ESERCIZIO 1

$$f(z) = \left(\log(z-1) - \log(z+1)\right)\frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z+1}}$$

I)

$\log(z-1)$ e $\sqrt{z-1}$: punti di diramazione in $z = 1$ e $z = \infty$

$\log(z+1)$ e $\sqrt{z+1}$: punti di diramazione in $z = -1$ e $z = \infty$

Le funzioni $\log(z-1) - \log(z+1)$ e $\frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z+1}}$ però non hanno più un punto di diramazione in $z = \infty$. Infatti per $|z|$ grande:

$$z \to z e^{2i\pi} \text{ dà } \begin{aligned} \log(z-1) &\to \log(z-1) + 2\pi i \\ \log(z+1) &\to \log(z+1) + 2\pi i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \log(z-1) - \log(z+1) \longrightarrow \log(z-1) - \log(z+1)$$

e analogamente: $\sqrt{z-1} \longrightarrow -\sqrt{z-1}$

$\sqrt{z+1} \longrightarrow -\sqrt{z+1}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z+1}} \longrightarrow \frac{\sqrt{z-1}}{\sqrt{z+1}}.$$

Dunque per $f(z)$ gli unici punti di diramazione sono $z = +1$ e $z = -1$.

Non ci sono altre singolarità per valori finiti di z. Espandendo per $z \to \infty$:

$$f(z) \underset{z\to\infty}{=} \left(\cancel{\log z} + \log\left(1-\frac{1}{z}\right) - \cancel{\log z} - \log\left(1+\frac{1}{z}\right)\right) \times \frac{\cancel{\sqrt{z}}\,\sqrt{1-1/z}}{\cancel{\sqrt{z}}\,\sqrt{1+1/z}}$$

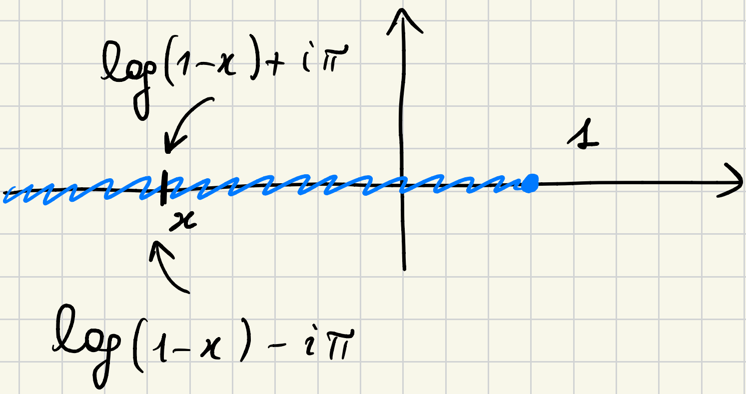
$$= \left(-\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) - \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

$$= -\frac{2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$$

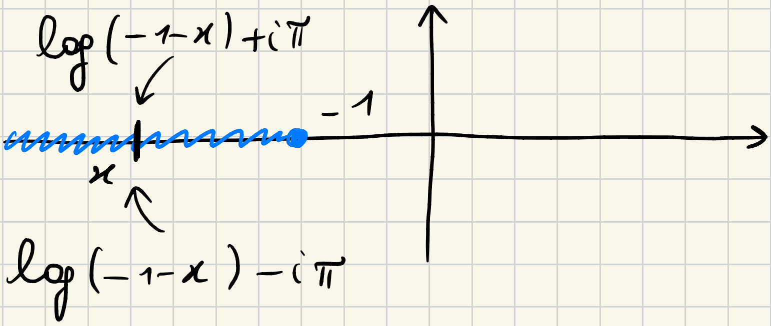
$\Rightarrow f$ è regolare a $z = \infty$.

II) Prendendo il ramo principale per $\log(\cdot)$ e $\sqrt{\cdot}$, abbiamo i seguenti tagli e valori sopra/sotto:

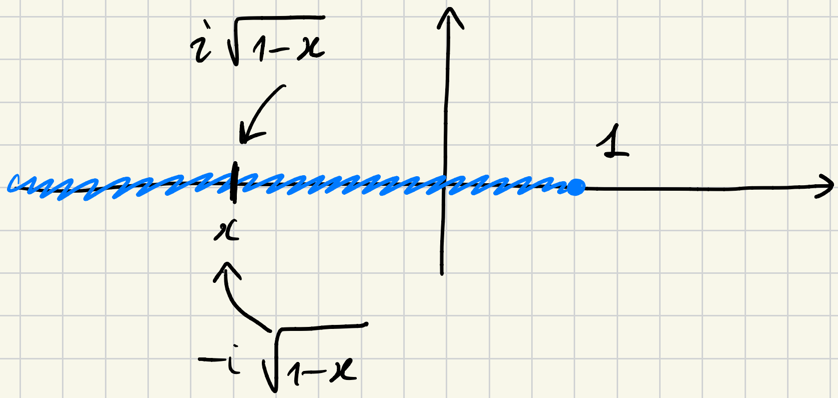
$\log(z-1)$:



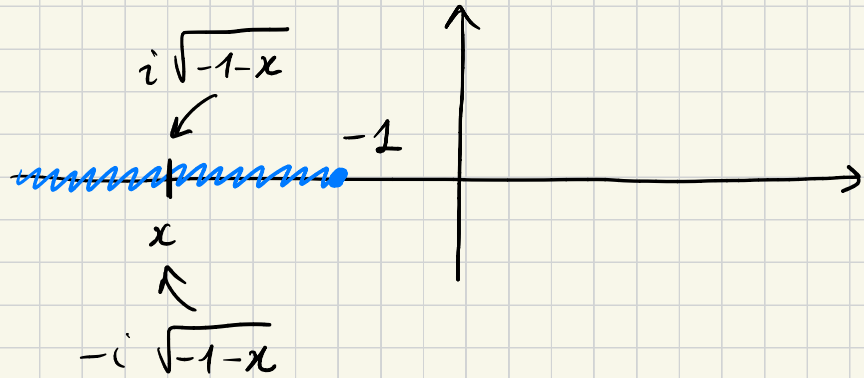
$\log(z+1)$:



$\sqrt{z-1}$:

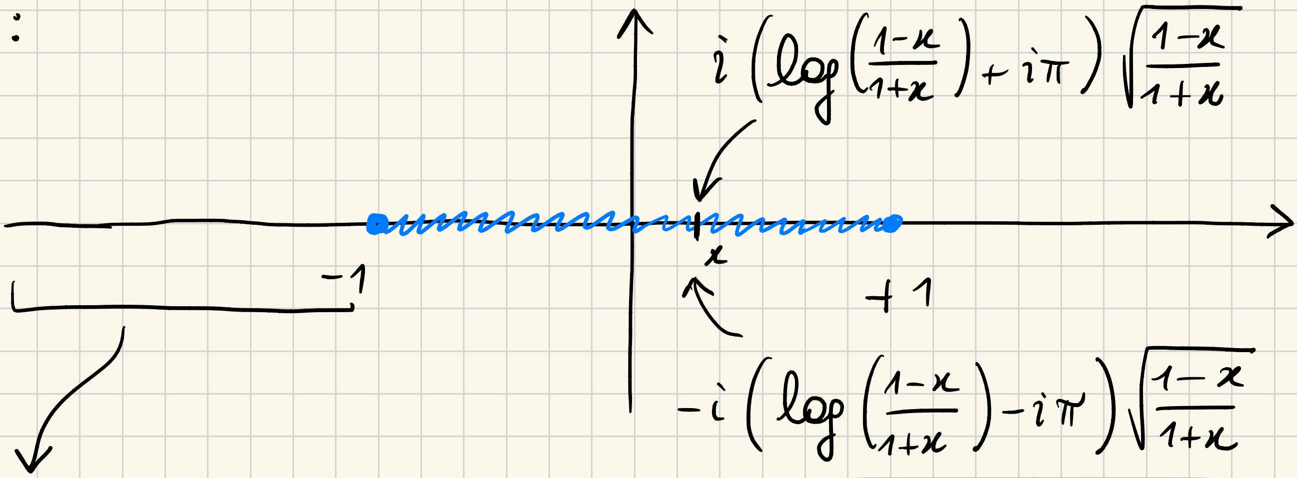


$\sqrt{z+1}$:



Mettendo insieme abbiamo per $f(z)$:

$f(z)$:



qui il taglio si cancella

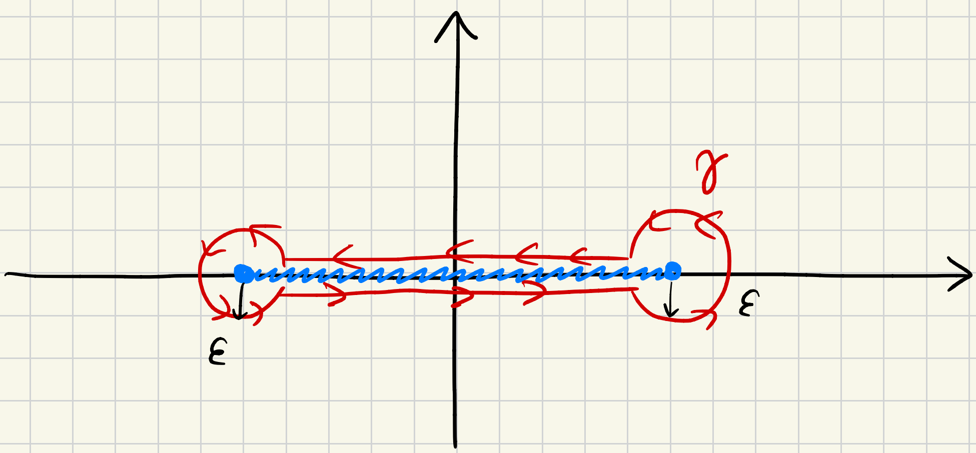
perché:
$$f^{\text{sopra}}(x) = \left(\log(1-x)\cancel{+i\pi} - \log(-1-x)\cancel{-i\pi}\right)\frac{\cancel{i}\sqrt{1-x}}{\cancel{i}\sqrt{-1-x}}$$
$$= \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$f^{\text{sotto}}(x) = \left(\log(1-x)\cancel{-i\pi} - \log(-1-x)\cancel{+i\pi}\right)\frac{\cancel{-i}\sqrt{1-x}}{\cancel{-i}\sqrt{-1-x}}$$

$$= \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = f^{\text{sopra}}(x).$$

Per $x \in (-1, 1)$ notiamo che:

$$f^{\text{sotto}}(x) - f^{\text{sopra}}(x) = -2i \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$



$$\oint_\gamma dz\, f(z) = \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} dx \left(f^{\text{sotto}}(x) - f^{\text{sopra}}(x)\right)$$

$$+ \int_{\gamma_{1,\varepsilon}} dz\, f(z) \qquad + \int_{\gamma_{-1,\varepsilon}} dz\, f(z)$$

$\gamma_{\pm 1,\varepsilon}$: cerchi centrati in ± 1 di raggio ε.

$$\left|\int_{\gamma_{-1,\varepsilon}} dz\, f(z)\right| \leq 2\pi\varepsilon \max_{\substack{z=-1+\varepsilon e^{i\theta} \\ \theta\in[0,2\pi)}} |f(z)|$$

$$= 2\pi\varepsilon \max_{\theta\in[0,2\pi)} \left|\log\left(-2+\varepsilon e^{i\theta}\right) - \log\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)\right| \left|\frac{\sqrt{-2+\varepsilon e^{i\theta}}}{\sqrt{\varepsilon e^{i\theta}}}\right|$$

$$= 2\pi\,\varepsilon\,|\log(\varepsilon)|\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{|\log(\varepsilon)|}\right)\right)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$$

$$= 2\pi\sqrt{\varepsilon}\,|\log(\varepsilon)|\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{|\log(\varepsilon)|}\right)\right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0$$

Con una stima analoga:

$$\left|\int_{\gamma_{1,\varepsilon}} dz\, f(z)\right| \leqslant 2\pi\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\,|\log(\varepsilon)|\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{|\log(\varepsilon)|}\right)\right)$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0$$

Pertanto: $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\gamma_{\pm 1,\epsilon}} dz\, f(z) = 0.$

e otteniamo:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\oint dz\, f(z) = \int_{-1}^{+1} dx\left(f^{\text{sotto}}(x) - f^{\text{sopra}}(x)\right)$$

$$= -2i\int_{-1}^{+1} dx\,\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$= -2i\ I$$

III) $I = -\frac{1}{2i} \lim_{\epsilon \to 0^+} \oint dz\, f(z)$

Calcoliamo questo integrale usando il teorema esterno dei residui:

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2i}\left(-2\pi i \, Res_f(\infty)\right) = \pi \, Res_f(\infty)$$

Dallo sviluppo calcolato prima per $z \to \infty$:

$$f(z) = -\frac{2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \rightsquigarrow c_1 = -2.$$

ricaviamo che: $Res_f(\infty) = +2$

Pertanto: $I = 2\pi$.

ESERCIZIO 2

$$F''(x) = G(x) + \delta(x)$$

I) Applichiamo la trasformata di Fourier all'equazione, usiamo la linearità e anche:

$$\widehat{F''}(k) = (-ik)^2 \hat{F}(k) = -k^2 \hat{F}(k),$$

$\hookrightarrow$ proprietà della trasformata della derivata

$$\hat{\delta}(k) = 1,$$

per ottenere: $-k^2 \hat{F}(k) = \hat{G}(k) + 1$,

da cui: $$\hat{F}(k) = -\frac{\hat{G}(k)+1}{k^2}.$$

Nota: è necessaria qualche assunzione sul comportamento di $\hat{G}$ per $k \to 0$ affinché questa espressione possa essere trasformata di una funzione in L^1 o L^2 (si veda prossimo punto). Se ammettiamo soluzioni generale come distribuzioni temperate, allora possiamo anche aggiungere: $A_1 \delta(k) + A_2 \delta'(k)$ con A_1, A_2 costanti arbitrarie.

II) Assumendo che $G(x)$ sia in $L^1(\mathbb{R})$, abbiamo che $\hat{G}(k)$ è una funzione continua e limitata. Di conseguenza:

$$\hat{F}(k) = -\frac{\hat{G}(k)+1}{k^2}$$

decresce per $|k| \to +\infty$ almeno come $1/|k|^2$, quindi $|\hat{F}(k)|^2$ è integrabile intorno a $|k| \to +\infty$.

Inoltre grazie alle proprietà di $\hat{G}(k)$, $\hat{F}(k)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ tranne al più $k=0$, in cui può avere una divergenza.

Usando l'ipotesi: $\hat{G}(k) \underset{k\to 0}{=} -1 + \mathcal{O}(|k|^{\alpha})$

otteniamo che:

$$\hat{F}(k) \underset{k\to 0}{=} \mathcal{O}(|k|^{\alpha-2})$$

Imponiamo ora che $F(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Questo implica che $\hat{F}(k)$ sia continua e limitata, e per lo sviluppo asintotico ottenuto sopra questo implica che deve essere $\boxed{\alpha \geq 2}$, per evitare la divergenza per $k \to 0$.

Se invece imponiamo che $F(x) \in L^2(\mathbb{R})$, abbiamo che $\hat{F}(k) \in L^2(\mathbb{R})$, di conseguenza possiamo anche ammettere una divergenza per $k \to 0$ purché $|\hat{F}(k)|^2$ sia integrabile. Questo richiede:

$$|\hat{F}(k)|^2 \underset{k\to 0}{=} \mathcal{O}(|k|^{2\alpha-4}), \quad 2\alpha - 4 \geq -1$$

$\Rightarrow \quad 2\alpha \geq 4-1=3 \quad \Rightarrow \boxed{\alpha \geq \frac{3}{2}}$

In questo secondo caso è vero anche il viceversa: $\alpha \geq \frac{3}{2} \Rightarrow F(x) \in L^2(\mathbb{R})$

perché: $\hat{F} \in L^2(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow F \in L^2(\mathbb{R})$.

Non possiamo dire lo stesso per la prima condizione trovata, perché $\hat{F} \in C^0(\mathbb{R})$ non implica che $F \in L^1(\mathbb{R})$.

ESERCIZIO 3

$$F(t) = t(1-|t|)$$

I) Serie di Fourier su $L^2([-1,1])$:

$$F(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha_n \cos(n\pi t) + \beta_n \sin(n\pi t)\right)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} dt\, F(t)$$

$$\alpha_n = \int_{-1}^{+1} dt \cos(n\pi t) F(t), \quad \beta_n = \int_{-1}^{+1} dt \sin(n\pi t) F(t)$$

$\forall n \geq 1$. Visto che $F(t)$ è dispari: $F(t) = -F(-t)$

abbiamo che: $\alpha_0 = 0 = \alpha_n, \ \forall n \geq 1$

Inoltre visto che $\sin(n\pi t)F(t)$ è pari possiamo riscrivere:

$$\beta_n = 2\int_0^1 dt\, \sin(n\pi t) F(t)$$

$$= 2\int_0^1 dt\, \sin(n\pi t)(t-t^2)$$

$$= 2\left[\cancel{\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}} - \left(\cancel{\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}} - \frac{2}{(n\pi)^3}\left(1-(-1)^n\right)\right)\right]$$

↓
usando linearità
e gli integrali forniti nel suggerimento

$$= \frac{4}{(n\pi)^3}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \dfrac{8}{(n\pi)^3} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow F(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ dispari}}}^{+\infty} \frac{8}{(n\pi)^3}\sin(n\pi t)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8}{((2k-1)\pi)^3}\sin((2k-1)\pi t)$$

↓
scrivendo un generico dispari ≥ 1 come:

$n = 2k-1$, $k \geq 1$

II) Notiamo che per $t = 1/2$ vale:

$$\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (-1)^{k-1}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{F\left(\frac{1}{2}\right)}_{} = \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3}$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Usando Parseval abbiamo:

$$\|F\|^2_{L^2([-1,1])} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{64}{((2k-1)\pi)^6}$$

$$\|$$

$$2\int_0^{+1} dt\, t^2(1-t)^2 = 2\int_0^{+1} dt\left(t^2 - 2t^3 + t^4\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{2}{4}}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = 2\,\frac{10-15+6}{30} = 2\,\frac{1}{30} = \frac{1}{15}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{64}\cdot\frac{1}{15} = \frac{\pi^6}{320\cdot 3} = \frac{\pi^6}{960}.$$