

Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione di variabile complessa

$$f_\alpha(z) = \frac{ze^{i\alpha z}}{(z^2 + 1)^2}, \quad \alpha > 0.$$

I - (4 punti) Elenca le singolarità di $f_\alpha(z)$, indicandone il tipo se sono isolate, incluso eventualmente il punto $z = \infty$.

II - (5 punti) Calcola l'integrale di $f_\alpha(z)$ sul cammino dato dal cerchio $|z| = 2$, orientato positivamente.

III - (6 punti) Usa $f_\alpha(z)$ per calcolare, per $\alpha > 0$, l'integrale

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} dx \frac{x \sin(\alpha x)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Esercizio 2

Per $c > 0$ definiamo la funzione

$$H_c(t) = e^{-ct}\theta(t),$$

dove θ è la funzione theta di Heaviside. Considera due parametri $a, b > 0$ con $a \neq b$ e definiamo $F_{a,b} = H_a \star H_b$, dove $\star$ denota il prodotto di convoluzione.

I - (5 punti) Calcola le trasformate di Fourier $\widehat{H}_a(\omega)$ e $\widehat{H}_b(\omega)$, e usa la proprietà della convoluzione per ottenere $\widehat{F}_{a,b}(\omega)$. Calcola anche $F_{a,b}(t)$ direttamente dall'integrale di convoluzione.

[*Suggerimento:* Per calcolare direttamente l'integrale di convoluzione, considera separatamente i casi $t > 0$ e $t < 0$; il valore in $t = 0$ non è rilevante.]

II - (6 punti) Usa i risultati del punto precedente per calcolare, in funzione di a e b ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(a^2 + \omega^2)(b^2 + \omega^2)}.$$

Esercizio 3

Su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ siano dati due vettori $u_1, u_2 \in \mathcal{H}$. Considera l'operatore lineare $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definito da

$$A(v) = (u_1, v)u_2, \quad v \in \mathcal{H}.$$

I - (4 punti) Mostra che A è un operatore limitato e calcola $\|A\|$.

II - (3 punti) Calcola l'operatore aggiunto $A^\dagger$.