ESERCIZIO 1

I) Zeri del denominatore:

$$z^2+1=0 \implies z = \pm i \text{, zeri di ordine 1.}$$

però $\sinh\left(\frac{\pi}{z}\right)$ si annulla in questi punti $\implies$ sono singolarità rimovibili.

Inoltre $\sinh\left(\frac{\pi}{z}\right)$ dà una singolarità essenziale in $z=0$.

$z=\infty$?

$$f(z) = z^2 \frac{1+1/z^4}{1+1/z^2} \sinh\left(\frac{\pi}{z}\right)$$

$$\underset{z\to\infty}{=} z^2\left(1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)\left(\frac{\pi}{z}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)\right)$$

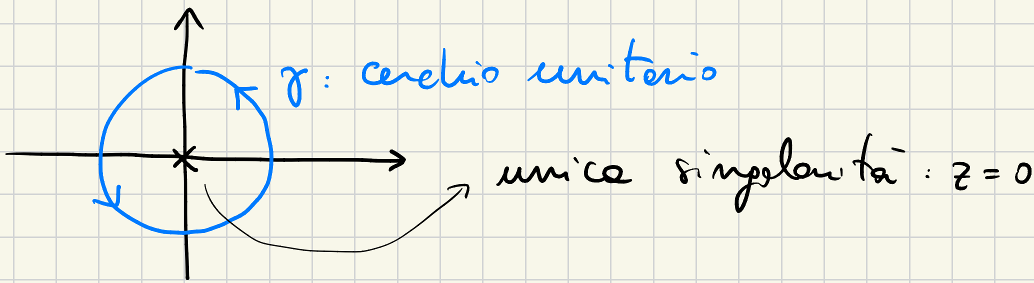
$$\underset{z\to\infty}{=} \pi z\left(1+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)$$

$\implies$ polo di ordine 1.

II) Visto che $z=0$ è una singolarità

essenziale, non è conveniente calcolare il residuo espandendo in serie di TL.

Invece usiamo che:



$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}_f(0)$$

↓ teorema interno dei residui

$$= -2\pi i \, \mathrm{Res}_f(\infty)$$

↓ teorema esterno dei residui

$\Rightarrow \mathrm{Res}_f(0) = -\mathrm{Res}_f(\infty) = +$ coefficiente di $\frac{1}{z}$ nella serie di TL attorno a ∞.

$$f(z) = z^2 \sinh\left(\frac{\pi}{z}\right) \frac{1 + 1/z^4}{1 + 1/z^2}$$

$$\underset{z\to\infty}{=} z^2\left(\frac{\pi}{z}+\frac{1}{6}\frac{\pi^3}{z^3}+O\left(\frac{1}{z^5}\right)\right)\left(1-\frac{1}{z^2}+O\left(\frac{1}{z^4}\right)\right)$$

$$\underset{z\to\infty}{=} \pi z\left(1+\frac{1}{6}\frac{\pi^2}{z^2}+O\left(\frac{1}{z^4}\right)\right)\left(1-\frac{1}{z^2}+O\left(\frac{1}{z^4}\right)\right)$$

$$\underset{z\to\infty}{=} \pi z\left(1+\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)\frac{1}{z^2}+O\left(\frac{1}{z^4}\right)\right)$$

$$\underset{z\to\infty}{=} \pi z+\underbrace{\pi\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)\frac{1}{z}}+O\left(\frac{1}{z^3}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_f(0)=\pi\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right).$$

Esercizio 2

$$G(t)=\frac{e^{-t^2}-1}{t^2}$$

I) $G(t)$: continua per $t\neq 0$;

estendibile per continuità in $t\to 0$:

$$\lim_{t\to 0} G(t)=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{1}-t^2+O(t^4)\cancel{-1}}{t^2}=-1$$

per $t\to\infty$: $G(t)\underset{t\to\infty}{=}O\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Quindi $|G(t)|$ è integrabile su tutta la retta e anche $|G(t)|^2$ lo è: $\in L^1(\mathbb{R}), \in L^2(\mathbb{R})$

$tG(t)$: moltiplicare per t una funzione continua su $\mathbb{R}$ dà ancora una funzione continua. Dobbiamo controllare solo il comportamento per $t \to +\infty$:

$$tG(t) \underset{t\to\infty}{=} \Theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

Dunque $|tG(t)|$ non è integrabile su tutta la retta, mentre $|tG(t)|^2$ lo è.

Quindi: $tG(t) \in L^2(\mathbb{R}), \notin L^1(\mathbb{R})$.

$t^2G(t)$: di nuovo, è continua su tutto $\mathbb{R}$ e dobbiamo controllare solo $t \to \infty$:

$$t^2G(t) \underset{t\to\infty}{=} \Theta(1)$$

Dunque $|t^2G(t)|$ e $|t^2G(t)|^2$ non sono integrabili su tutta la retta.

Quindi: $t^2G(t) \notin L^2(\mathbb{R}), \notin L^1(\mathbb{R})$.

II)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \hat{G}(\omega) = 2\pi\, \underbrace{G(0)}$$

dalla formula dell'antitrasformata

inteso come G estesa per continuità

$$= 2\pi \lim_{t\to 0} G(t) = -2\pi .$$

III)
$$\frac{d^2}{d\omega^2}\hat{G}(\omega) = -\widehat{t^2 G(t)}(\omega)$$

$$= \widehat{1-e^{-t^2}}(\omega)$$

$$= 2\pi\,\delta(\omega) - \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

Vediamo che si tratta di una distribuzione temperata, quindi la derivata può essere definita in senso distribuzionale

Esercizio 3

$$\{h^{(n)}(t)\}_{n\geq 1} \quad \text{s.o.c.}$$

$$\text{su } L^2([0, +\infty))$$

I)
$$e^{-t/2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n h^{(n)}(t)$$
$$t e^{-t/2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n h^{(n)}(t)$$

Per Parseval:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2 = \| e^{-t/2} \|^2_{L^2([0,+\infty))}$$
$$= \int_0^{+\infty} dt \, |e^{-t/2}|^2 = \int_0^{+\infty} dt \, e^{-t} = 1.$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n^* \alpha_n = \left(t e^{-t/2}, e^{-t/2} \right)_{L^2([0,+\infty))}$$
$$= \int_0^{+\infty} dt \, (t e^{-t/2})^* e^{-t/2} = \int_0^{+\infty} dt \, t e^{-t}$$
$$= - \int_0^{+\infty} dt \, t \frac{d}{dt} e^{-t} = - (t e^{-t}) \Big|_0^{+\infty}$$
$$+ \int_0^{+\infty} dt \, e^{-t} = 1.$$

II)
$$g^{(n)}(t) = e^{-t} h^{(n)}(t), \quad n \geq 1$$

Supponiamo che esiste $F(t) \in L^2([0,+\infty))$ tale che:

$$(g^{(n)}, F) = 0 \quad , \quad \forall n \geq 1 .$$

Allora: $\forall n \geq 1 \quad 0 = \int_0^{+\infty} dt \, (e^{-t} h^{(n)}(t))^* F(t)$

$$= \int_0^{+\infty} dt \, (h^{(n)}(t))^* \, e^{-t} F(t) = (h^{(n)}, e^{-t} F(t))$$

Dato che $h^{(n)}(t)$ è un s.o.e., questo implica che $e^{-t} F(t) = 0$. Dunque $F(t) = 0$.

Pertanto $\{g^{(n)}(t)\}_{n \geq 1}$ è un sistema completo.