche la terna $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ è soluzione.

Queste tre proprietà sono centrali nel concetto di linearità.
Allarghiamo il nostro orizzonte andando a studiare il caso di più equazioni che vogliamo siano soddisfatte simultaneamente, ovvero quelli che sono noti come sistemi di equazioni.
Ad esempio:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

Ripetendo i ragionamenti di prima possiamo convincerci che anche per le soluzioni di questo sistema valgono le proprietà A., B., e C.
Come trovare tali soluzioni? Per farlo, utilizziamo il cosiddetto "algoritmo di eliminazione di Gauss". Esso si basa sulle seguenti regole:

1. "se a cose uguali sommiamo cose uguali, otteniamo cose uguali"
2. "se moltiplichiamo due numeri uguali per il medesimo numero non nullo otteniamo numeri uguali e viceversa"

Tramite questi due principi andiamo a manipolare il sistema iniziale per ottenerne uno equivalente, ovvero uno che ha le stesse soluzioni.
Vogliamo che il sistema finale sia della forma:

$$\left.\begin{cases} \text{un'equazione in tutte e tre le variabili} \\ \text{un'equazione solo in } y \text{ e } z \\ \text{un'equazione solo in } z \end{cases}\right) \leftarrow \text{qualcuna di queste equazioni può mancare}$$

Partiamo notando che

$$-2x - 2y + 2z = 0$$

è equivalente a

$$x + y - z = 0$$

Il sistema diviene

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

Considero ora

$$(3x + y - 2z) - 3(x + y - z) = 0 - 3\cdot 0$$

$$-2y + z = 0$$

Similmente posso considerare

$$(2x - z) - 2(x + y - z) = 0 - 2\cdot 0$$

$$-2y + z = 0$$

Il sistema iniziale è dunque equivalente a

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ \left.\begin{aligned} -2y + z &= 0 \\ -2y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \text{medesima equazione, quindi una delle due può essere rimossa.} \end{cases}$$

A questo punto, è sufficiente scegliere un valore per z, usare la seconda equazione per trovare il valore di y, e usare la prima equazione per trovare il valore di x, ottenendo una soluzione.