

Durata: 3 ore.

Esercizio 1

Considera la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{z^2(1 + \cos(\frac{\pi}{z}))}{(z-1)^3}.$$

- I - (4 punti)** Elenca le singolarità di $f(z)$, indicandone il tipo se sono isolate, incluso eventualmente il punto $z = \infty$.
- II - (4 punti)** Calcola l'integrale di $f(z)$ sul cammino dato dal cerchio di raggio 2 centrato nell'origine, orientato positivamente.
- III - (6 punti)** Usa il risultato al punto precedente per calcolare il residuo di $f(z)$ in $z = 0$.

Esercizio 2

Le due funzioni di variabile reale $F(t)$ e $G(t)$ hanno le seguenti trasformate di Fourier

$$\hat{F}(\omega) = \cos(\omega) \arctan\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \hat{G}(\omega) = \frac{1}{(1 + \omega^2)\arctan\left(\frac{1}{\omega}\right)}.$$

- I - (5 punti)** Spiega perché $F(t)$ e $G(t)$ sono necessariamente funzioni in $L^2(\mathbb{R})$ e non in $L^1(\mathbb{R})$ [*Suggerimento:* nota che $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1}{\omega}\right) \neq \lim_{\omega \rightarrow 0^-} \arctan\left(\frac{1}{\omega}\right)$], e spiega anche perché il prodotto di convoluzione $(F \star G)(t)$ è in $L^2(\mathbb{R})$.
- II - (6 punti)** Calcola il prodotto scalare in $L^2(\mathbb{R})$ tra $F(t)$ e $G(t)$.

Esercizio 3

Data una successione di operatori lineari $\{T_n\}_{n \geq 1}$ su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, diciamo che

- $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ in senso debole se vale che, $\forall v, w \in \mathcal{H}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (w, T_n(v)) = (w, T(v))$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ in senso forte se $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$, dove $\|\cdot\|$ indica la norma operatoriale.

- I- (4 punti)** Mostra che se vale il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ in senso forte, allora vale anche in senso debole.

II - (4 punti) Mostra che se vale il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ in senso debole, e gli operatori T_n sono limitati e tali che $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| = L$, allora anche T è limitato e vale $\|T\| \leq L$. [*Suggerimento:* usa la definizione di limite in senso debole con $w = T(v)$.]