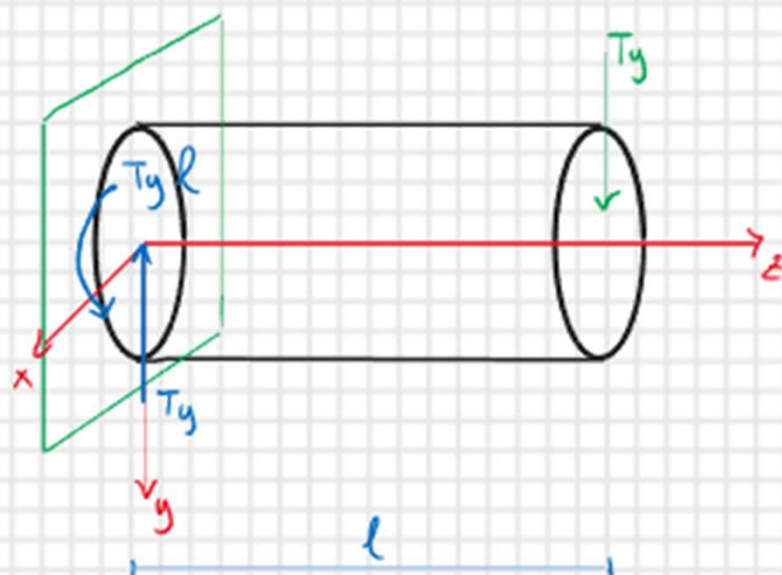


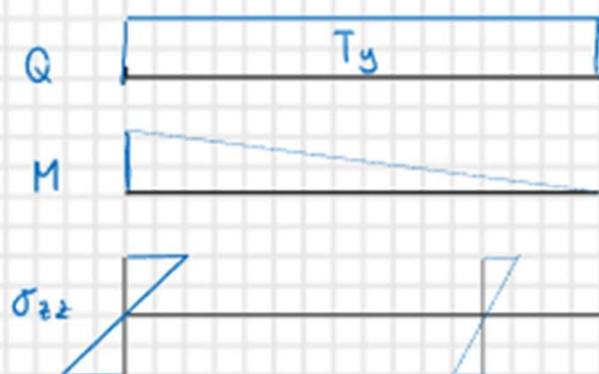
Titolo: Flessione - Taglio



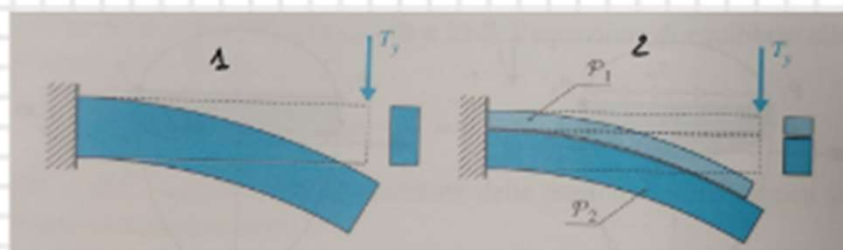
$$M(z) = -T_y l + T_y z = -T_y (l - z)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{M}{I_x} y = -\frac{T_y (l - z)}{I_x} y$$

$$\sigma_{zz}(y, z)$$



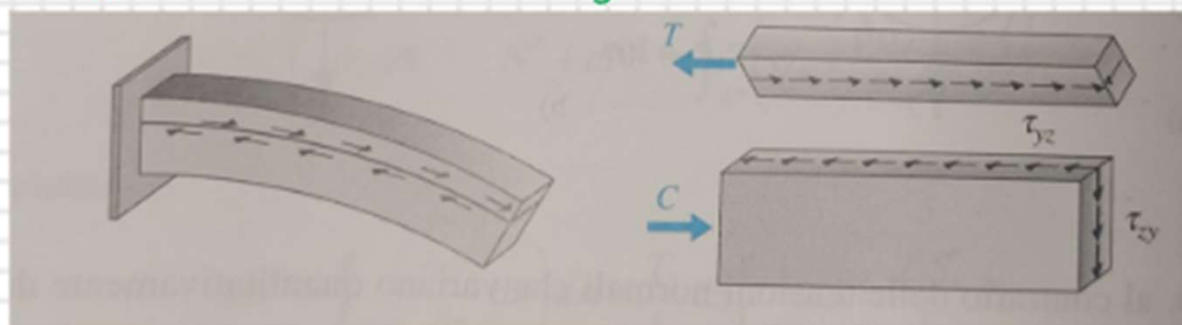
Sforzi tangenziali $\tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{xz}, \tau_{zx}$



$$\rightarrow J_x' = 4 J_x''$$

$$x \quad \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline h \\ \hline \end{array} \quad J_x' = \frac{b h^3}{12}$$

$$x \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline h \\ \hline \end{array} \quad J_x'' = \frac{b h^3}{12}$$



Calcolo delle tensioni tangenziali

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

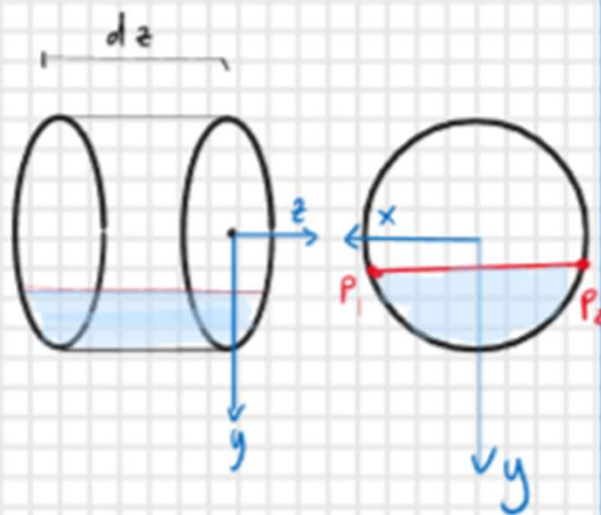
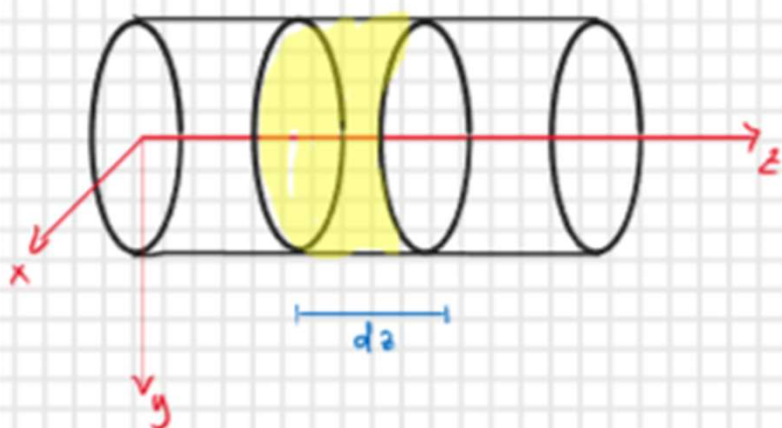
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

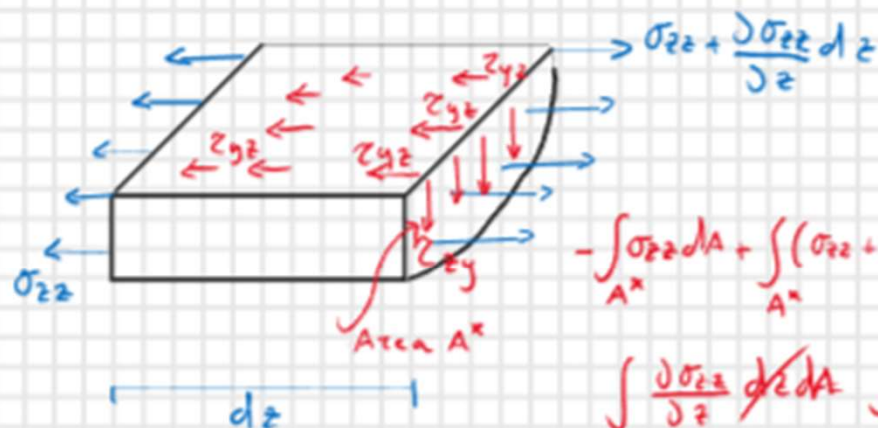
$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \longrightarrow \tau_{zx} = f(x, y)$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \longrightarrow \tau_{zy} = f(x, y)$$



Equilibrio in direzione orizzontale del conico azzurro di lunghezza dz



$S = \overline{P_1 P_2}$ corda

$$-\int_{A^*} \sigma_{zz} dA + \int_{A^*} \left(\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz \right) dA - \int_S \tau_{yz} ds dz = 0$$

$$\int \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz dA - \int_S \tau_{yz} ds dz = 0$$

$$\sigma_{zz} = \frac{M}{I_x} y = - \frac{T_y (l-z)}{I_x} y \longrightarrow \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = - \frac{T_y}{I_x} y$$

$$\int_{A^*} \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} dA = \int_S \tau_{yz} ds \quad \longrightarrow \quad \int_{A^*} \frac{T_y}{I_x} y dA = \int_S \tau_{yz} ds$$

$$\frac{T_y}{I_x} \left(\int_{A^*} y dA \right) = \frac{T_y}{I_x} S_x^*$$



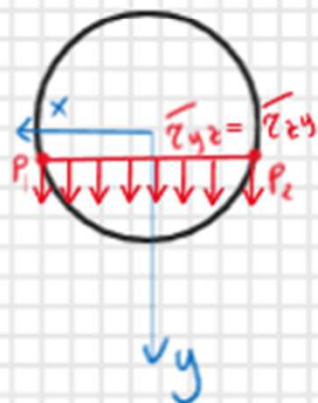
Momento statico
dell'area A^*

$$\int_S \tau_{yz} ds = \bar{\tau}_{yz} S$$

$\bar{\tau}_{yz}$: τ_{yz} media lungo la
corda S

$$\frac{T_y S_x^*}{I_x} = \bar{\tau}_{yz} S \quad \longrightarrow \quad \bar{\tau}_{yz} = \frac{T_y S_x^*}{I_x S}$$

Formula di
Jourawsky



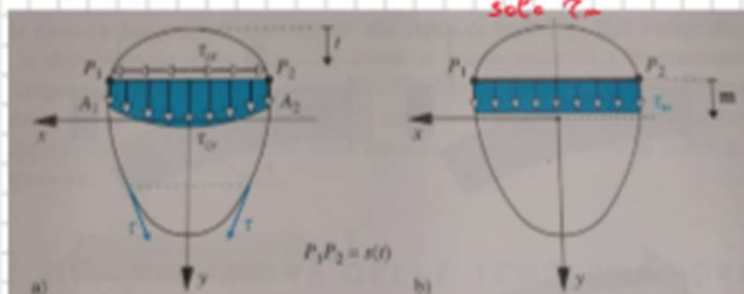
Se $\bar{\tau}_{yz} > 0$ le τ (freccie) sono
evidenti nella sezione A^*

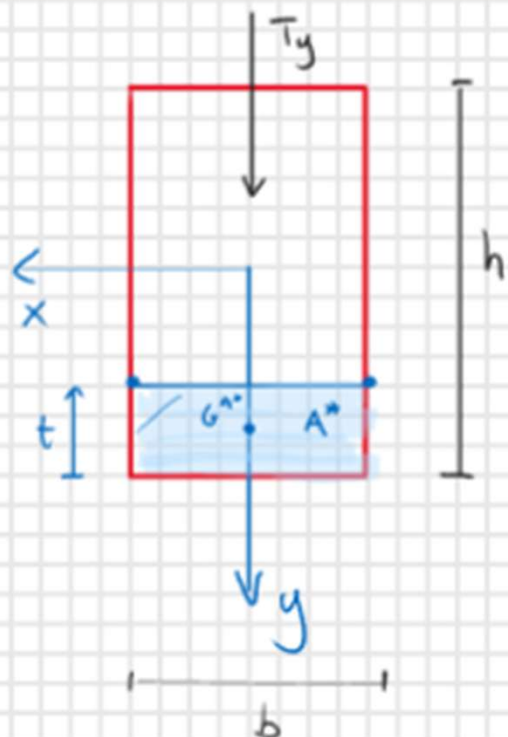
Formula è adeguata per sezioni sottili

- Sono presenti τ perpendicolari alla corda
- la distribuzione delle τ è uniforme
- sto trascurando le τ parallele alla corda

Reale

Formula di Jourawsky
solo τ_z





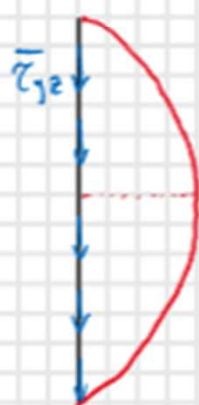
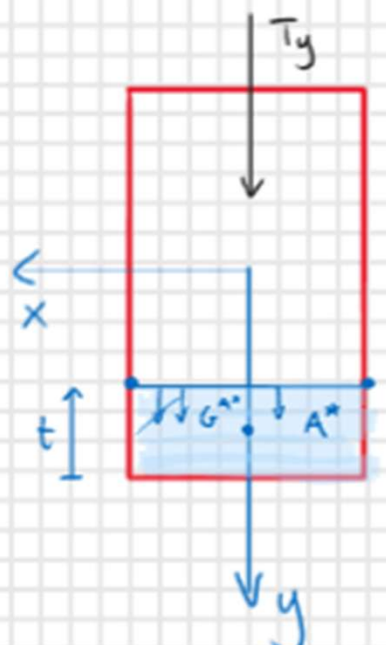
$$\bar{\tau}_{yz} = \frac{T_y S_x^*}{I_x S}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad s = b$$

$$S_x^* = (bt) \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$$

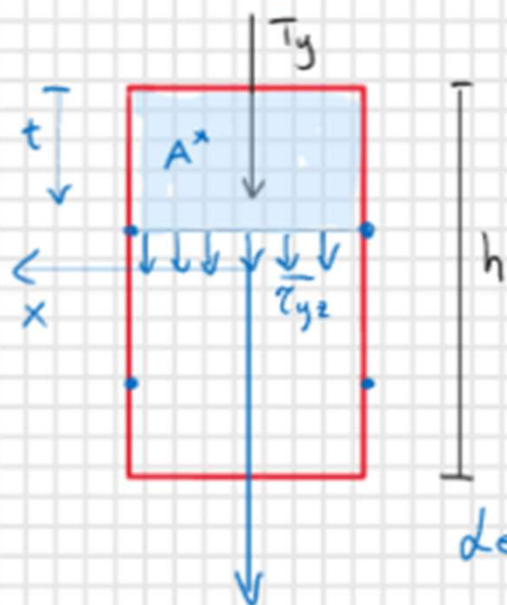
$$\bar{\tau}_{yz}(t) = \frac{T_y \cdot k \cdot t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{6T_y (h-t)t}{bh^3} = \frac{6T_y}{bh^3} (ht - t^2)$$

$$\bar{\tau}_{yz}(0) = 0 \quad \bar{\tau}_{yz}(h) = 0 \quad \bar{\tau}_{yz}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{3}{2} \frac{T_y}{bh} = \tau_{max}$$



$$\bar{\tau}_{yz} = \frac{6T_y}{bh^3} (ht - t^2) > 0$$

$\bar{\tau}_{yz} > 0$ entranti nell'area A^*



Invece la t

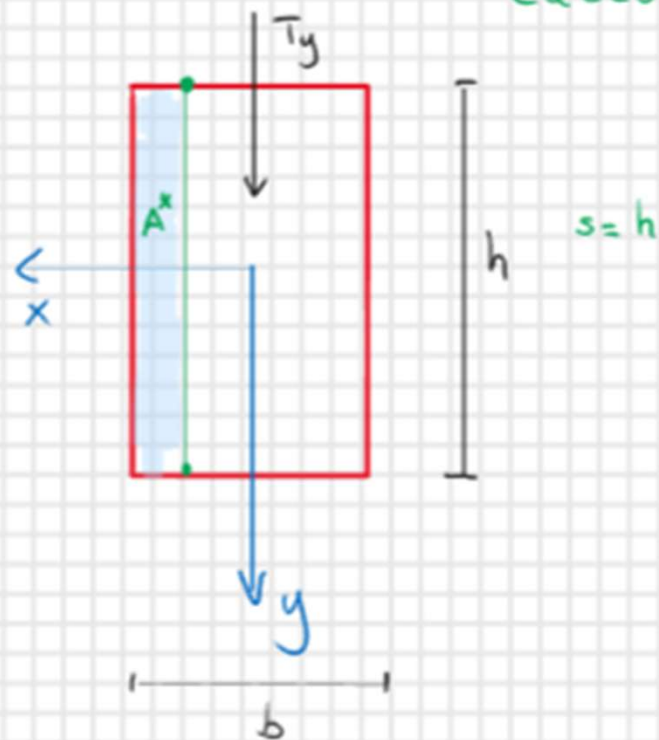
$$S_x^* = bt \left(-\frac{H}{2} + \frac{t}{2} \right) < 0$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \frac{T_y S_x^*}{I_x S}$$

$$\bar{\tau}_{yz} < 0$$

Le $\bar{\tau}_{yz}$ sono uscenti dall'area A^*

Calcolo $\bar{\tau}_{zx}$



$$\bar{\tau}_{zx} = \frac{T_y S_x^*}{I_x h} = 0$$

$S_x^* = 0$ perché l'asse x è baricentrico

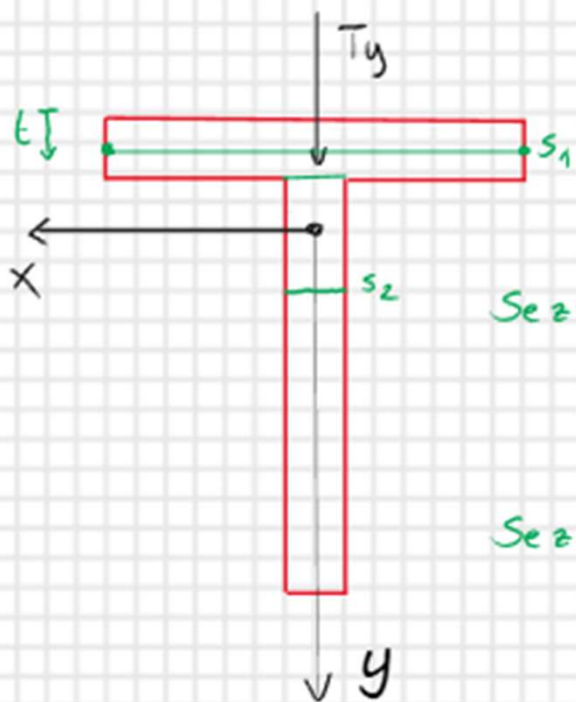
Verifica

$$\bar{\tau}_{yz} = \frac{6 T_y}{b h^3} (h t - t^2) \quad \bar{\tau}_{zx} = 0$$

Risultante delle τ sul primo della sezione

- $\int_0^h \bar{\tau}_{yz} b dt = T_y$ uguale al taglio applicato
- $\int_0^b \bar{\tau}_{zx} h dt = 0$



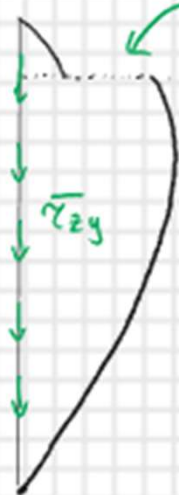
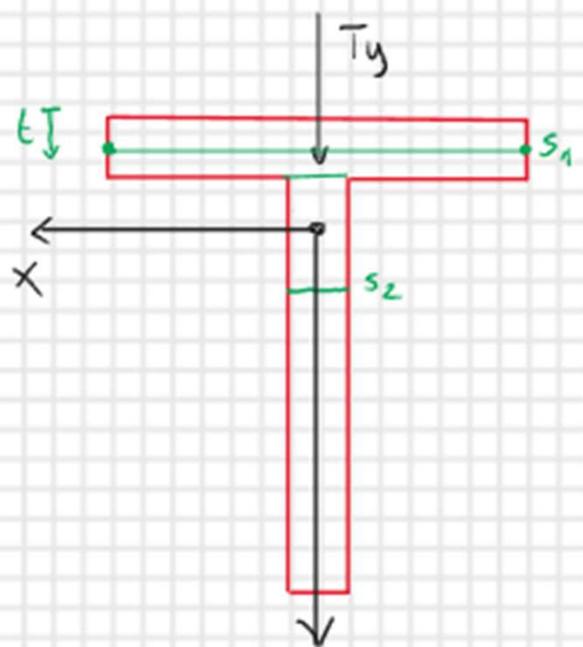


$$\bar{\tau}_{yz} = \frac{T_y S_x^*}{I_x S} \quad \text{generale}$$

Sezione S_1 $\bar{\tau}_{yz} = \frac{T_y S_x^*}{I_x S_1}$

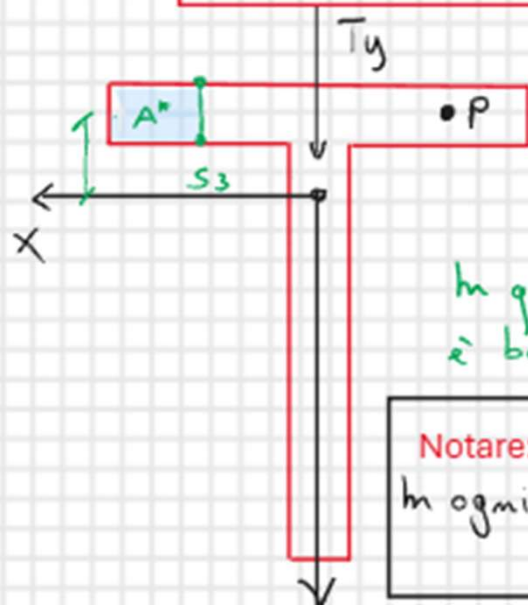
Sezione S_2 $\bar{\tau}_{yz} = \frac{T_y S_x^*}{I_x S_2}$

$$S_2 < S_1$$



dovuto alla
variazione di
spessore

Calcoliamo le $\bar{\tau}_{zx}$



$$\bar{\tau}_{zx} = \frac{T_y S_x^*}{I_x S_3} \neq 0$$

In questo caso $S_x^* \neq 0$, x non
è baricentrico

Notare:

In ogni punto P della sezione esisteranno
 $\bar{\tau}_{yz}$ e $\bar{\tau}_{xz}$

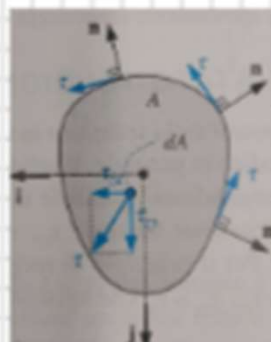
Considerazioni su sezioni compatte

La distribuzione delle tensioni nella sezione:

$$\bullet \frac{\partial \tau_{xe}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{ye}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

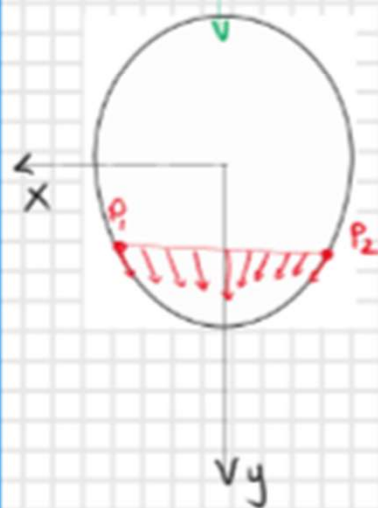
$$\bullet \tau = \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j}$$

$$\bullet \tau \cdot \vec{n} = 0$$



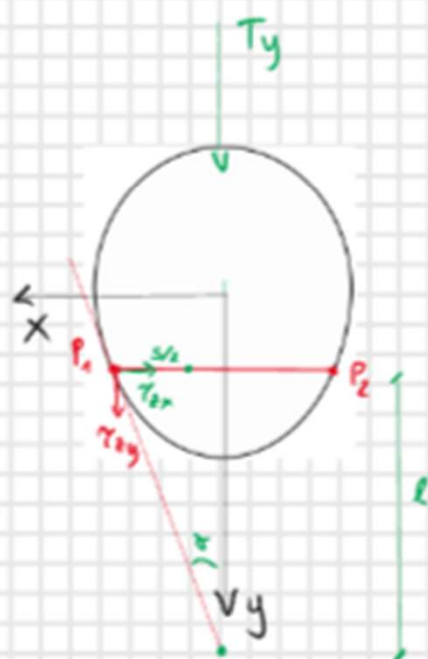
Reale

T_y

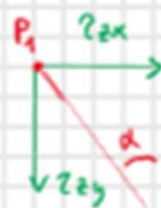


Sourawsky

T_y



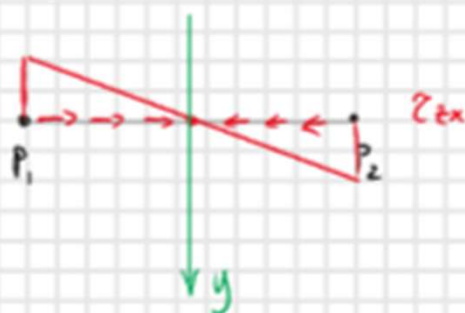
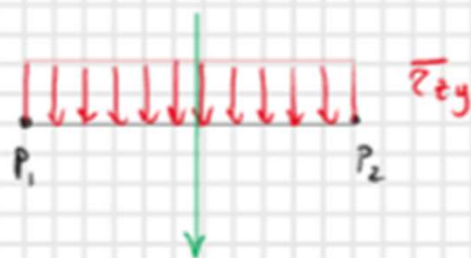
$$\tan \alpha = \frac{s}{2e}$$



$$\tau_{zx} = -\tau_{zy} \tan \alpha = -\tau_{zy} \frac{s}{2e} \quad \text{Vale in } P_1$$

$$\tau_{zx}(x) = -\tau_{zy} \frac{x}{e} \quad \tau_{zx}(0) = 0 \quad \tau_{zx}\left(\frac{s}{2}\right) = -\tau_{zy} \frac{s}{2e}$$

Andamento delle τ lungo la corda P_1P_2

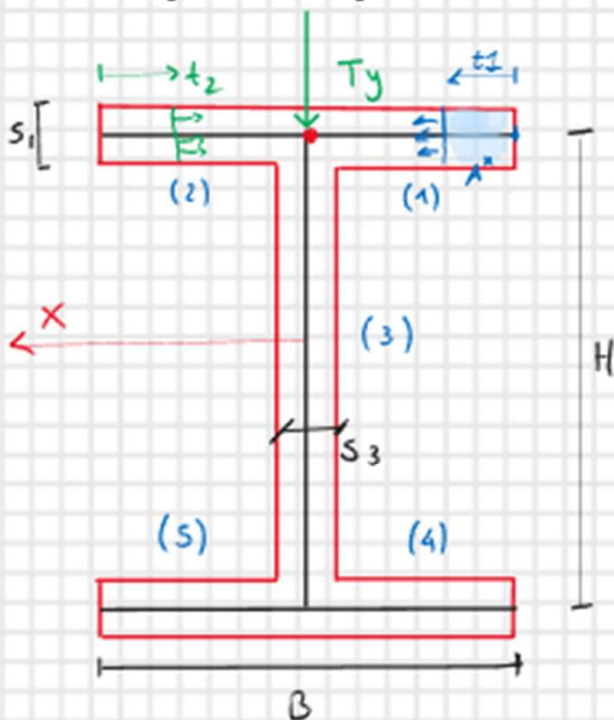


Profili in parete sottile (linea media della sezione)

Nota: nei profili sottili gli sforzi tangenziali sono quelli medi nello spessore della sezione, perpendicolari alla corda s che taglia i vari tratti della sezione (anima e ali).

Per evitare di usare τ_{zy} e τ_{zx} , differenziandoli nei diversi tratti in base alla loro direzione, utilizzo τ_{zs} in tutti i tratti.

Considero gli sforzi tangenziali nei vari tratti in cui posso dividere la sezione



$$\tau_{zs} = \frac{T_y S_x^*}{I_x s}$$

$$I_x \approx \frac{s_3 H^3}{12} + (s_1 B) \cdot \left(\frac{H}{2}\right)^2 \cdot 2$$

Calcolare S_x^* in ciascun tratto

Tratto 1) $0 \leq t_1 \leq B/2$

$$S_x^* = s_1 t_1 \left(-\frac{H}{2}\right) < 0$$

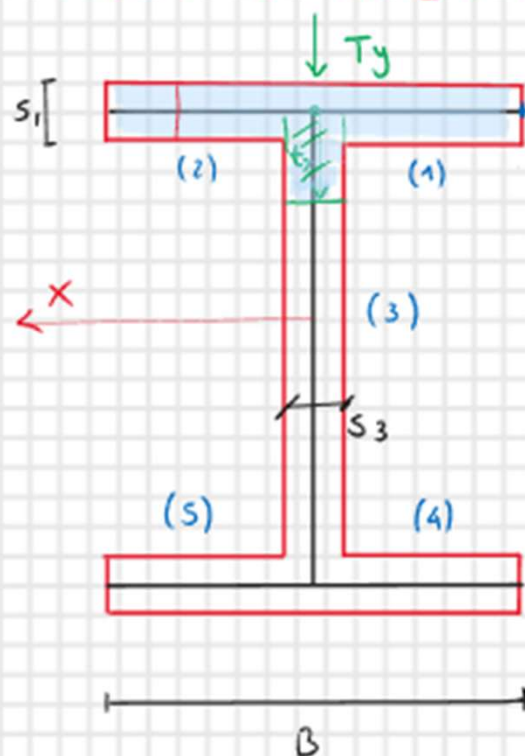
$$\tau_{zs} = -\frac{T_y t_1 H}{2 I_x} \quad \tau_{zs} \left(\frac{B}{2}\right) = -\frac{T_y B H}{4 I_x}$$

$\tau < 0$ uscenti da A^*

Tratto 2

$$S_x^* = s_1 t_2 \left(-\frac{H}{2}\right) < 0 \quad \tau_{zs} < 0 \quad \text{uscente}$$

Tratto 3 $0 \leq t_3 \leq H$



$$S_x^* = s_1 B \cdot \left(-\frac{H}{2}\right) + s_3 t_3 \left(-\frac{H}{2} + \frac{t_3}{2}\right)$$

$$S_x^* = -s_1 B \frac{H}{2} - s_3 t_3 \frac{H}{2} + \frac{s_3 t_3^2}{2}$$

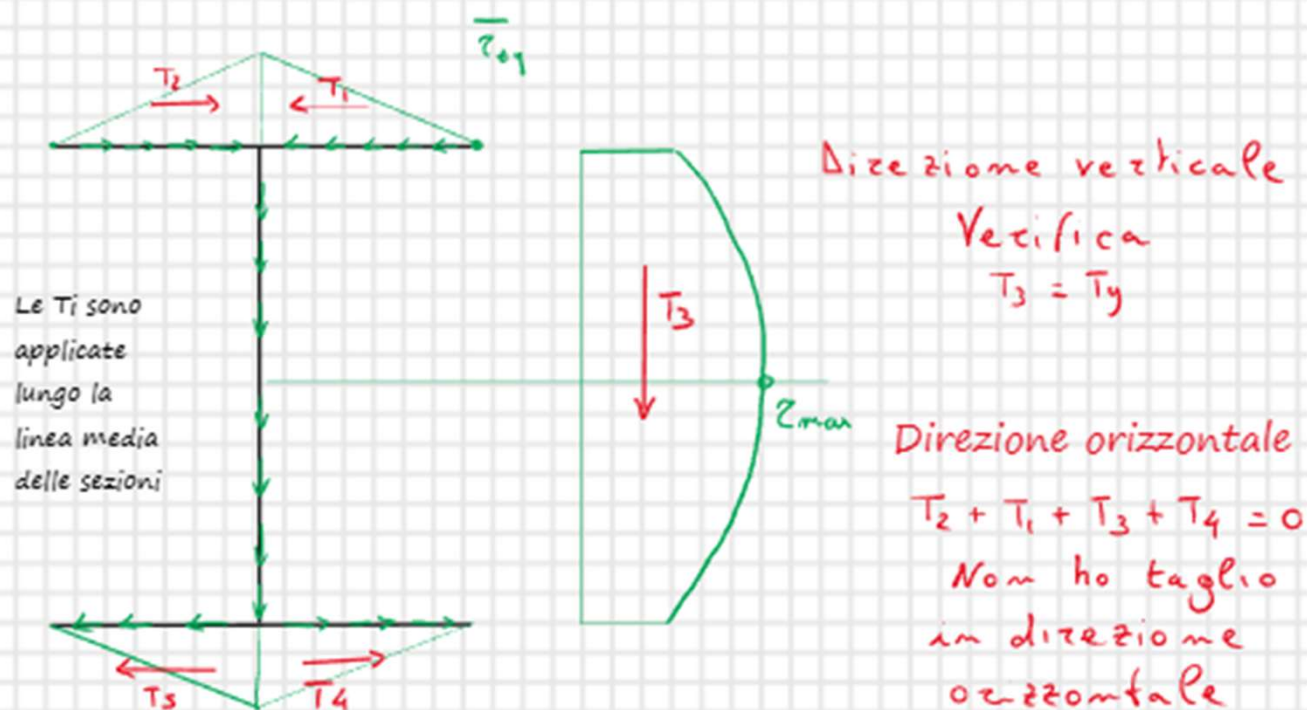
↑
costante

↑
parabolica

$$\tau_{zs} = \frac{T_y S_x^*}{I_x s_3}$$

$$\tau_{zs}(0) = -\frac{T_y s_1 H B}{2 I_x s_3} = \tau_{zs}(H)$$

$$\tau_{zs}\left(\frac{H}{2}\right) = \tau_{max}$$



$$T_{\text{taglio}} < : S_x^* = s_1 \cdot t_1 \left(\frac{H}{2} \right) > 0 \quad \tau > 0$$

Risultanti delle tensioni tangenziali
lungo la linea media della sezione

$$\int_0^H \tau_{zs}^{(1)} s_3 dt_3 = T_3 = T_y$$

$$\int_0^{H/2} \tau_{zs}^{(1)} s_1 dt_1 = T_1$$

Verifica del nodo

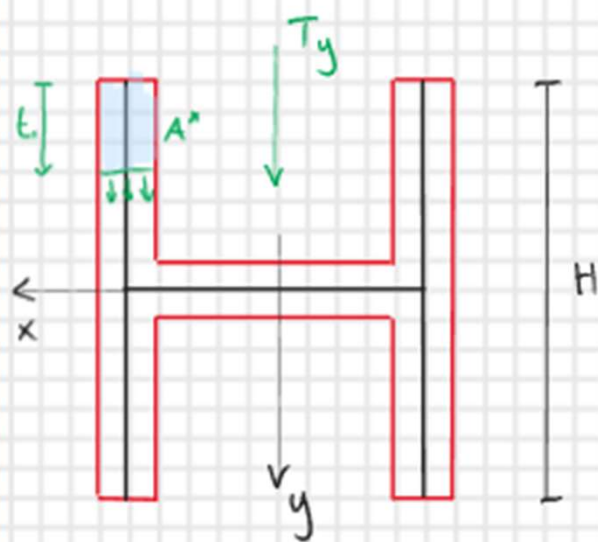
$\tau_2 = -\frac{T_y BH}{4I_x}$

$-\frac{T_y BH}{4I_x} = \tau_1$

$\tau_3 = -\frac{T_y s_1 HB}{2I_x s_3}$

$$\tau_1 \cdot s_1 + \tau_2 \cdot s_2 = \tau_3 \cdot s_3$$

Flusso entrante = Flusso uscente



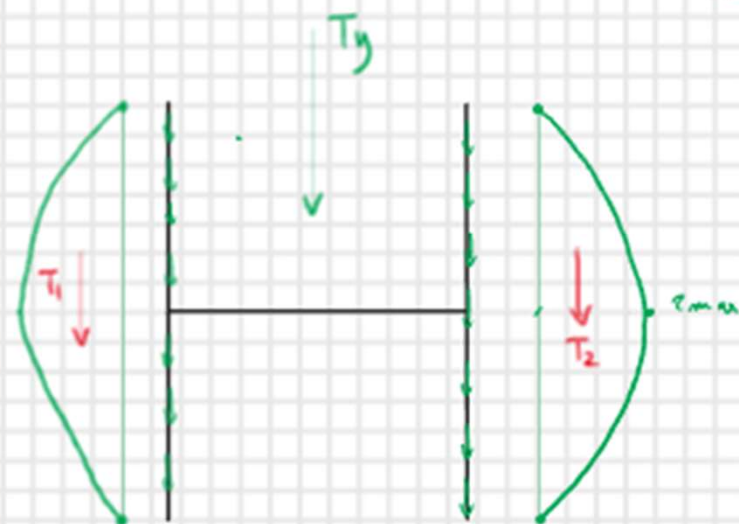
$$\tau_{zs} = \frac{T_y S_x^*}{I_x s} \quad s_1 \ll H$$

$$I_x = \frac{s_1 \cdot H^3}{12} \cdot 2 = \frac{s_1 H^3}{6}$$

$$S_x^* = s_1 \cdot t_1 \left(-\frac{H}{2} + \frac{t_1}{2} \right) \quad \text{Parabolico}$$

$$S_x^* = -\frac{s_1}{2} (H t_1 - t_1^2) < 0$$

$$\tau_{zs} < 0 \quad \text{sono uscenti da } A^*$$



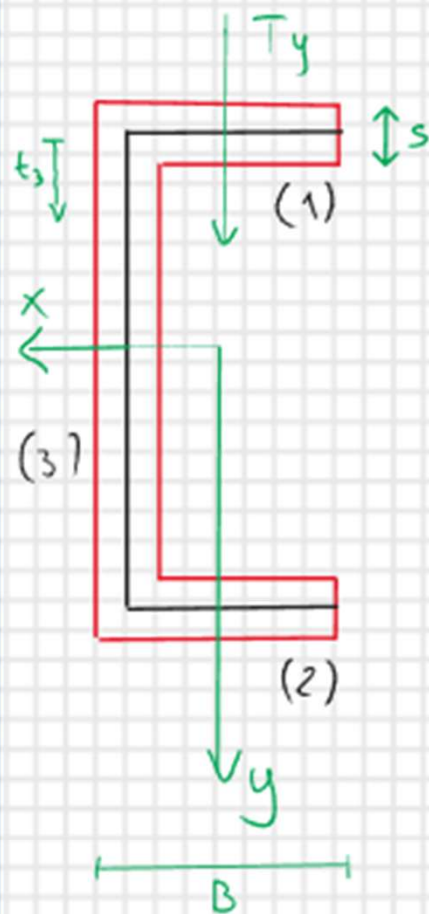
$$\tau_{\max} = \tau_{zs} \left(\frac{H}{2} \right) = -\frac{3}{4} \frac{T_y}{s H}$$

$$T_1 + T_2 = T_y$$

Taglio deviato

Decompongo il taglio T lungo x e lungo y

$$\tau_{zs} = \frac{T_y S_x^*}{I_x s} + \frac{T_x S_y^*}{I_y s}$$

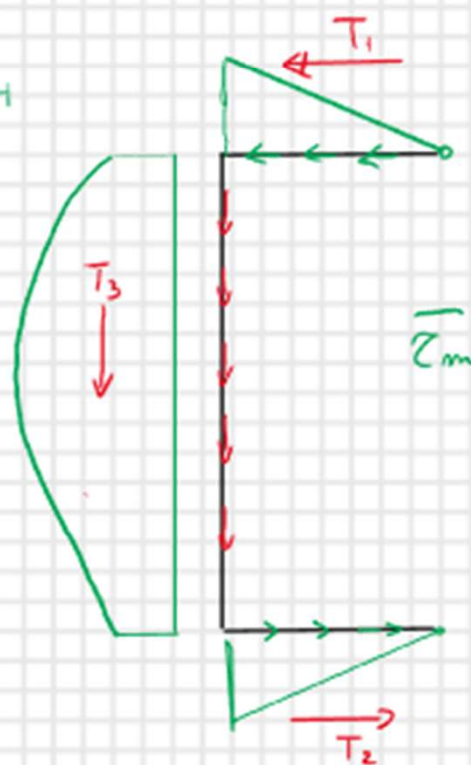


$$\bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y S_x^*}{I_x s}$$

Tratto 1: $S_x^* = t_1 s \left(-\frac{H}{2}\right) < 0$
uscanti

Tratto 2: $S_x^* = t_2 s \left(+\frac{H}{2}\right) > 0$
entranti

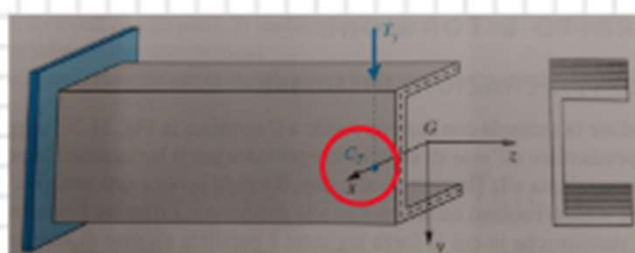
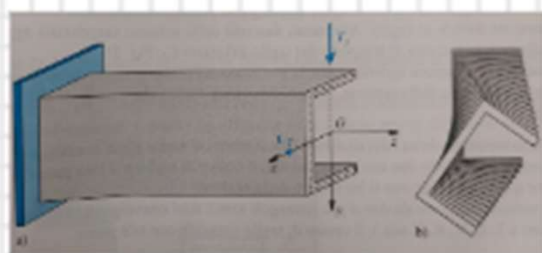
Tratto 3: $S_x^* = \boxed{SB\left(-\frac{H}{2}\right) + st_3\left(-\frac{H}{2} + t_3\frac{1}{2}\right)}$



$$T_3 = T_y$$

$$T_1 + T_2 = 0$$

Centro di taglio



Centro di taglio CT è un punto della sezione tale che se la retta d'azione del taglio T passa per esso, la sezione non subisce torsione.

Se il taglio passa per il centro di taglio nella sezione avrà solo tensioni tangenziali dovute al taglio (calcolate con la formula di Jourawsky) e non al momento torcente.

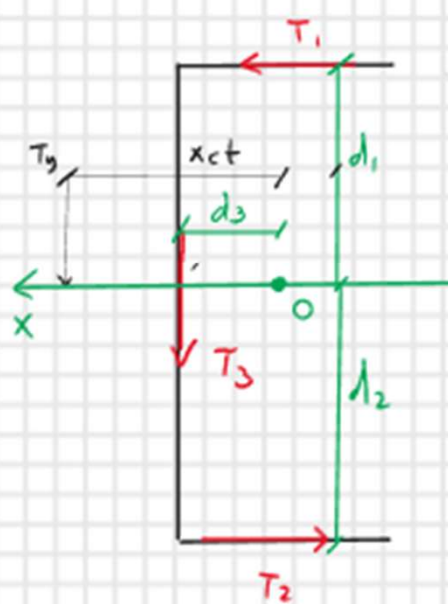
Calcolo del centro di taglio

Calcolare la coordinata x :

1) Fisso un polo O a piacere sull'asse x

2) Calcolo il momento delle risultanti degli sforzi di taglio T_i in ciascuna flangia rispetto al polo O

3) Eguaglio il momento appena calcolato, al momento della forza di taglio T_y (che ha determinato le T_i) posto alla distanza x_{ct} (coordinata del centro di taglio, incognita)



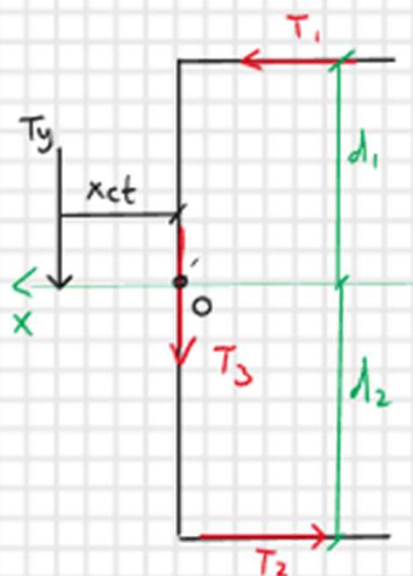
$$T_1 d_1 + T_2 d_2 + T_3 d_3 = T_y x_{ct}$$

L'equazione implica l'equivalenza tra il momento a destra e quello a sinistra dell'uguale. Non è un equilibrio

$$x_{ct} = \frac{T_1 d_1 + T_2 d_2 + T_3 d_3}{T_y}$$

Se $x_{ct} > 0$ la posizione in figura di T_y è corretta

Se $x_{ct} < 0$ la posizione di T_y è dal lato opposto



Visto che la scelta di O è arbitraria

$$x_{CT} = \left(T_1 \frac{H}{2} + \frac{T_2 H}{2} \right) / T_y = T_y H / T_y$$

$$T_1 = T_2$$

Se il taglio T_y non passa per il centro di taglio della sezione, nascerà un momento torcente dovuto all'eccentricità del taglio rispetto al centro di taglio