CRITERIO DI VON MISES (HUBER-HENCKY-VON MISES) 28/10/25
(MATERIALI DUTTILI)

INTERPR FISICA: SI BASA SU CONSIDERAZ. ENERGETICHE. IL CRITERIO SI BASA SULLA LIMITAZIONE DEL POTENZ. ELASTICO ASSOCIATO ALLA PARTE DEVIATORICA DELLO STATO TENSIONALE NEL PUNTO CONSIDERATO.

$$\varphi(\underset{\sim}{\sigma}) = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\sigma}\cdot\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\sigma}\cdot\mathbb{C}^{-1}\underset{\sim}{\sigma} \longrightarrow \varphi(\underset{\sim}{\sigma}) = \varphi_1(\sigma_m \underset{\sim}{I}) + \underbrace{\varphi_2(\underset{\sim}{\sigma}^{DEV})}_{\text{LIMITAZ. DI QUESTA PARTE DI } \varphi.} \quad (*)$$

DAL PUNTO DI VISTA OPERATIVO:

$$-I_2(\underset{\sim}{\sigma}^{DEV}) = J_2 = -\frac{1}{2}\left[\cancel{(\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\sigma}^{DEV})^2} - \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\sigma}^{DEV\,2}\right] = \boxed{+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{\sigma}^{DEV\,2}} \quad (*)\ (**)$$

CRITERIO DI VON MISES (DA (*) e (**))

$$\boxed{\sqrt{3J_2} - \sigma_0 \le 0} \rightsquigarrow \sigma_{ideale} \le \sigma_0 \quad ; \quad \sigma_{id} = \sqrt{3J_2}$$

$$f(\underset{\sim}{\sigma}, \sigma_0) \le 0$$

Come esprimere $J_2 = J_2(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$?

si può dimostrare (MOODLE) che $J_2 = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \underset{\sim}{\sigma}^{DEV\,2} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr} \underset{\sim}{\sigma}^2 - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} \underset{\sim}{\sigma})^2\right]$

Immaginiamo: $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_I & & 0 \\ & \sigma_{II} & \\ 0 & & \sigma_{III} \end{bmatrix}$:

$$J_2 = \frac{1}{2}\left[\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2\right] = \frac{1}{3}\left[\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - \sigma_I\sigma_{II} - \sigma_I\sigma_{III} - \sigma_{II}\sigma_{III}\right]$$

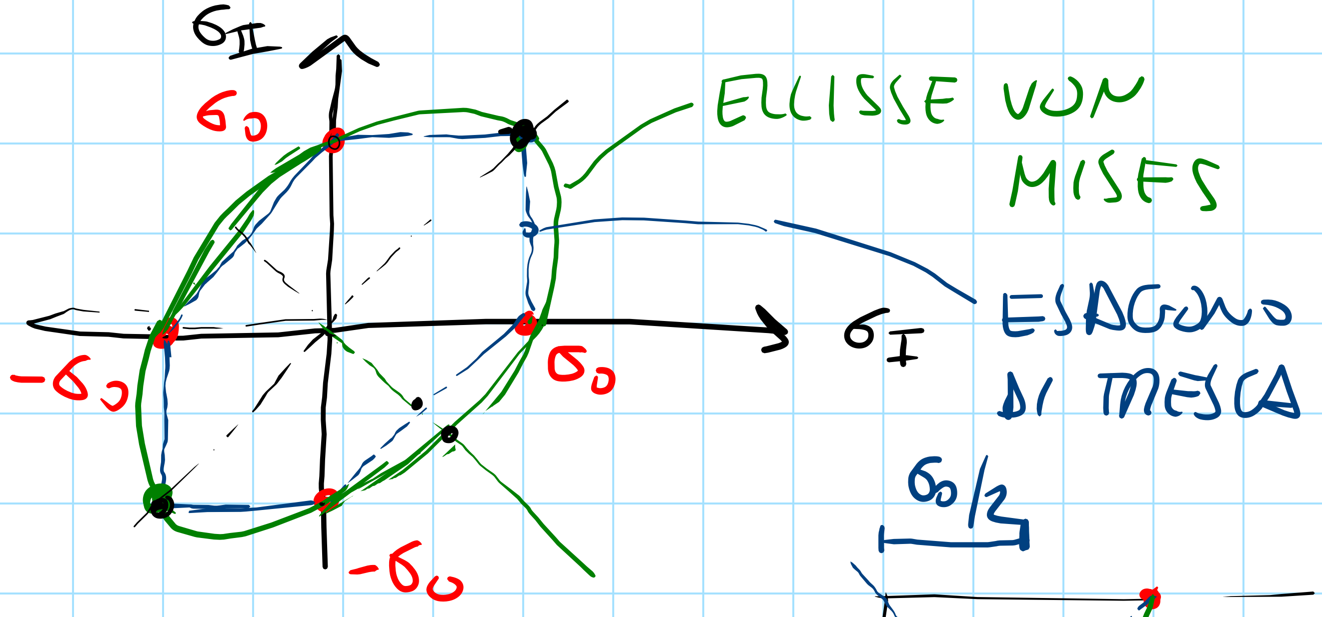
In termini di tens. principali:

$$\boxed{\sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - \sigma_I\sigma_{II} - \sigma_I\sigma_{III} - \sigma_{II}\sigma_{III}} \leq \sigma_0}$$

VON MISES IN FUNZ. DELLE TENS. PRINCIPALI

STATO PIANO DI TENSIONE $(\sigma_{III} = 0)$

$$\sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II}} \leq \sigma_0$$

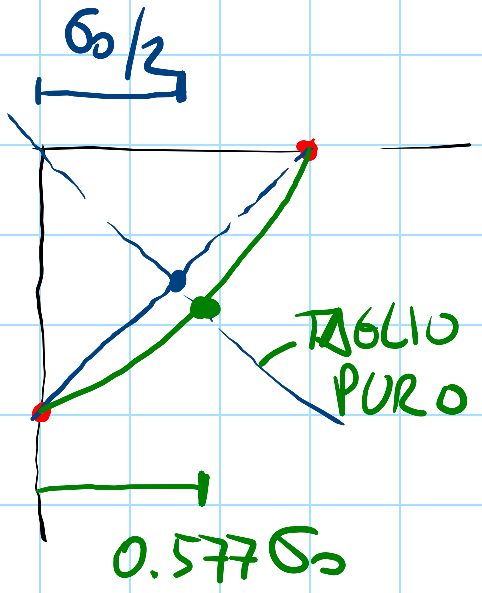


STATO BIASSIALE $\sigma_I = \sigma_{II} = \hat{\sigma}$ (max $\hat{\sigma}$?)

$$\sqrt{\hat{\sigma}^2 \cancel{+ \hat{\sigma}^2} \cancel{- \hat{\sigma}^2}} = \sigma_0 \quad ; \quad |\hat{\sigma}| = \sigma_0$$

TAGLIO PURO: $\sigma_I = +\hat{\sigma}$; $\sigma_{II} = -\hat{\sigma}$ (max $\hat{\sigma}$?)

$$\sqrt{\hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}^2} = \sigma_0 \quad ; \quad \sqrt{3}\,|\hat{\sigma}| = \sigma_0 \quad ; \quad |\hat{\sigma}| = \sigma_0/\sqrt{3} \cong 0.577\,\sigma_0$$



ES:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 150 & 30 & 0 \\ 30 & -60 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \text{(MPa)}$$

(TRIASSIALE)

LO STATO TENSIONALE È AMMISSIBILE VERIFICATO PER

→ TRESCA ?

→ VON MISES ?

$\sigma_0 = 200$ MPa

CALCOLIAMO LE TENS. PRINC. ; $\sigma_I = 154$ MPa ; $\sigma_{II} = 100$ MPa ; $\sigma_{III} = -64$ MPa

VERIF CON TRESCA : $\max\{\underbrace{|154-100|}_{54}, \underbrace{|154-(-64)|}_{218}, \underbrace{|100-(-64)|}_{164}\} \overset{?}{\leq} 200$

$218 \not\leq 200$

NON VERIF.

VERIF CON VON MISES :

$$\sqrt{154^2 + 100^2 + 64^2 - 154 \cdot 100 - 154(-64) - 100(-64)} \overset{?}{\leq} 200$$

$197 \leq 200$

VERIFICATO

OBIETTIVO: ESPRIMERE IL CR. DI VON MISES PER UNO STATO PIANO GENERICO

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0\\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad \begin{matrix}\sigma_I\\ \sigma_{II}\end{matrix}\Big\rangle = A \pm B \quad \text{(vedere Tresca)}$$

σ_{III}

$$\sqrt{(A+B)^2+(A-B)^2-(A+B)(A-B)}\leq\sigma_0\ ;\ \sqrt{A^2+B^2+\cancel{2AB}+\cancel{A^2}+B^2\cancel{-2AB}\cancel{-A^2}+B^2}\leq\sigma_0$$

$$\sqrt{A^2+3B^2}\leq\sigma_0\ ;\quad A^2+3B^2=\left(\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\right)^2+3\left[\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2\right]=$$

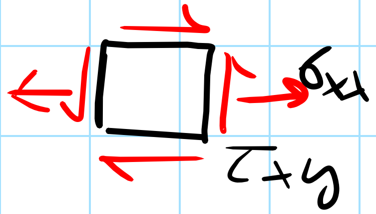
$$=\frac{\sigma_{xx}^2+\sigma_{yy}^2+2\sigma_{xx}\sigma_{yy}}{4}+\frac{3}{4}\left(\sigma_{xx}^2+\sigma_{yy}^2-2\sigma_{xx}\sigma_{yy}\right)+3\tau_{xy}^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left[4\sigma_{xx}^2+4\sigma_{yy}^2-4\sigma_{xx}\sigma_{yy}\right]+3\tau_{xy}^2=\sigma_{xx}^2+\sigma_{yy}^2-\sigma_{xx}\sigma_{yy}+3\tau_{xy}^2$$

$$\boxed{\sqrt{\sigma_{xx}^2+\sigma_{yy}^2-\sigma_{xx}\sigma_{yy}+3\tau_{xy}^2}\leq\sigma_0}$$

VON MISES CASO PIANO

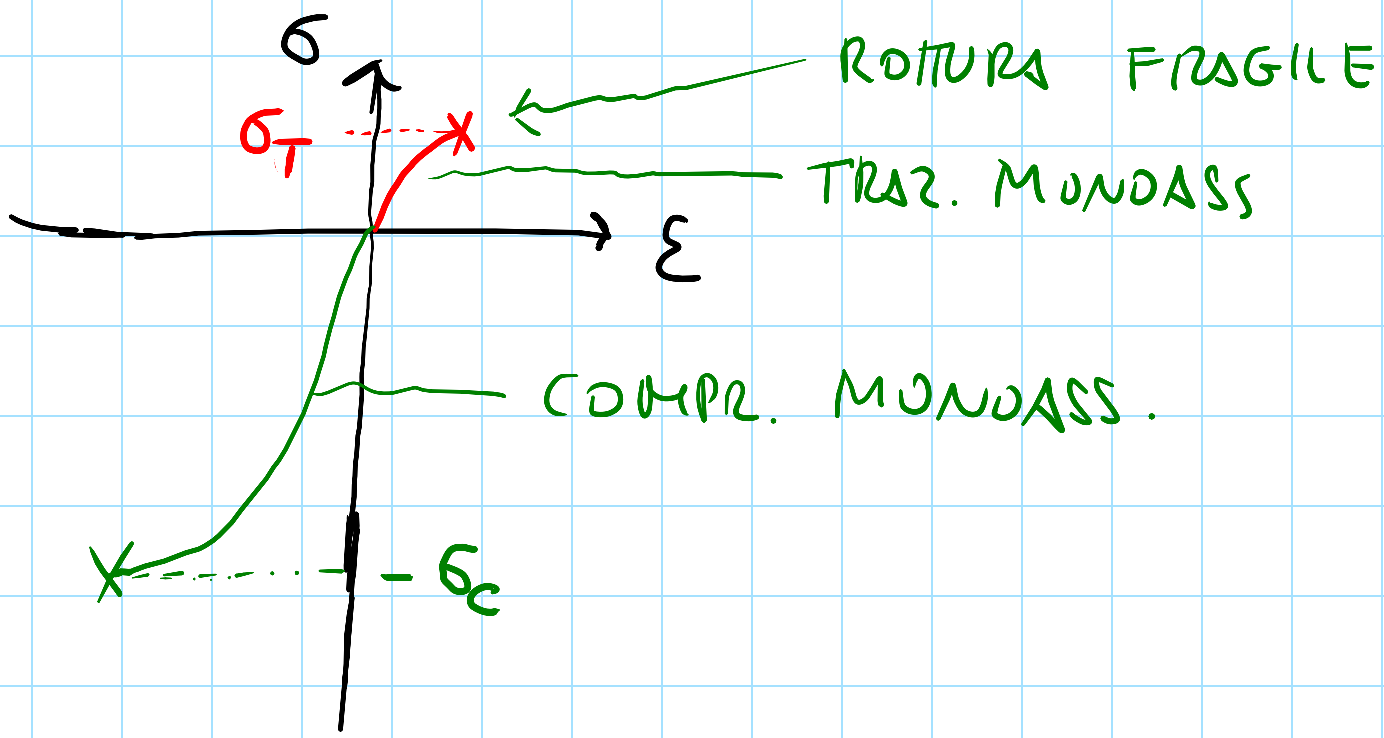
$\boxed{\sigma_{yy}=0}$



$$\sqrt{\sigma_{xx}^2+3\tau_{xy}^2}\leq\sigma_0$$

VON MISES

CENNO AI CRITERI DI RESIST. PER MATERIALI FRAGILI (CERAMICI, GEOMATERIALI)



σ_T : RESIST. A TRAZIONE > 0

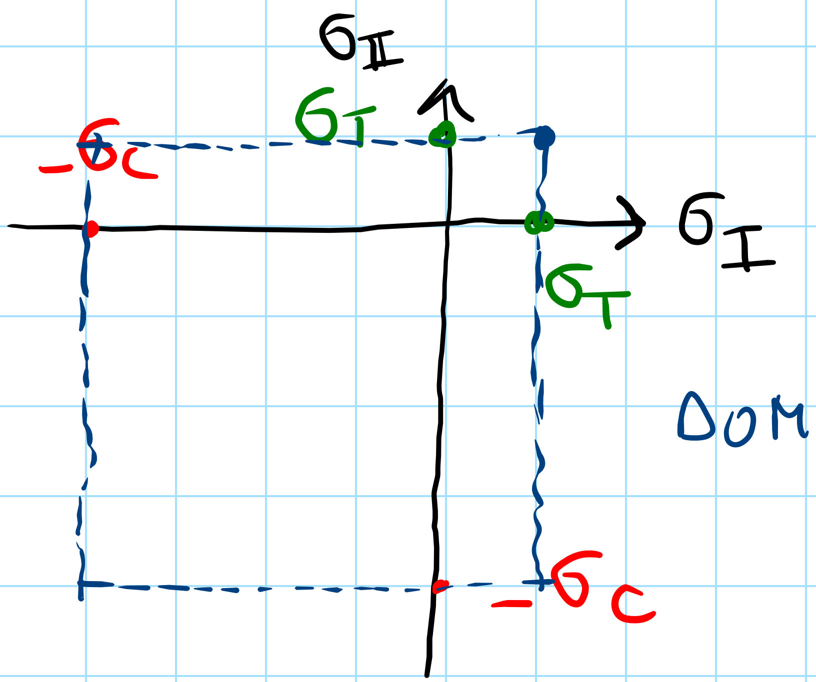
σ_c : " " COMPRESSIONE > 0

$$\boxed{\sigma_c \gg \sigma_T}$$

CRITERIO PIÙ SEMPLICE: CRITERIO DI RANKINE $(K_i = \sigma_c, \sigma_T)$ $\boxed{-\sigma_c \le \sigma_i \le \sigma_T}$

$i = I, II, III$

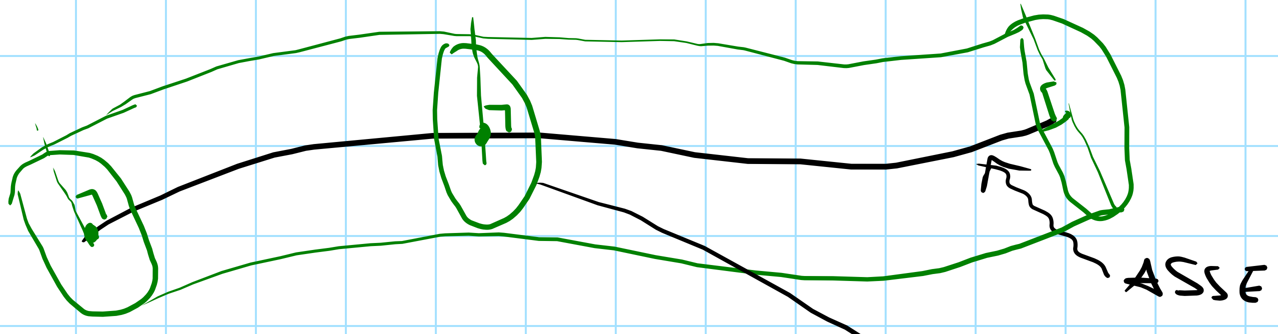
Nel caso piano $(\sigma_{III} = 0)$



DOMINIO DI RANKINE

MECCANICA DELLE STRUTTURE

LA TRAVE: È UN SOLIDO 3D GENERATO NEL MODO SEGUENTE:



L: lunghezza dell'asse (della trave)

d: dimens. caratteristica della sez.

$\boxed{d << L}$

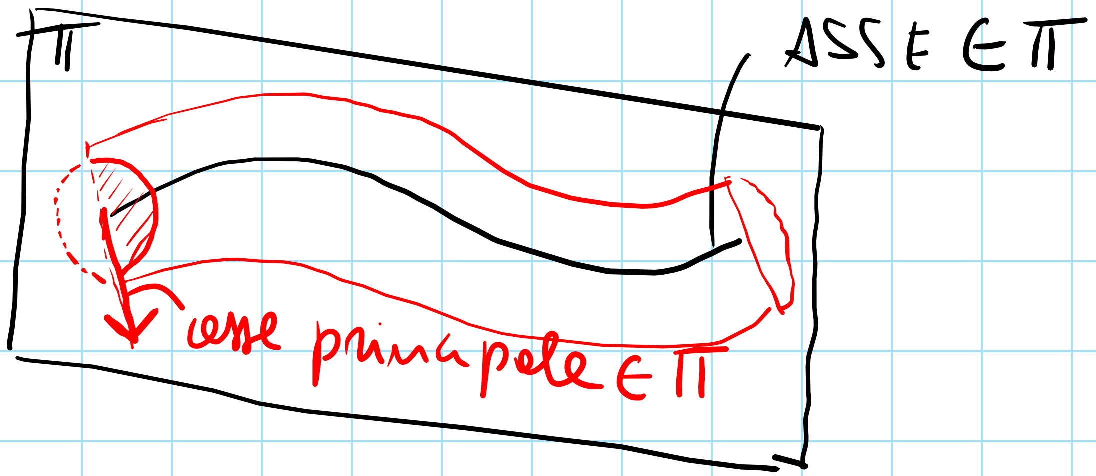
SEZ. TRASVERSALE DELLA TRAVE

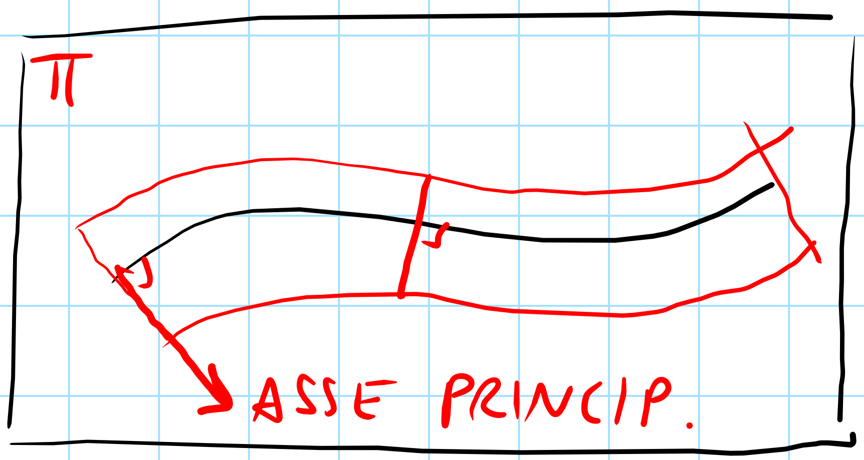
ASSI PRINCIPALI

IN OGNI PUNTO LA SEZ. È ⊥ ALL'ASSE

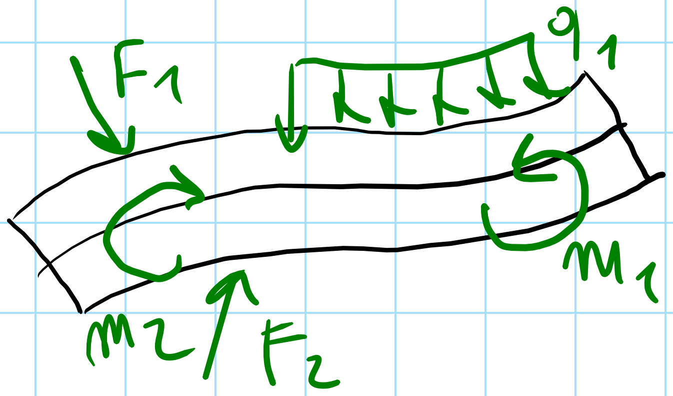
TRAVE: solido a sviluppo MONODIMENSIONALE

TRAVE PIANA





TRAVE PIANA + CARICHI NEL PIANO

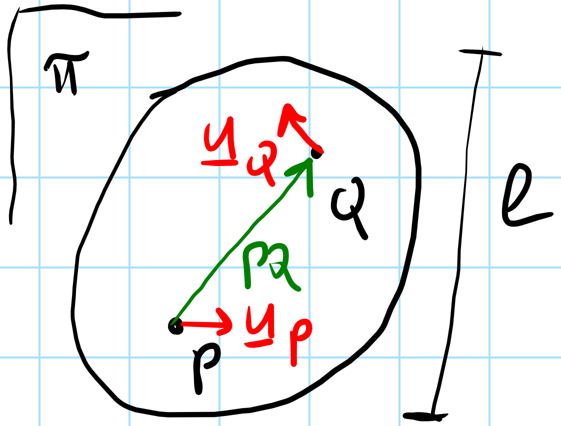


PROBLEMA DI STATICA DELLA TRAVE NEL PIANO

$\Rightarrow$ ECS: 3 EQ. SCALARI

DA ORA IN POI DISEGNIAMO LE TRAVI SOLO ATTRAVERSO LA LINEA D'ASSE, CON ALCUNE ECCEZIONI

CINEMATICA DEI MOTI RIGIDI INFINITESIMI NEL PIANO



$$\underline{u}_Q = \underline{u}_P + \underline{\omega} \times PQ$$

VETTORE ROTAZ. INFINIT. $(\perp \pi)$

$$|\underline{\omega}| = \varphi$$

$$|\underline{u}_Q|, |\underline{u}_P| << \ell \quad ; \quad \varphi << 1$$

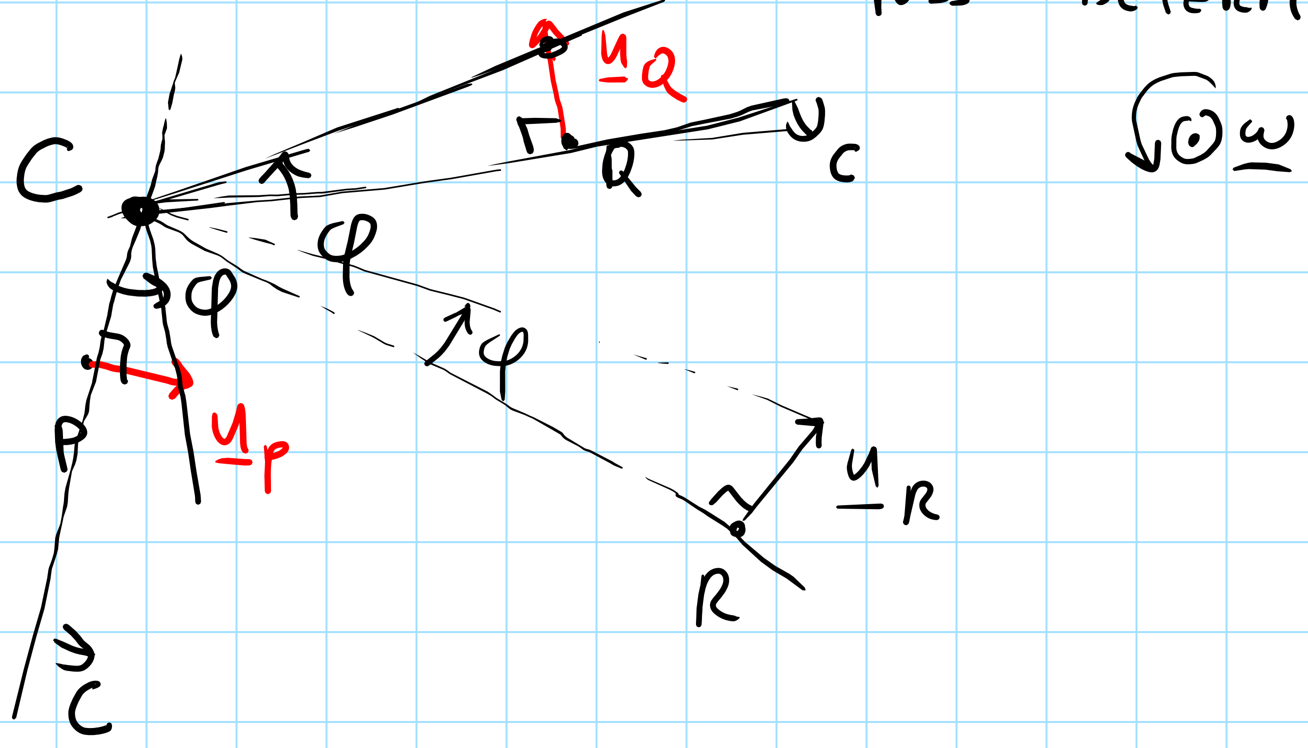
$\forall$ MOTO RIGIDO INFINITESIMO, $\exists$ UN PUNTO C (CENTRO ISTANTANEO DI ROTAZ. C.I.R.) IL CUI SPOSTAMENTO È NULLO $(\underline{u}_C = \underline{0})$. C PUÒ ESSERE PROPRIO O IMPROPRIO (DIREZ. DEL PIANO).

STUDIAMO ALCUNI CASI PER CAPIRE IL RUOLO DI $\mathcal{C}$.

1) NOTI $\underline{u}_Q$, $\underline{u}_P$: POSSO DETERM. LA POSIZ DI C?

POSSO DETERM φ?

$$\underline{u}_Q = \underline{\omega} \times CQ \qquad \underline{u}_P = \underline{\omega} \times CP \qquad \begin{pmatrix} \underline{u}_Q \perp CQ \\ \underline{u}_P \perp CP \end{pmatrix}$$

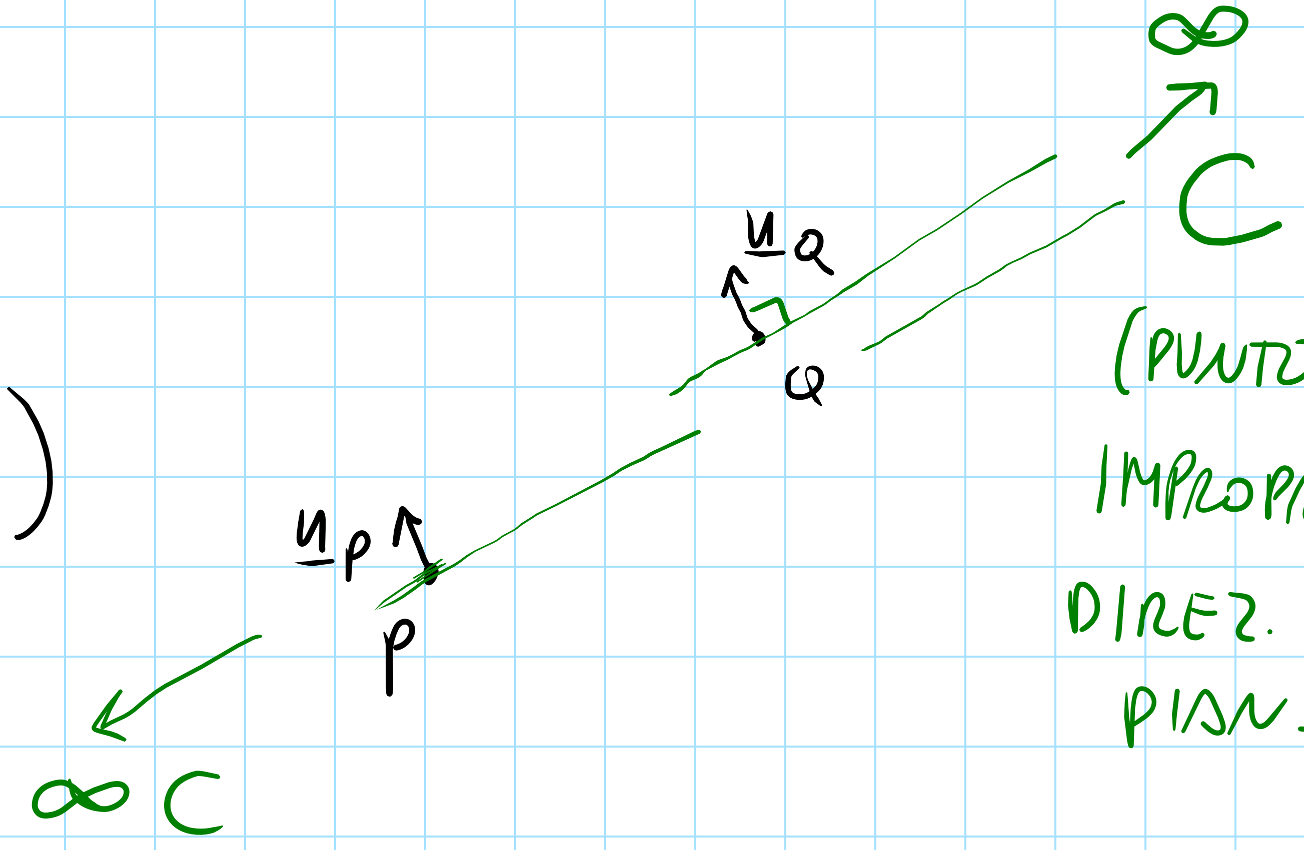


φ e C SONO UNICI PER UNA ASSEGNATA ROTOTRASL. INFINIT.

1a) NOTI $\underline{u}_Q$ e $\underline{u}_P$ (UGUALI TRA DI LORO)

TRASLAZIONE

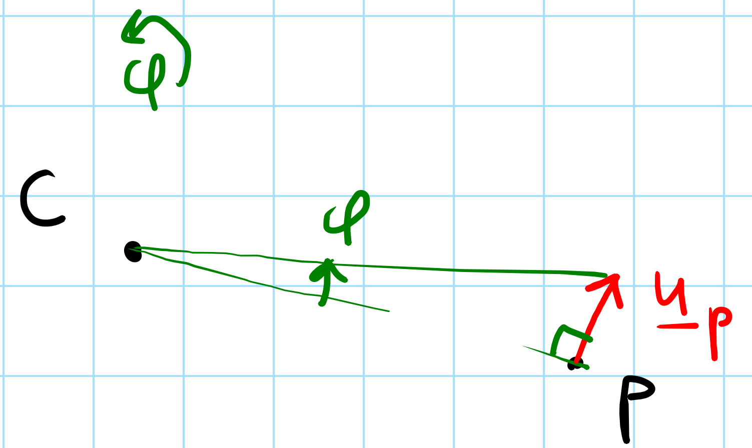
$(\underline{\omega} = \underline{0})$



(PUNTO IMPROPRIO: DIREZ. DEL PIANO)

2) NOTI C e φ: POSSO DETERMINARE $\underline{u}_P$, $\forall P$?

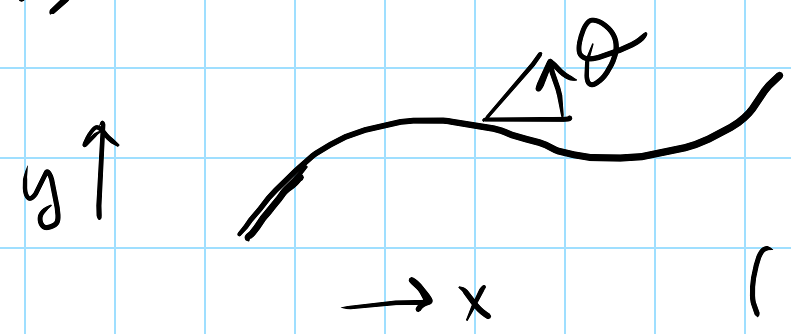
$$\boxed{\underline{u}_P = \underline{\omega} \times CP}$$



VINCOLI NEL PIANO

VINCOLO: È UN QUALSIASI DISPOSITIVO IN GRADO DI IMPEDIRE IL LIBERO MOVIMENTO DI UN SIST. MECCANICO.

PER IL MOMENTO, IL SIST. MECCANICO DI CUI CI OCCUPIAMO è IL CORPO RIGIDO (TRAVE RIGIDA)



TRAVE NEL PIANO

(3 G.D.L.)

VINCOLI NEL PIANO

Possibilità di classificazione dei vincoli:

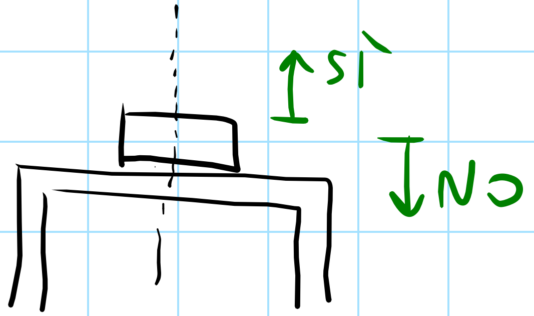
a) FISSI o CEDEVOLI (molle)

b) ESTERNI o INTERNI (al sist. meccanico)

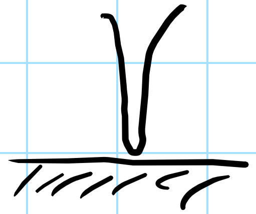
c) BILATERI o MONOLATERI

d) LISCI o SCABRI (con attrito)

e) PUNTUALE o CONTINUO



TAVOLO ES. DI VINCOLO MONOLATERO



—— : STUDIO INIZIALE DEI VINCOLI

—— : APPROFONDIM.