

Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = (\log(z-1) - \log(z+1)) \frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z+1}}.$$

I - (4 punti) Elenca le singolarità di $f(z)$, indicandone il tipo se sono isolate, incluso eventualmente il punto $z = \infty$.

II - (5 punti) Prendi sia il logaritmo che la radice definiti come il ramo principale. Denota con γ il cammino chiuso dato dall'unione dei seguenti cammini: segmento orientato dell'asse reale da $-1+\epsilon$ a $1-\epsilon$, arco centrato in 1 di raggio ϵ orientato in senso antiorario, segmento orientato dell'asse reale da $1-\epsilon$ a $-1+\epsilon$, arco centrato in -1 di raggio ϵ orientato in senso antiorario. Mostra che

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\gamma} dz f(z) = -2iI,$$
$$\text{con } I = \int_{-1}^1 dx \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

III - (5 punti) Usa il risultato al punto precedente per calcolare l'integrale reale I .

Esercizio 2

Le due funzioni di variabile reale $F(x)$ e $G(x)$ sono legate dalla seguente equazione

$$F''(x) = G(x) + \delta(x),$$

dove $\delta(x)$ denota la distribuzione delta di Dirac centrata in $x = 0$.

I - (4 punti) Deriva la trasformata di Fourier $\hat{F}(k)$ di $F(x)$ in funzione della trasformata $\hat{G}(k)$ di $G(x)$.

II - (5 punti) Assumendo che $G(x)$ sia in $L^1(\mathbb{R})$, e che valga $\hat{G}(k) \underset{k \rightarrow 0}{=} -1 + \mathcal{O}(|k|^\alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, determina la condizione necessaria su α per avere che $F(x)$ sia in $L^1(\mathbb{R})$, e poi anche la condizione necessaria su α per avere che $F(x)$ sia in $L^2(\mathbb{R})$. In quale caso la condizione è anche sufficiente?

Esercizio 3

Considera la funzione $F(t) = t(1 - |t|)$ con $t \in [-1, 1]$.

I- (4 punti) Calcola la sua serie di Fourier.

[*Suggerimento:* Nota che la funzione è dispari, e utilizza gli integrali $\int_0^1 dt \sin(n\pi t)t = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$, $\int_0^1 dt \sin(n\pi t)t^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{2}{(n\pi)^3}(1 - (-1)^n)$, validi per qualsiasi intero $n \geq 1$.]

II - (6 punti) Utilizza il risultato per calcolare le due serie seguenti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} \ , \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} \ .$$