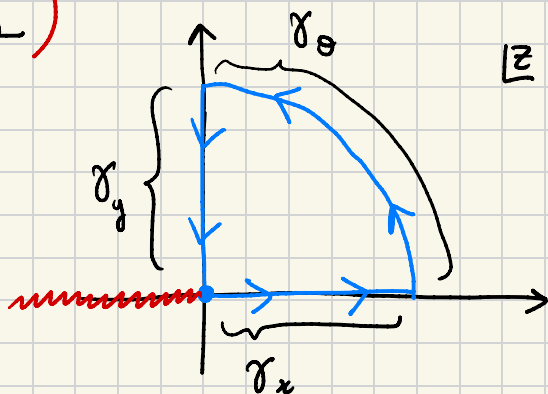


ESERCIZIO 1

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}}$$

I) $f(z)$ ha punti di diramazione in $z=0$ e $z=\infty$ a causa del fattore $\frac{1}{\sqrt{z}}$. Queste sono le uniche singolarità, perché e^{iz} è una funzione intera, che ha solo una singolarità essenziale per $z=\infty$, ma $z=\infty$ è già punto di diramazione per $f(z)$ e dunque non è una singolarità isolata.

II)



$$\gamma = \gamma_x + \gamma_\theta + \gamma_y$$

$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ perché non ci sono singolarità interne

$$\Rightarrow 0 = \int_{\gamma_x} f(z) dz + \int_{\gamma_0} f(z) dz + \int_{\gamma_y} f(z) dz \quad (*)$$

$$\bullet \int_{\gamma_x} f(z) dz = \int_0^R dx \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}$$

$$\bullet \int_{\gamma_y} f(z) dz = i \int_R^0 dy \frac{e^{-y}}{\sqrt{iy}} = -i \int_0^R dy \frac{e^{-y}}{e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{y}}$$

$$= -i e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_0^R dy \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}$$

$$= -i \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \int_0^R dy \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}$$

$$= -i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \int_0^R dy \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R dy \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}$$

$$\bullet \int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_0} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}} dz$$

visto che $\max_{\gamma_0} \left| \frac{1}{\sqrt{z}} \right| = \frac{1}{\sqrt{R}} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$

e siamo nel semipiano superiore in cui

e^{iz} è un esponenziale decrescente, possiamo usare il lemma di Jordan e concludere:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_0} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}} dz = 0$$

Possiamo anche controllare esplicitamente:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_0} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi/2} d\theta \, i R e^{i\theta} \frac{e^{i R e^{i\theta}}}{\sqrt{R} e^{i\theta/2}} \right| \\ &\leq \sqrt{R} \int_0^{\pi/2} d\theta \, e^{-R \sin \theta} \leq \sqrt{R} \int_0^{\pi/2} d\theta \, e^{-\frac{2R}{\pi} \theta} \\ &\quad \sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta \text{ per } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

$$= \sqrt{R} \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Pertanto, sostituendo i tre integrali in $(*)$ e prendendo il limite $R \rightarrow +\infty$ otteniamo:

$$\int_0^{+\infty} dx \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} dy \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} = 0 \quad \checkmark \checkmark$$

$$\text{III) } x = t^2: \int_0^{+\infty} dx \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} = 2 \int_0^{+\infty} dt \cancel{t} \frac{e^{it^2}}{\sqrt{t^2}} \\ = 2 \int_0^{+\infty} dt e^{it^2}$$

$$y = s^2: \int_0^{+\infty} dy \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} = 2 \int_0^{+\infty} ds \cancel{s} \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{s^2}} = 2 \int_0^{+\infty} ds e^{-s^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^{+\infty} dt e^{it^2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} ds e^{-s^2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \int_0^{+\infty} dt \cos(t^2) + i \int_0^{+\infty} dt \sin(t^2)$$

Prendendo la parte reale e la parte immaginaria otteniamo:

$$\int_0^{+\infty} dt \cos(t^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

$$\int_0^{+\infty} dt \sin(t^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

ESERCIZIO 2

$$F(x) = (1 - |x|) \Theta(1 - |x|)$$

I)

$$G(x) = \Theta\left(\frac{1}{2} - |x|\right)$$

$$(G * G)(x) = F(x)$$

$\Rightarrow (\hat{G}(k))^2 = \hat{F}(k)$ per le proprietà della trasformata del prodotto di convoluzione.

$$\hat{G}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Theta\left(\frac{1}{2} - |x|\right) e^{ikx}$$

$$= \int_{-1/2}^{+1/2} dx e^{ikx} = \frac{1}{ik} \left(e^{ik\frac{1}{2}} - e^{-ik\frac{1}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{ik} 2i \sin\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{2}{k} \sin\left(\frac{k}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{F}(k) = \frac{4}{k^2} \left(\sin\left(\frac{k}{2}\right) \right)^2$$

II)

$$H(x) = -\operatorname{sign}(x) \Theta(1 - |x|)$$

$$\hat{H}(k) = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx \operatorname{sign}(x) \Theta(1 - |x|) e^{ikx}$$

$$= - \int_{-1}^{+1} dx \operatorname{sign}(x) e^{ikx}$$

$$= - \int_0^{+1} dx e^{ikx} + \int_{-1}^0 dx e^{ikx}$$

$$= - \frac{1}{ik} (e^{ik} - 1) + \frac{1}{ik} (1 - e^{-ik})$$

$$= - \frac{e^{ik} + e^{-ik} - 2}{ik} = - \frac{(e^{ik/2} - e^{-ik/2})^2}{ik}$$

$$= - \frac{(2i \sin(k/2))^2}{ik} = + \frac{4 (\sin(k/2))^2}{ik}$$

$$= -4i \frac{(\sin(k/2))^2}{k}$$

Mostriamo che $H(x) = F'(x)$.

Un modo possibile è usare le derivate note:

$$\frac{d}{dx} |x| = \operatorname{sign}(x), \quad \frac{d}{dx} \mathcal{O}(1-|x|) = \delta(x+1) - \delta(x-1)$$

e applicare Leibniz, ottenendo:

$$\frac{d}{dx} F(x) = -\operatorname{sign}(x) \Theta(1-|x|) + \underbrace{(1-|x|) \delta(x+1)}_{=0} - \underbrace{(1-|x|) \delta(x-1)}_{=0}$$

$$\Rightarrow F'(x) = -\operatorname{sign}(x) \Theta(1-|x|) = H(x)$$

Un altro modo possibile è considerare la definizione di $F'(x)$ in senso distribuzionale, usando una funzione test:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx F'(x) \varphi(x) \equiv - \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) \varphi'(x)$$

$$= - \int_{-1}^{+1} dx (1-|x|) \varphi'(x)$$

$$= - \int_0^1 dx (1-x) \varphi'(x) - \int_{-1}^0 dx (1+x) \varphi'(x)$$

$$= - [(1-x) \varphi'(x)] \Big|_0^1 + \int_0^1 dx \left(\frac{d}{dx} (1-x) \right) \varphi(x) - [(1+x) \varphi'(x)] \Big|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 dx \left(\frac{d}{dx} (1+x) \right) \varphi(x)$$

$$\begin{aligned}
 &= \cancel{+\varphi'(0)} - \int_0^1 dx \varphi(x) - \cancel{\varphi'(0)} + \int_{-1}^0 dx \varphi(x) \\
 &= - \int_{-1}^{+1} dx \operatorname{sign}(x) \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx H(x) \varphi(x)
 \end{aligned}$$

Da cui di nuovo: $H(x) = F'(x)$.

Applicando la trasformata di Fourier abbiamo:

$$\hat{H}(k) = -ik \hat{F}(k)$$

$$= -ik \frac{4}{k^2} \left(\sin\left(\frac{k}{2}\right) \right)^2 = -\frac{4i}{k} \left(\sin\left(\frac{k}{2}\right) \right)^2 \quad \checkmark$$

coincide con il calcolo
esplicito di $\hat{H}(k)$.

III) Parseval:

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dk |\hat{F}(k)|^2}_{=} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dx |F(x)|^2 \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{16}{k^4} \left(\sin\left(\frac{k}{2}\right) \right)^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} dx |F(x)|^2 &= \int_0^1 dx (1-x)^2 + \int_{-1}^0 dx (1+x)^2 \\
 &= -\frac{1}{3} (1-x)^3 \Big|_0^1 + \frac{1}{3} (1+x)^3 \Big|_{-1}^0 \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 16 \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{(\sin(\frac{k}{2}))^4}{k^4} = 2\pi \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{(\sin(k/2))^4}{k^4} = \frac{\pi}{12}$$

ESERCIZIO 3 $T(a) = \{c_n a_n\}_{n \geq 1}$

$$I) \quad \|T\| = \sup_{a \neq 0} \frac{\|T(a)\|_{\ell^2}}{\|a\|_{\ell^2}}$$

$$\|T(a)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n a_n|^2$$

$$\leq M^2 \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 = M^2 \|a\|_{\ell^2}^2$$

$$\Rightarrow \|T\| \leq M$$

Per mostrare l'altra disuguaglianza, considero la successione di successioni:

$$(a^{(l)})_n \equiv \delta_{ln} = \begin{cases} 1 & \text{per } l=n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad l \geq 1$$

ovvero: $a^{(1)} = (1, 0, 0, 0, \dots)$

$$a^{(2)} = (0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$a^{(3)} = (0, 0, 1, 0, \dots)$$

e così via.

$$\forall l \geq 1: \|a^{(l)}\|_{\ell^2} = 1$$

$$T(a^{(l)}) = (0, \dots, 0, c_l, 0, \dots)$$

$\downarrow$
nella posizione l

$$\Rightarrow \|T(a^{(l)})\|_{\ell^2} = |c_l|$$

$$\Rightarrow \frac{\|T(a^{(l)})\|_{\ell^2}}{\|a^{(l)}\|_{\ell^2}} = |c_l|$$

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \frac{\|T(a^{(\ell)})\|_{\ell^2}}{\|a^{(\ell)}\|_{\ell^2}} = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} |c_\ell| = M$$

$$\Rightarrow \|T\| \geq M$$

$$\text{Quindi: } \|T\| = M.$$