Esercizio 1

$$f(z) = \frac{\cos(\alpha z)}{(z^2+4)(z-i)}$$

I)

- $z = \infty$: singolarità essenziale per via di $\cos(\alpha z)$

- $z = \pm 2i$: polo di ordine 1 per via di $\frac{1}{z^2+4}$

- $z = i$: polo di ordine 1 per via di $\frac{1}{z-i}$

Notiamo che per $\alpha \in \mathbb{R}$, $\cos(\alpha z)$ non si annulla mai sull'asse immaginario, quindi $\pm 2i$ e i non possono diventare rimuovibili.

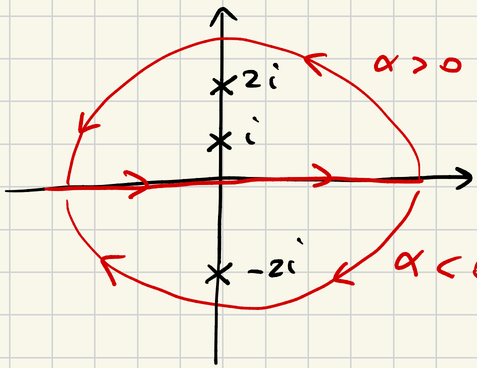
II)

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{(x^2+4)(x-i)}\,dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{(x^2+4)(x-i)}\,dx}_{I_+(\alpha)} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{(x^2+4)(x-i)}\,dx}_{I_-(\alpha)}$$

$I_\pm(\alpha)$: calcoliamo usando il Lemma di Jordan, si può usare perché $\frac{1}{(z^2+4)(z-i)} \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$.

$I_+(\alpha)$:



$$I_+(\alpha) = \begin{cases} 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{\frac{e^{i\alpha z}}{(z^2+4)(z-i)}}(z=2i) + \operatorname{Res}_{\frac{e^{i\alpha z}}{(z^2+4)(z-i)}}(z=i)\right), & \alpha>0 \\ -2\pi i \operatorname{Res}_{\frac{e^{i\alpha z}}{(z^2+4)(z-i)}}(z=-2i), & \alpha<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\pi i\left(\frac{e^{-2\alpha}}{4i\cdot i} + \frac{e^{-\alpha}}{i^2+4}\right), & \alpha>0 \\ -2\pi i \frac{e^{+2\alpha}}{(-4i)(-3i)}, & \alpha<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\pi i \left(-\frac{1}{4} e^{-2\alpha} + \frac{1}{3} e^{-\alpha} \right) , & \alpha > 0 \\ -2\pi i \left(-\frac{1}{12} \right) e^{2\alpha} , & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{\pi i}{6} \left(3 e^{-2\alpha} - 4 e^{-\alpha} \right) , & \alpha > 0 \\ +\frac{\pi i}{6} e^{2\alpha} , & \alpha < 0 \end{cases}$$

$I_-(\alpha)$: notiamo che $I_-(\alpha) = I_+(-\alpha)$

quindi

$$I_-(\alpha) = \begin{cases} \frac{\pi i}{6} e^{-2\alpha} , & \alpha > 0 \\ -\frac{\pi i}{6} \left(3 e^{2\alpha} - 4 e^{\alpha} \right) , & \alpha < 0 \end{cases}$$

Quindi: $I(\alpha) = \frac{1}{2} \left(I_+(\alpha) + I_-(\alpha) \right)$

$$= \begin{cases} \frac{\pi i}{6} \left(-\frac{3}{2} e^{-2\alpha} + 2 e^{-\alpha} + \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \right) , & \alpha > 0 \\ \frac{\pi i}{6} \left(\frac{1}{2} e^{2\alpha} - \frac{3}{2} e^{2\alpha} + 2 e^{\alpha} \right) , & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{\pi i}{6}\left(e^{-2\alpha} - 2e^{-\alpha}\right), & \alpha > 0 \\ \frac{\pi i}{6}\left(e^{2\alpha} - 2e^{\alpha}\right), & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$= \boxed{-\frac{\pi i}{6}\left(e^{-2|\alpha|} - 2e^{-|\alpha|}\right).}$$

Esercizio 2

$$F_a(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, a} e^{-\frac{t^2}{a^2}}$$

I)
$$\widehat{F_a}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, a} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-\frac{t^2}{a^2} + i\omega t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\, a} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-\frac{1}{a^2}\left(t - \frac{i a^2}{2}\omega\right) - \frac{a^2}{4}\omega^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\, a} e^{-\frac{a^2\omega^2}{4}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-\frac{1}{a^2}\left(t - \frac{i a^2}{2}\omega\right)}}$$

deformando il cammino da: $t \in \mathbb{R}$

a $t = x + \frac{i a^2 \omega}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

troviamo: $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-\frac{x^2}{a^2}} = a\sqrt{\pi}$

$$\Rightarrow \widehat{F_a}(\omega) = e^{-\frac{a^2\omega^2}{2}}$$

Pertanto: $\widehat{F_a * F_b}(\omega) = \widehat{F_a}(\omega)\,\widehat{F_b}(\omega)$

$\downarrow$

proprietà delle trasformate del prodotto di convoluzione tra funzioni in $L^1(\mathbb{R})$

$$= e^{-\frac{a^2\omega^2}{2}} \cdot e^{-\frac{b^2\omega^2}{2}} = e^{-\frac{a^2+b^2}{2}\omega^2}$$

Questa è proprio la trasformata di:

$F_{\sqrt{a^2+b^2}}(t)$. Quindi: $F_a * F_b = F_{\sqrt{a^2+b^2}}$.

II) $*$ Partendo da $F_a(t)$:

Per $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ consideriamo:

$$T_{F_a}[\varphi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, F_a(t)\varphi(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, \frac{1}{\sqrt{\pi}\, a} e^{-\frac{t^2}{a^2}} \varphi(t)$$

$$\underset{|}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \cancel{a} \, \frac{1}{\sqrt{\pi}\, \cancel{a}} e^{-y^2} \varphi(ay)$$

$t = ay$

Per $a \to 0$ la funzione integranda tende a:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} \varphi(0).$$

Possiamo commutare limite e integrale perché la funzione integranda per $\forall\, a > 0$ è limitata da:

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} \varphi(ay) \right| \leq \underbrace{\left(\operatorname*{Max}_{\mathbb{R}} |\varphi| \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}}_{\text{funzione sommabile su } \mathbb{R}} .$$

Quindi vale il teorema delle convergenze dominate e possiamo scambiare limite e integrale. Otteniamo:

$$\lim_{a\to 0} T_{F_a}[\varphi] = \varphi(0) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}}_{=1}$$

$$= \varphi(0)$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{a\to 0} T_{F_a} = \delta_0 \quad \text{delta di Dirac}$$

ovvero: $\lim_{a\to 0} F_a(t) = \delta(t)$.

* Partendo da $\hat{F}_a(\omega)$:

$$\hat{F}_a(\omega) = e^{-\frac{a^2\omega^2}{4}} \xrightarrow[a\to 0]{} 1 = \hat{\delta}(\omega)$$

$\downarrow$

la trasformata di $\delta(t)$ è la costante 1.

Pertanto usando che la trasformata commuta con il limite distribuzionale troviamo di nuovo:

$$\lim_{a \to 0} F_a(t) = \delta(t).$$

III) Al punto I abbiamo trovato:

$$F_a * F_b = F_{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Prendendo $a \to 0$ troviamo:

$$\delta * F_b = F_b$$

Questa equazione è soddisfatta per la proprietà della delta di Dirac:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, \delta(t-t') F_b(t') = F_b(t).$$

ESERCIZIO 3

$$P(v) = \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{(2k)}, v) e^{(2k)}$$

I) $P(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{(2k)}, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)\, e^{(2k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\alpha_1 (e^{(2k)}, v_1) e^{(2k)} + \alpha_2 (e^{(2k)}, v_2) e^{(2k)} \right]$$

$\downarrow$

linearità del prodotto scalare

$$= \alpha_1 \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{(2k)}, v_1) e^{(2k)} + \alpha_2 \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{(2k)}, v_2) e^{(2k)}$$

$$= \alpha_1 P(v_1) + \alpha_2 P(v_2) \Rightarrow \text{lineare} \checkmark$$

$$\| P(v) \|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |(e^{(2k)}, v)|^2$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |(e^{(n)}, v)|^2 = \|v\|^2, \ \forall v \in H$$

$\downarrow$

aggiungo anche prodotti scalari con $e^{(n)}$ per n dispari

$$\Rightarrow \quad \|P\| \leq 1.$$

Inoltre: $\quad P(e^{(2)}) = e^{(2)} \Rightarrow \|P\| \geq 1$

Pertanto: $\|P\| = 1$.

$\forall v, w \in H$, consideriamo:

$$(w, P(v)) = \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{(2k)}, v)(w, e^{(2k)})$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{(2k)}, w)^* (v, e^{(2k)})^*$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (e^{(2k)}, w)(v, e^{(2k)}) \right)^*$$

$$= (v, P(w))^* = (P(w), v)$$

$$\Rightarrow P^\dagger = P.$$

II) $P(P(v))$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{(2k)}, P(v))\, e^{(2k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(e^{(2k)}, \sum_{h=1}^{+\infty} (e^{(2h)}, v)\, e^{(2h)}\right) e^{(2k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{h=1}^{+\infty} (e^{(2h)}, v) \underbrace{(e^{(2k)}, e^{(2h)})}_{\delta_{kh} = \begin{cases} 1, & k=h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}} e^{(2k)}$$

$\Rightarrow$ solo $h = k$ contribuisce alla somma su h.

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{(2k)}, v)\, e^{(2k)} = P(v)$$

$$\Rightarrow P^2 = P.$$

Supponiamo che $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore, allora $\exists\, v \in H$, $v \neq 0$ con:

$$P(v) = \lambda v$$

Applichiamo P ad entrambi i membri:

$$\underbrace{P^2(v)}_{= P(v) = \lambda v} = \underbrace{\lambda P(v)}_{= \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v}$$

Dunque: $\lambda v = \lambda^2 v$

$$\Rightarrow (\lambda^2 - \lambda) v = 0$$

Essendo $v \neq 0$ deve essere: $\lambda^2 - \lambda = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda = 1$ oppure $\lambda = 0$.

In effetti: $\underbrace{P(e^{(1)}) = 0}_{\lambda = 0}$, $\underbrace{P(e^{(2)}) = e^{(2)}}_{\lambda = 1}$.

$\lambda = 0, 1$ sono entrambi autovalori.