ESERCIZIO 1

$$f(z) = \frac{z^2\left(1+\cos\left(\pi/z\right)\right)}{(z-1)^3}$$

I) Singolarità dell'argomento del coseno:

$z=0 \rightsquigarrow$ singolarità essenziale perché ci sono ∞ potenze negative dall'espansione del coseno.

Singolarità dallo zero del denominatore:

$z=1 \rightsquigarrow$ il denominatore ha zero di ordine 3, però non è un polo di ordine 3 per $f(z)$ perché anche il numeratore si annulla:

$$1+\cos(\pi) = 0$$

Per capire l'ordine dobbiamo espandere:

$$\cos\left(\frac{\pi}{z}\right) \underset{z\to 1}{=} -1 + \left(\frac{d}{dz}\cos\left(\frac{\pi}{z}\right)\right)\Big|_{z=1}(z-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dz^2}\cos\left(\frac{\pi}{z}\right)\right)\Big|_{z=1}(z-1)^2 + O\left((z-1)^3\right)$$

$$= -1 + \left(-\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)\left(-\frac{\pi}{z^2}\right)\right)\Big|_{z=1}(z-1)$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)\frac{2\pi}{z^3} - \cos\left(\frac{\pi}{z}\right)\left(-\frac{\pi}{z^2}\right)^2\right)\Big|_{z=1}(z-1)^2 + O\left((z-1)^3\right)$$

$$= -1 + 0 \cdot (z-1) + \frac{1}{2}\left(0 - (-1)(+\pi^2)\right)(z-1)^2 + O\left((z-1)^3\right)$$

$$= -1 + \frac{\pi^2}{2}(z-1)^2 + O\left((z-1)^3\right)$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \cos\left(\frac{\pi}{z}\right) \underset{z \to 1}{=} \frac{\pi^2}{2}(z-1)^2 + O\left((z-1)^3\right)$$

Di conseguenza, il numeratore ha uno zero di ordine 2. Pertanto, la funzione $f(z)$ ha un polo di ordine 1 in $z = 1$.

Rimane da discutere il comportamento per $z \to \infty$. Abbiamo:

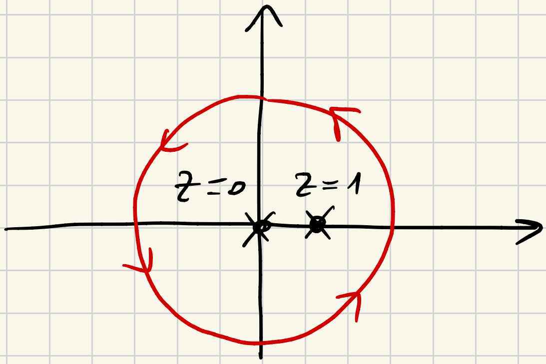
$$f(z) = \frac{z^2}{z^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)^3} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{z}\right)\right)$$

$$\underset{z \to \infty}{=} \frac{1}{z}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)\left(1 + 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{z}\left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

quindi la funzione è regolare per $z \to \infty$.

II) $\oint_{\gamma_{0,2}} dz\, f(z)$ $\gamma_{0,2}$: cerchio di raggio 2 centrato in $z=0$



Usiamo il teorema esterno dei residui.

$$\oint_{\gamma_{0,2}} dz\, f(z) = -2\pi i \; Res_f(\infty)$$

$= -2\pi \left(- \text{coefficiente di } \frac{1}{z} \text{ nello sviluppo in } z=\infty \right)$

Dal calcolo fatto al punto I:

$$f(z) \underset{z\to\infty}{=} \frac{2}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

$$\Rightarrow \; Res_f(\infty) = -2$$

$$\Rightarrow \; \oint_{\gamma_{0,2}} f(z)\, dz = 4\pi i$$

III) Calcolando lo stesso integrale con il teorema interno dei residui abbiamo:

$$4\pi i = 2\pi i \, \mathrm{Res}_f(z=1) + 2\pi i \, \mathrm{Res}_f(z=0)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}_f(z=0) = 2 - \mathrm{Res}_f(z=1)$$

Possiamo calcolare il residuo in $z=1$ usando lo sviluppo fatto al punto I:

$$\mathrm{Res}_f(z=1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z)$$

$$= \lim_{z\to 1}\left(\cancel{(z-1)} \frac{z^2}{(z-1)^3 2}\left(\frac{\pi^2}{2}(z-1)^2 + O(z-1)^3\right)\right)$$

$$= \lim_{z\to 1}\left(\frac{\pi^2}{2} z^2 + O(z-1)\right) = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}_f(z=0) = 2 - \frac{\pi^2}{2}.$$

ESERCIZIO 2

$$\hat{F}(\omega) = \cos(\omega)\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}\,\frac{1}{\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\omega}\right)}$$

I) Notiamo che $\hat{F}$ e $\hat{G}$ sono funzioni continue per qualsiasi $\omega \neq 0$ e hanno una discontinuità finita in $\omega = 0$. Usando il suggerimento:

$$\lim_{\omega \to 0^\pm} \hat{F}(\omega) = 1 \cdot \lim_{\omega \to 0^\pm} \operatorname{atan}\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

$$= 1 \cdot \lim_{y \to \pm\infty} \operatorname{atan}(y) = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \to 0^\pm} \hat{G}(\omega) = 1 \cdot \lim_{\omega \to 0^\pm} \frac{1}{\operatorname{atan}\left(\frac{1}{\omega}\right)} = \pm \frac{2}{\pi}$$

Quindi $|\hat{F}|^2$ e $|\hat{G}|^2$ sono integrabili su qualsiasi intervallo finito della retta reale e per dimostrare che $\hat{F}, \hat{G} \in L^2(\mathbb{R})$ rimane solo da controllare il comportamento per $|\omega| \to +\infty$. Abbiamo:

$$|\hat{F}(\omega)| \underset{|\omega| \to +\infty}{=} |\cos(\omega)| \left| \frac{1}{\omega} + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{|\omega|} \left(1 + O\left(\frac{1}{|\omega|^2}\right)\right)$$

$\Rightarrow |\hat{F}(\omega)|^2$ va come $\frac{1}{|\omega|^2}$ per $|\omega| \to +\infty$ e quindi è integrabile $\Rightarrow \hat{F}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$.

$$|\hat{G}(\omega)| \underset{|\omega|\to+\infty}{=} \frac{1}{\underbrace{|\omega|^2 \left|1+\frac{1}{\omega^2}\right|}_{\text{da } (1+\omega^2)} \underbrace{\frac{1}{|\omega|}\left(1+O\left(\frac{1}{|\omega|^2}\right)\right)}_{\text{da } \operatorname{atan}\left(\frac{1}{\omega}\right) \text{ come visto sopra.}}}$$

$$= \frac{1}{|\omega|}\left(1+O\left(\frac{1}{|\omega|^2}\right)\right)$$

$\Rightarrow |\hat{G}(\omega)|^2$ va come $\frac{1}{|\omega|^2}$ per $|\omega| \to +\infty$ e quindi è integrabile $\Rightarrow \hat{G}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$.

Visto che la trasformata di Fourier è una mappa invertibile su $L^2(\mathbb{R})$, concludiamo che $F(t), G(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Inoltre visto che la trasformata di una funzione in $L^1(\mathbb{R})$ è continua, e $\hat{F}$ e $\hat{G}$ sono discontinue come mostrato sopra, concludiamo che $F(t), G(t) \notin L^1(\mathbb{R})$.

Visto che $\hat{F}(\omega)$ e $\hat{G}(\omega)$ sono in $L^2(\mathbb{R})$, il loro prodotto è in $L^1(\mathbb{R})$ e vale:

$$\widehat{\hat{F}\cdot\hat{G}}(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\hat{\hat{F}} * \hat{\hat{G}}\right)(t)$$

D'altra parte: $$\hat{\hat{F}}(t) = 2\pi\, F(-t)$$
$$\hat{\hat{G}}(t) = 2\pi\, G(-t)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\hat{F}} * \hat{\hat{G}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, 2\pi\, F(-t')\; 2\pi\, G(-t+t')$$

$$\underset{t'=-y}{=} (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, F(y)\, G(-t-y) = (2\pi)^2 (F*G)(-t)$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{\hat{F}\cdot\hat{G}}(t) = 2\pi\,(F*G)(-t)$$

D'altra parte: $$\hat{F}(\omega)\cdot\hat{G}(\omega) = \frac{\cos(\omega)}{1+\omega^2}$$

che è a quadrato sommabile $\Rightarrow \hat{F}\hat{G} \in L^2(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \quad \widehat{\hat{F}\hat{G}} \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow (F*G)(-t) \in L^2(\mathbb{R})$$

quindi vale anche $(F*G)(t) \in L^2(\mathbb{R})$

II) $(F, G)_{L^2(\mathbb{R})}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, (F(t))^* \, G(t)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left(\hat{F}(\omega)\right)^* \hat{G}(\omega)$$

↓ Identità di Parseval generalizzata

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \frac{\cos(\omega)}{1+\omega^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \frac{e^{i\omega}}{1+\omega^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\left[(2\pi i) \operatorname{Res} \frac{e^{i\omega}}{1+\omega^2} [\omega = +i] \right]$$

↳ lemma di Jordan

$$= \operatorname{Re}\left[i \frac{1}{2i} e^{i(i)} \right] = \frac{1}{2e}.$$

ESERCIZIO 3

I) Supponiamo che $\lim_{n \to +\infty} T_n = T$ in senso forte. Dati generici $v, w \in \mathcal{H}$, consideriamo il prodotto scalare: $(w, T_n(v))$.

Vogliamo mostrare che:

$$\lim_{n \to +\infty} (w, T_n(v)) = (w, T(v)).$$

A tal fine prendiamo la differenza:

$$|(w, T_n(v)) - (w, T(v))|$$

$= |(w, (T_n - T)(v))|$ ⤳ per linearità

$\leq \|w\|_{\mathcal{H}} \, \|(T_n - T)(v)\|_{\mathcal{H}}$ ⤳ per Cauchy-Schwartz

(usiamo $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ per la norma su $\mathcal{H}$ per distinguere dalla norma operatoriale che indichiamo semplicemente con $\|\cdot\|$).

$\leq \|w\|_{\mathcal{H}} \, \|T_n - T\| \, \|v\|_{\mathcal{H}}$ ⤳ per definizione di norma operatoriale

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ perché per ipotesi: $\lim_{n \to +\infty} \|T_n - T\| = 0$.

II) per ipotesi, $\forall\, w, v \in \mathcal{H}$ vale che:

$$(w, T(v)) = \lim_{n \to +\infty} (w, T_n(v))$$

Come suggerito, usiamo: $w = T(v)$

$$\Rightarrow \|T(v)\|^2_{\mathcal{H}} = \lim_{n \to +\infty} (T(v), T_n(v))$$

Visto che $\|T(v)\|^2_{\mathcal{H}} \geq 0$, vale anche:

$$\|T(v)\|^2_{\mathcal{H}} = \lim_{n \to +\infty} |(T(v), T_n(v))|$$

$$\leq \lim_{n \to +\infty} \|T(v)\|_{\mathcal{H}} \|T_n(v)\|_{\mathcal{H}}$$ per Cauchy-Schwartz

$$\leq \|T(v)\|_{\mathcal{H}} \lim_{n \to +\infty} \|T_n\| \cdot \|v\|_{\mathcal{H}}$$ per definizione di norma

$$= \|T(v)\|_{\mathcal{H}} \, L \, \|v\|_{\mathcal{H}}$$

$$\Longrightarrow \|T(v)\|^{\cancel{2}}_{\mathcal{H}} \leq \cancel{\|T(v)\|_{\mathcal{H}}} \, L \, \|v\|_{\mathcal{H}}$$

$$\|T(v)\|_{\mathcal{H}} \leq L \|v\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, v \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow \|T\| \leq L.$$