Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{49\pi^2 z^2 + 1}{z(e^{\frac{1}{z}} + 1)} \ .$$

I - (5 punti) Elenca le singolarità di $f(z)$, indicandone il tipo se sono isolate, incluso eventualmente il punto $z = \infty$.

II - (4 punti) Calcola il residuo di $f(z)$ in $z = -\frac{i}{3\pi}$.

III - (6 punti) Calcola l'integrale di $f(z)$ sul cammino chiuso dato dal cerchio unitario orientato in senso antiorario.

Esercizio 2

Considera la seguente funzione della variabile reale t

$$F(t) = \mathrm{sign}(t) e^{-|t|} \ ,$$

dove $\mathrm{sign}(t)$ denota la funzione segno, che dà 1 per t positivi e -1 per t negativi.

I - (4 punti) Usa le proprietà di $F(t)$ per derivare se $\hat{F}(\omega)$ sia in $L^2(\mathbb{R})$ e/o in $L^1(\mathbb{R})$, senza calcolare $\hat{F}(\omega)$.

II - (4 punti) Calcola $\hat{F}(\omega)$ e verifica le proprietà derivate al punto I.

III - (6 punti) Mostra che

$$\hat{F}(\omega) = \omega \hat{G}(\omega) \ , \tag{1}$$

con $\hat{G}(\omega)$ funzione in $L^2(\mathbb{R})$. Detta $G(t)$ l'antitrasformata di $\hat{G}(\omega)$, deriva la relazione che sussiste tra $F(t)$ e $G(t)$ come conseguenza di (1). Quindi calcola $G(t)$ e verifica questa proprietà.

Esercizio 3

Dato un sistema ortonormale completo $\{e^{(n)}(x)\}_{n \geq 1}$ su $L^2(\mathbb{R})$, considera la successione di funzionali lineari

$$T_n[\varphi] = (e^{(n)}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, (e^{(n)}(x))^* \varphi(x) \ .$$

I - (4 punti) Mostra che T_n definisce una distribuzione temperata, e mostra che in senso distribuzionale $\lim_{n\to\infty} T_n = 0$.