

## Titolo:

Dalla teoria di de Saint Venant  $\longrightarrow$  Rigorosa, tridimensionale

Limiti dovuti a ipotesi restrittive:

solido cilindrico  
materiali: elastico lineari, omogeneo  
carichi sono applicati alle basi del cilindro

passiamo a

### Teoria tecnica della trave



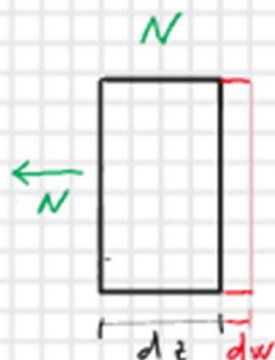
Possiamo assumere valida la teoria di de Saint Venant nei tratti in cui non sono presenti carichi concentrati (tratteggio giallo)

Lo stato di sollecitazione è prossimo a quello descritto nel cilindro di de Saint Venant

Non è adeguata a descrivere lo stato di sollecitazione in corrispondenza di:

- carichi concentrati
- discontinuità geometriche (variazione di sezione, nodi)
- vincoli

### Relazioni tra caratteristiche di sollecitazione e cinematica



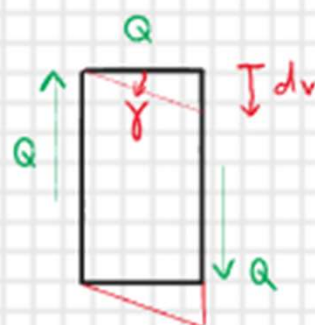
$$\epsilon = \frac{dw}{dz} = \frac{N}{EA}$$

Deformazione assiale



$$\kappa = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EI}$$

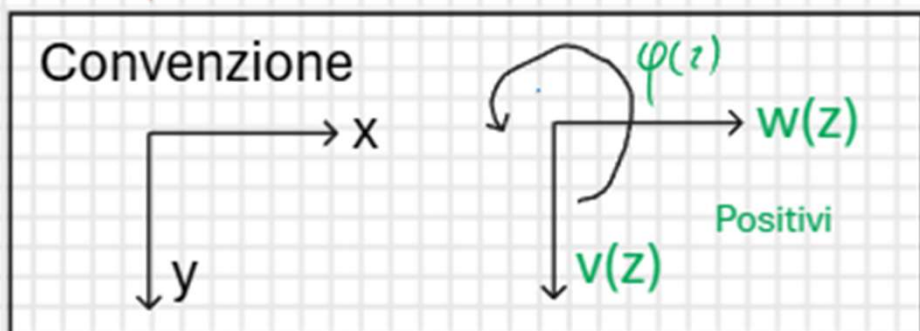
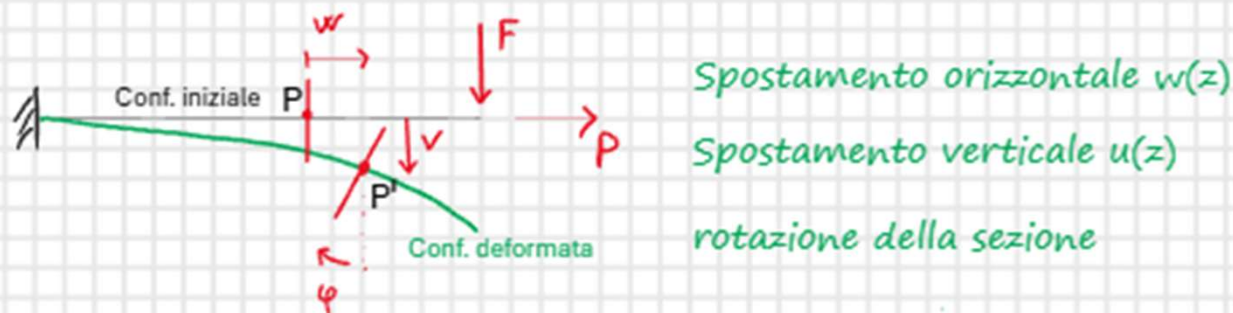
Curvatura flessionale



$$\gamma = \frac{dv}{dz} = \frac{\tilde{\kappa} Q}{GA}$$

Scorrimento angolare

# Studiare come si deforma la trave



Ipotesi: piccoli spostamenti

→ P Problema assiale  $N(z)$  e  $w(z)$

sono disaccoppiati

↓ F Problema flessionale  $Q(z)$ ,  $M(z)$  e  $v(z)$ ,  $\varphi(z)$

## Problema assiale $N(z)$ e $w(z)$

$$\frac{dw(z)}{dz} = \frac{N(z)}{EA}$$


Determinare  $w(z)$

$$N(z) = P \quad \frac{dw(z)}{dz} = \frac{P}{EA} \quad \longrightarrow \quad w(z) = \frac{P}{EA} z + C$$

$C \Rightarrow$  costante

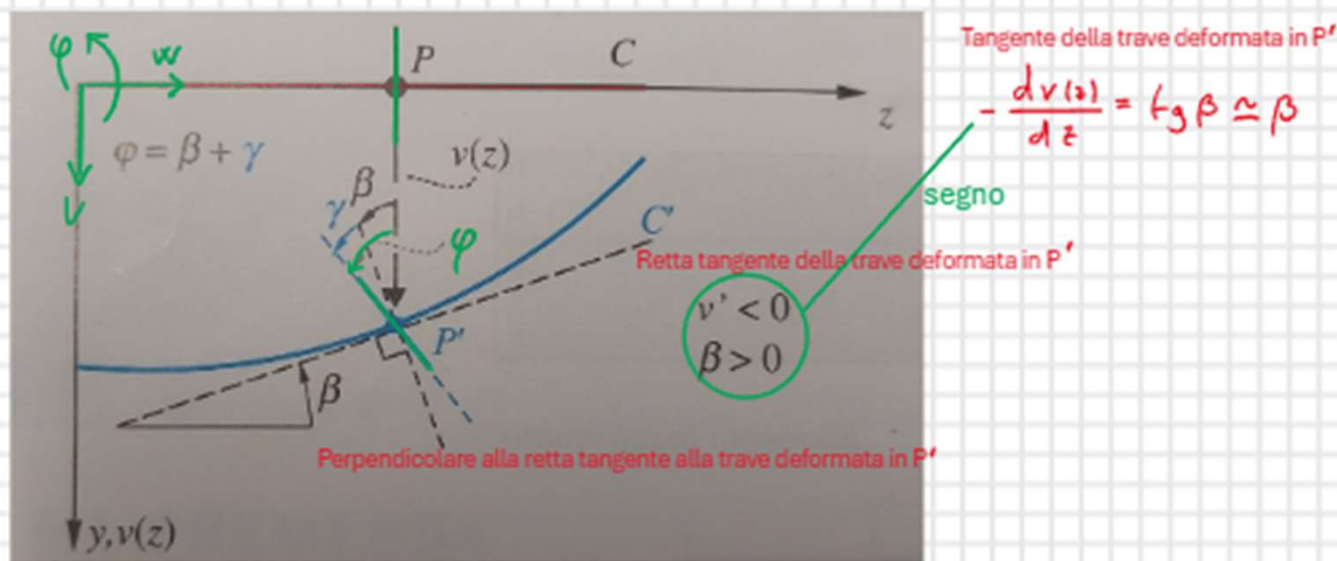
si determina con le condizioni al contorno all'incastro  $w(0)=0$

$$w(0) = C = 0 \quad w(z) = \frac{P}{EA} z$$

spostamento assiale dei punti della trave

$$w(L) = \frac{PL}{EA}$$

Problema flessionale  $\rightarrow v(z), \varphi(z)$  e  $M, Q$



Sezione perpendicolare all'asse della trave nella configurazione iniziale non lo è nella configurazione deformata

$\varphi$ : angolo di cui ruota la sezione

$\gamma$ : scorrimento angolare dovuto al taglio  $Q$

La sezione sarà ruotata nella configurazione deformata di:

$$\varphi = \gamma + \beta \quad \longrightarrow \quad \varphi(z) = \gamma(z) - \frac{dv(z)}{dz} = \frac{\tilde{k}Q}{GA} - \frac{dv(z)}{dz}$$

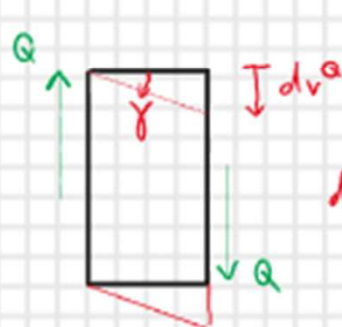
$$\frac{dv(z)}{dz} = v'(z) = -\varphi(z) + \frac{\tilde{k}Q(z)}{GA}$$

$$\frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{M(z)}{EJ}$$

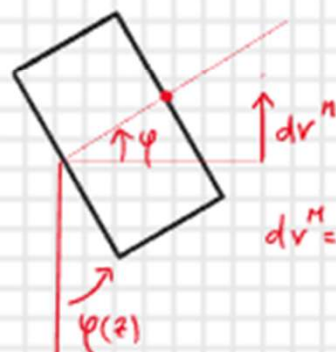
equazioni differenziali  
per il problema flessionale

Possiamo ottenere la prima delle due equazioni sommando i contributi all'abbassamento dovuti al momento flettente e al taglio:

$$dv = dv^M + dv^Q$$



$$dv^Q = \frac{\tilde{k}Q}{GA} dz$$



$$dv^M = -\varphi(z) dz$$

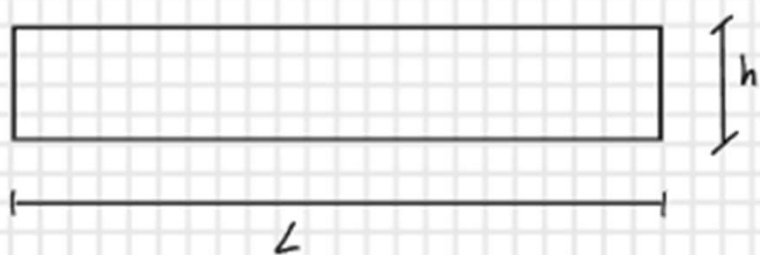
$$dv = -\varphi(z) dz + \frac{\tilde{k}Q}{GA} dz \quad \longrightarrow \quad \frac{dv(z)}{dz} = -\varphi(z) + \frac{\tilde{k}Q(z)}{GA}$$

## Equazioni per il modello di trave di Timoshenko

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{dV(z)}{dz} = V'(z) = -q(z) + \frac{\gamma}{GA} \\ \bullet \frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{M(z)}{EJ} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{equazioni differenziali} \\ \text{per il problema flessionale} \end{array}$$

↓  
contributo dovuto  
al taglio  $Q$

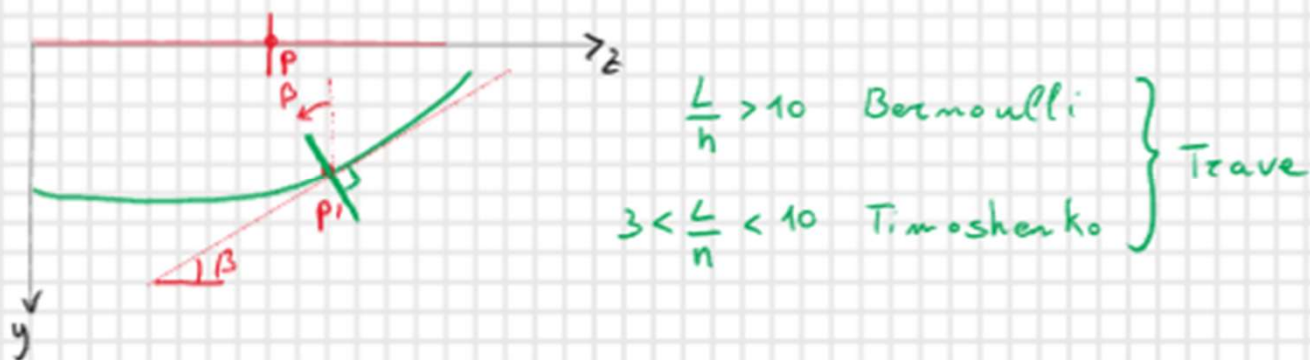
Semplificazione per travi snelle  $\frac{L}{h} > 10$



Per le travi snelle è lecito trascurare il contributo dovuto al taglio

$$\begin{array}{l} \frac{dV(z)}{dz} = V'(z) = -q(z) \\ \frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{M(z)}{EJ} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Modello di trave di} \\ \text{Eulero - Bernoulli} \end{array}$$

Le sezioni si mantengono perpendicolari all'asse della trave anche in configurazione deformata



Equazione della linea elastica

$$\varphi(z) = -\frac{dV(z)}{dz} \quad \frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{M(z)}{EJ} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{d^2 V(z)}{dz^2} = -\frac{M(z)}{EJ}}$$

$$V''(z) = -\frac{M(z)}{EJ}$$

$EJ$  sono costanti

$\rightarrow V(z)$ , 2 condizioni contorno

## Esempio 1



$$M(z) = -FL + Fz$$

$$V''(z) = -\frac{(Fz - FL)}{EJ} \longrightarrow V'(z) = -\frac{F}{EJ} \frac{z^2}{2} + \frac{FL}{EJ} z + C_1$$

$$V(z) = -\frac{F}{EJ} \frac{z^3}{6} + \frac{FL}{EJ} z^2 + C_1 z + C_2$$

Condizioni al contorno

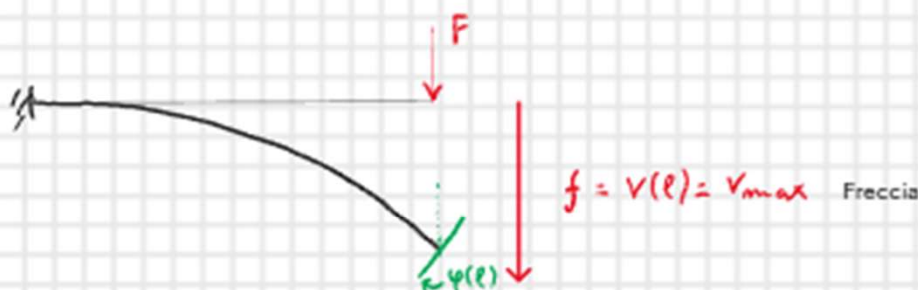
$$V(0) = 0 \quad V(0) = C_2 = 0 \longrightarrow C_2 = 0$$

$$\varphi(0) = -V'(0) = 0 \quad V'(0) = C_1 = 0 \longrightarrow C_1 = 0$$

Spostamento e rotazione:

$$V(z) = -\frac{F}{EJ} \frac{z^3}{6} + \frac{FL}{EJ} z^2$$

$$V'(z) = -\frac{F}{EJ} \frac{z^2}{2} + \frac{FL}{EJ} z = -\varphi(z)$$



$$V(l) = -\frac{FL^3}{6EJ} + \frac{FL^3}{2EJ} = \frac{FL^3}{3EJ}$$

$$V'(l) = -\frac{FL^2}{2EJ} + \frac{FL^2}{EJ} = \frac{FL^2}{2EJ} \longrightarrow \varphi(l) = -V'(l) = -\frac{FL^2}{2EJ} < 0$$

## Esempio 2



$$M(z) = -\frac{m}{l} z$$

$$V''(z) = -\frac{M(z)}{EI} = \frac{m}{lEI} z$$

$$V'(z) = \frac{m}{lEI} \frac{z^2}{2} + C_1$$

$$V(z) = \frac{m}{lEI} \frac{z^3}{6} + C_1 z + C_2$$

Condizioni al contorno

$$V(0) = 0 \quad C_2 = 0$$

$$V(l) = 0 \quad \frac{m}{lEI} \frac{l^3}{6} + C_1 l = 0 \quad C_1 = -\frac{ml}{6EI}$$

Spostamento e rotazione:

$$V(z) = \frac{m}{lEI} \frac{z^3}{6} - \frac{ml}{6EI} z$$

$$V'(z) = \frac{m}{lEI} \frac{z^2}{2} - \frac{ml}{6EI}$$

$$V'(0) = -\frac{ml}{6EI}$$

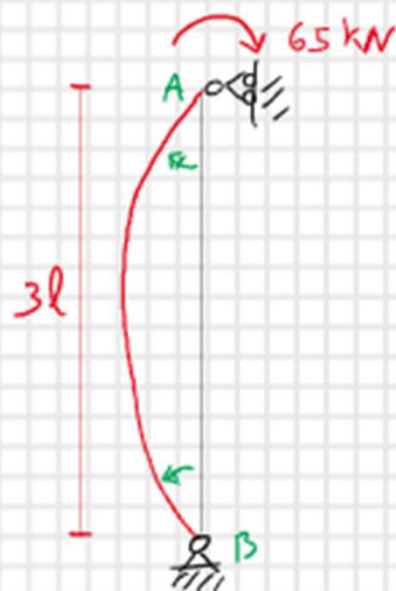
$$\varphi(0) = \frac{ml}{6EI} = \alpha > 0$$

$$V'(l) = \frac{ml}{3EI}$$

$$\varphi(l) = -\frac{ml}{3EI} = \beta < 0$$



Applicazione dell'esempio 2



$\varphi_A$  e  $\varphi_B$  ?

Dall'esempio 2

$$\varphi(0) = \frac{ml}{6EI} = \alpha$$

$$\varphi(l) = -\frac{ml}{3EI} = \beta$$

La rotazione in A è riconducibile a quella dell'esempio 2, nel punto nel quale è applicato il momento m

$$\varphi_A = -\frac{65 \cdot 3l}{2EI} = -\frac{97.5l}{EI}$$

### Esempio 3



$$M(z) = q \frac{l}{2} z - q \frac{z^2}{2}$$

$$V''(z) = -\frac{M(z)}{EI}$$

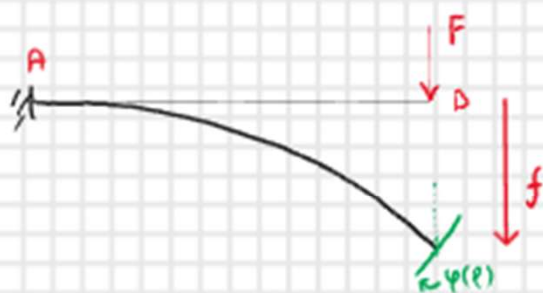
$$V(0) = 0$$

$$V(l) = 0$$

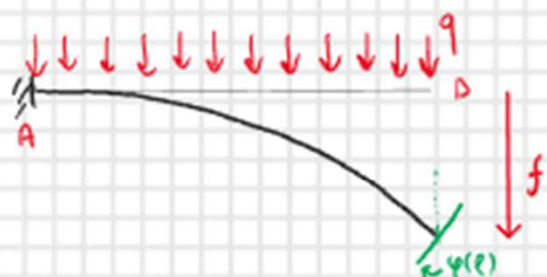
$$f = v_{\max} = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI}$$

$$|\alpha| = \frac{q l^3}{24 EI}$$

Casi notevoli: frecce e rotazioni



$$f = \frac{F l^3}{3 EI} \quad |\varphi_0| = \frac{F l^2}{2 EI}$$



$$f = \frac{q l^4}{8 EI} \quad |\varphi_0| = \frac{q l^3}{6 EI}$$



$$|\alpha| = \frac{m l}{6 EI} \quad |\beta| = \frac{m l}{3 EI}$$



$$f = \frac{m l^2}{2 EI} \quad |\varphi_0| = \frac{m l}{EI}$$

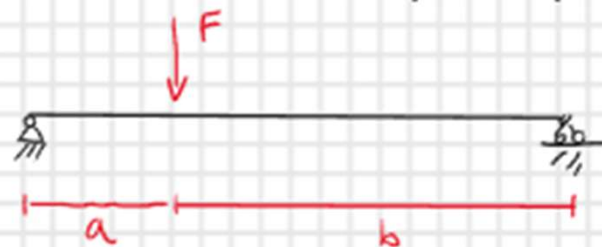


$$f = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI} \quad |\alpha| = \frac{q l^3}{24 EI}$$



$$|\alpha| = \frac{F l^2}{16 EI} \quad f = \frac{F l^3}{48 EI}$$

# Linea elastica con più campi d'integrazione (discontinuità)



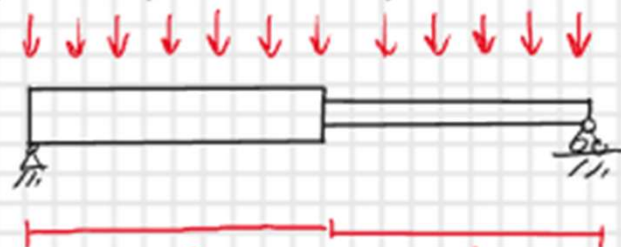
Tratto 1

Tratto 2

$M_1(z)$

$M_2(z)$

$l = a + b$



Tratto 1

Tratto 2

$J_1$

$J_2$

Tratto 1  $v''(z) = - \frac{M_1(z)}{EJ}$

$v''(z) = - \frac{M(z)}{EJ_1}$

Tratto 2  $v''(z) = - \frac{M_2(z)}{EJ}$

$v''(z) = - \frac{M(z)}{EJ_2}$



4 Costanti  $C_1, C_2, C_3, C_4$

4 Condizioni contorno

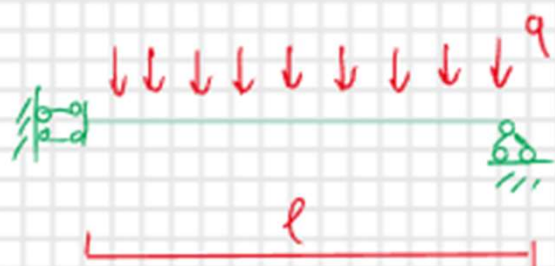
2 condizioni limiti (bordi):  $v(0) = 0$   $v(l) = 0$

2 condizioni di continuità:

continuità degli spostamenti  $v(a)_s = v(a)_d$

continuità delle rotazioni  $\varphi(a)_s = \varphi(a)_d$

## Esempio con doppio pendolo

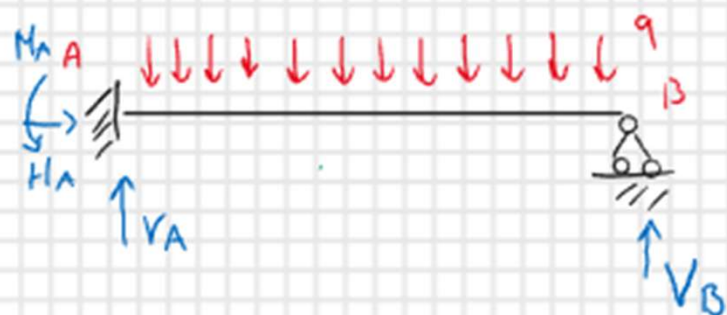


Condizioni al contorno:

$\varphi(0) = -v'(0) = 0$

$v(l) = 0$

## Risoluzione di strutture iperstatiche con metodo delle forze



4 incognite

3 eq. equilibrio

1 soluzione

Introduciamo:

equazione di congruenza  $v(l) = 0$

### Procedimento

1) Individuo struttura principale



Sostituisco al vincolo la corrispondente  
reazione vincolare X (incognita)

La scelta del vincolo da sostituire è arbitraria a patto che la  
struttura principale che si ottiene sia staticamente  
determinata

I vincoli da sostituire sono in numero pari al grado di iperstaticità  
della struttura



Struttura principale  
alternativa

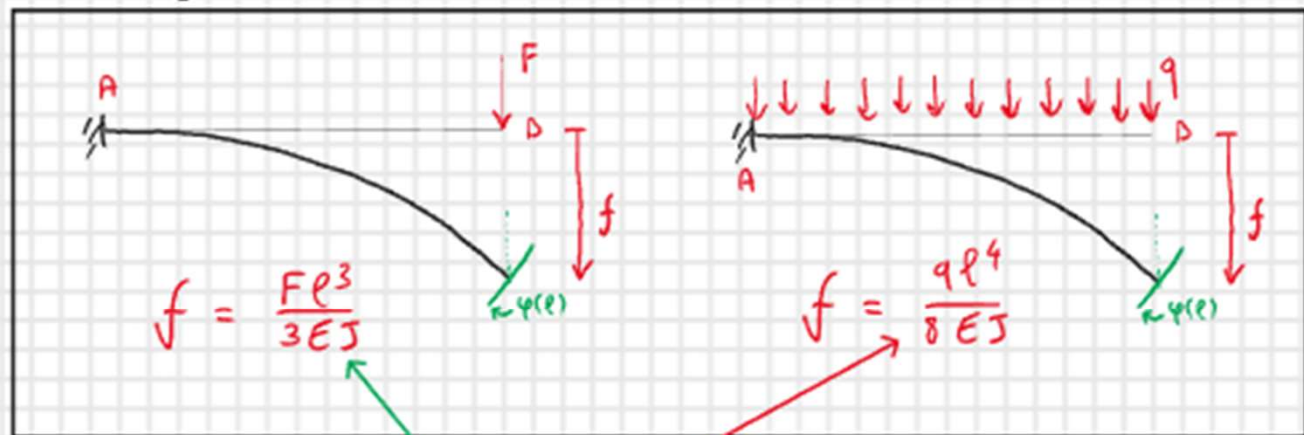
2) Scrivere l'equazione di congruenza



Nel carrello l'abbassamento è nullo

$$v(l) = 0$$

Sfrutto gli schemi notevoli



eq. di congruenza

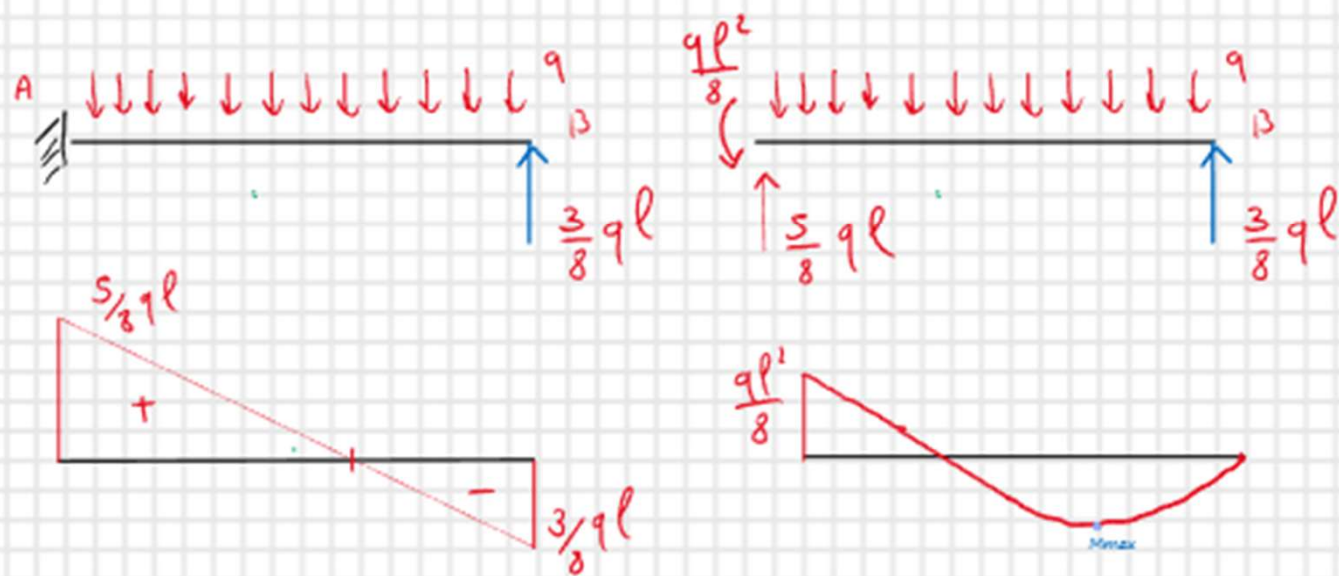
$$v(l) = 0$$

↓ arbitrario positivo verso il basso, per la scrittura dell'equazione di congruenza

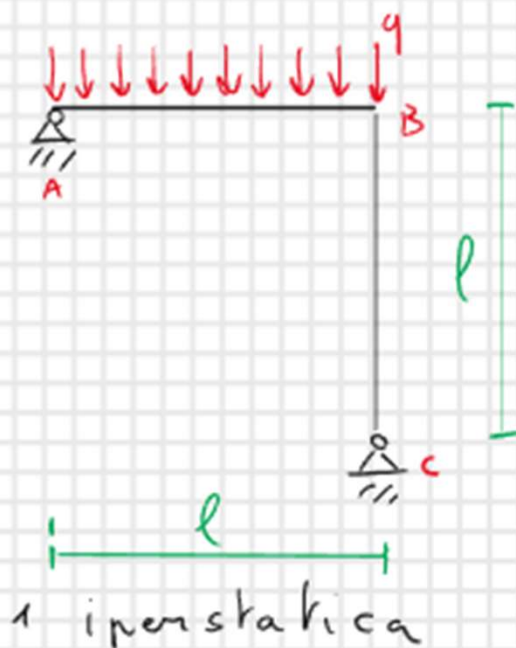
$$\frac{q l^4}{8 E J} - \frac{X l^3}{3 E J} = 0 \rightarrow X = \frac{3}{8} q l$$

Il verso di X iniziale è arbitrario, il valore positivo di X indica che il verso scelto è corretto

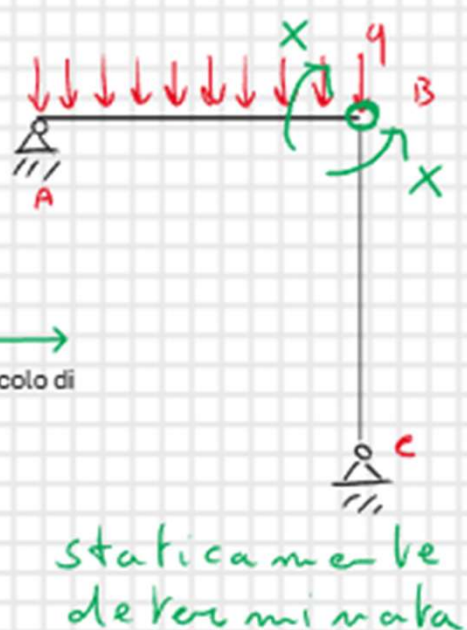
3) Risolvo la struttura principale



## Esempio



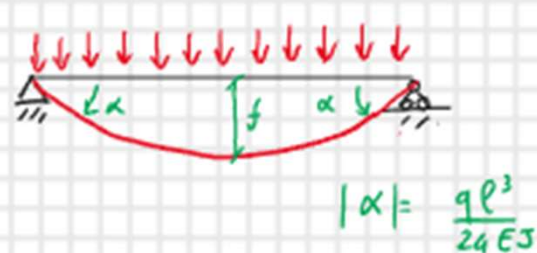
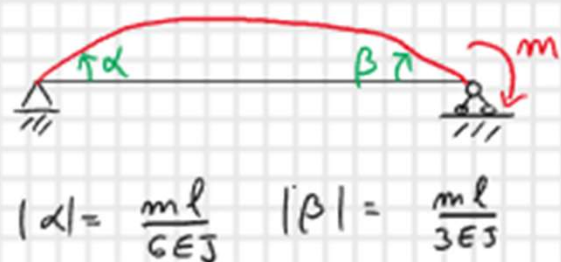
struttura principale



Eq. di congruenza  $\Delta\varphi_B = 0$   $\varphi_{BA} = \varphi_{BC}$

rotazione relativa del vincolo nulla

Sfrutto gli schemi notevoli



↑ arbitrario positivo senso  
antiorario, per la scrittura  
dell'equazione di congruenza

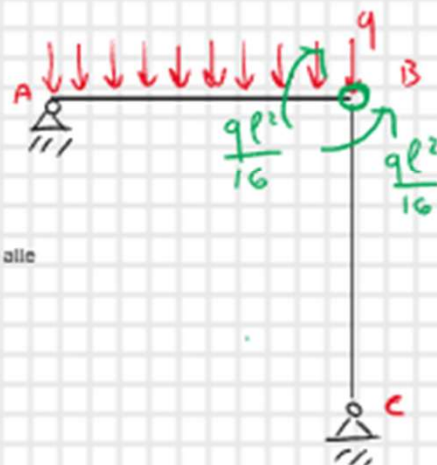
$$\frac{ql^3}{24EI} - \frac{Xl}{3EI} = \frac{Xl}{3EI}$$

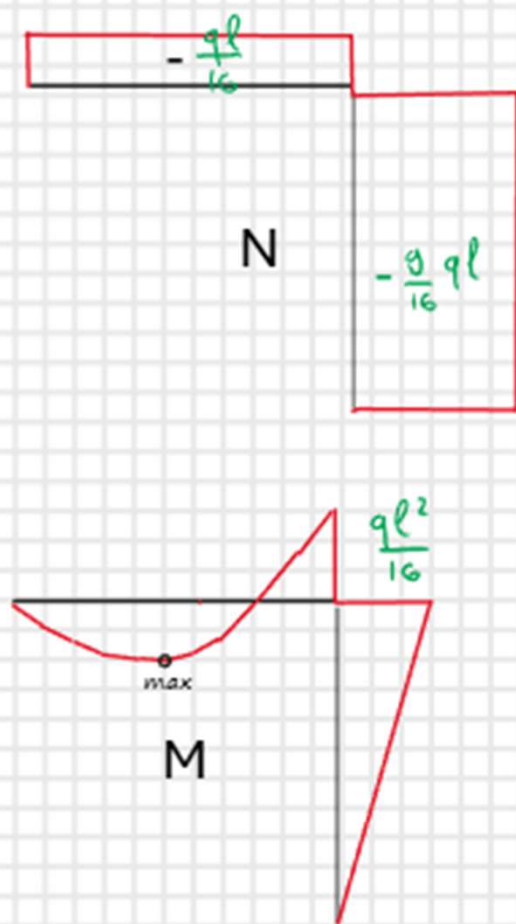
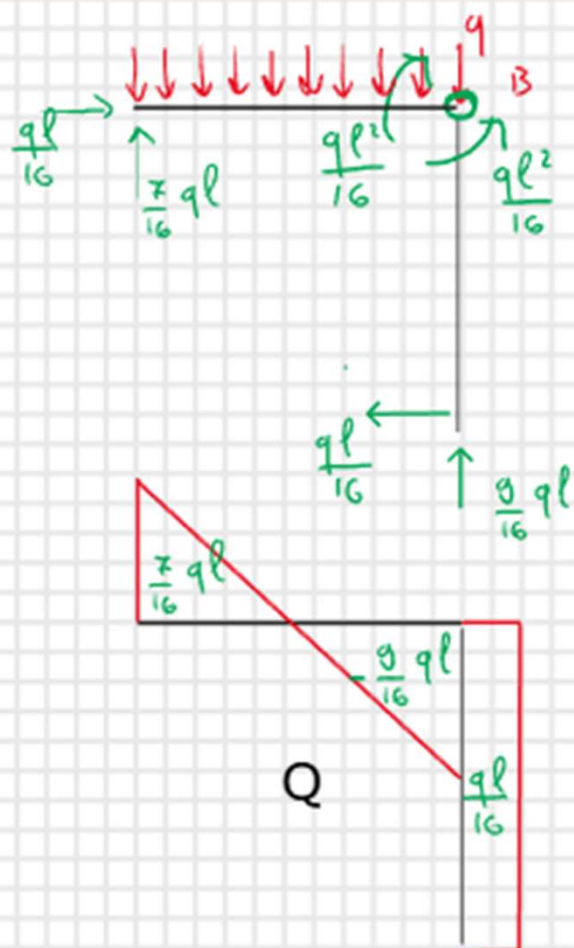
$$\varphi_{BA} = \varphi_{BC}$$

Rotazione nodo B dovuta  
alle azioni nel tratto AB

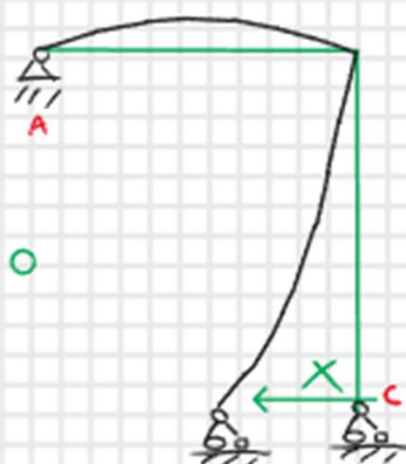
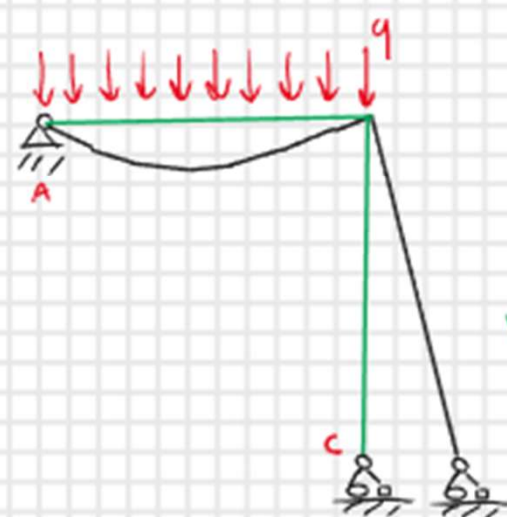
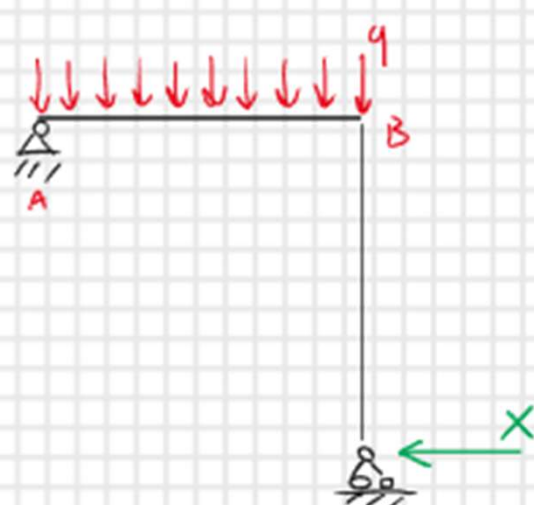
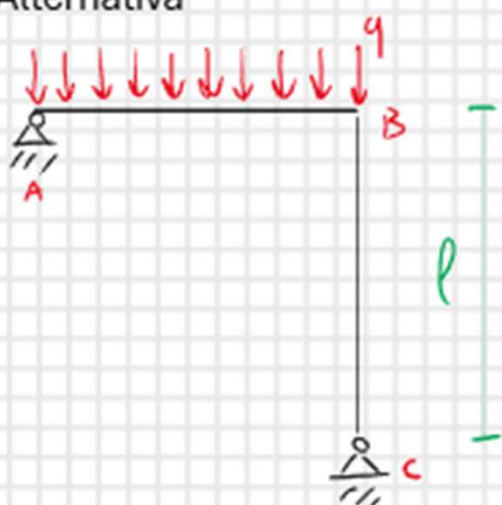
Rotazione nodo B dovuta alle  
azioni nel tratto BC

$$X = \frac{ql^2}{16}$$

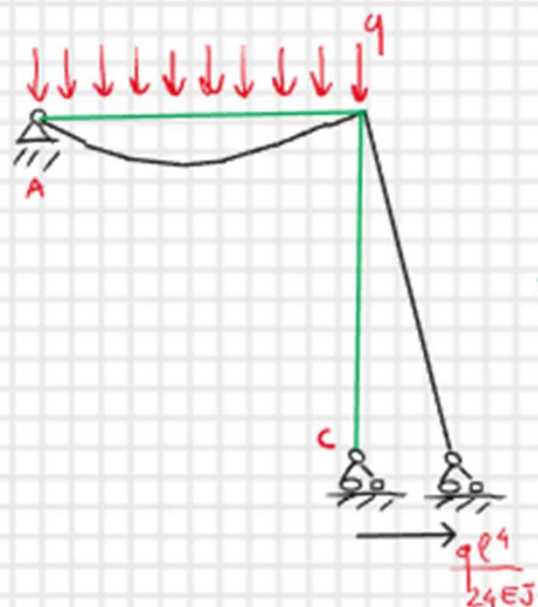




Alternativa



$$V(c) = 0$$



$$v(c) = 0$$

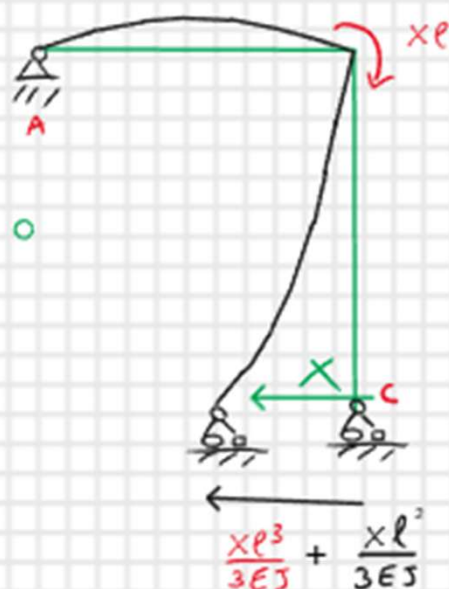


Diagram of a simply supported beam of length  $l$  with a uniformly distributed load  $q$ . The deflection at the center is denoted by  $f$ .

$$f = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EJ}$$

$$|\alpha| = \frac{q l^3}{24 EJ}$$

Diagram of a cantilever beam of length  $l$  fixed at A and free at B. A point load  $F$  acts downwards at B. The deflection at B is denoted by  $f$ .

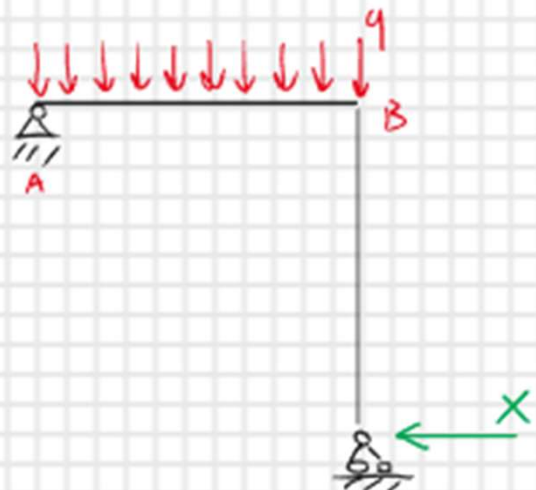
$$f = \frac{F l^3}{3 EJ}$$

Diagram of a beam of length  $l$  fixed at A and supported by a roller at B. A point load  $m$  acts downwards at B. The deflection at A is denoted by  $\alpha$  and the deflection at B is denoted by  $\beta$ .

$$|\alpha| = \frac{m l}{6 EJ} \quad |\beta| = \frac{m l}{3 EJ}$$

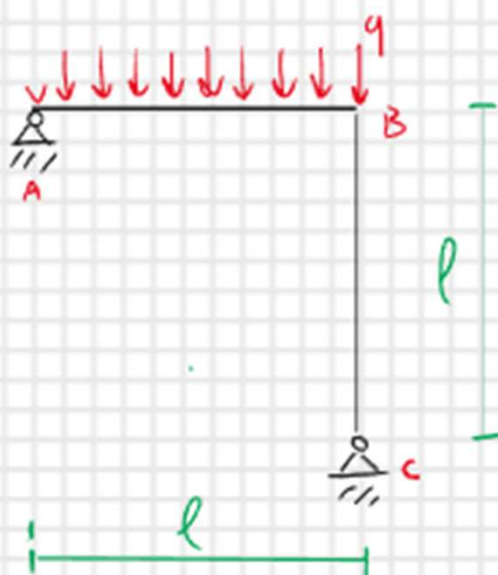
$$v(c) = 0 \quad -\frac{q l^4}{24 EJ} + \frac{x l^3}{3 EJ} + \frac{x l^3}{3 EJ} = 0$$

$$x = \frac{q l}{16}$$



$$x = \frac{q l}{16}$$

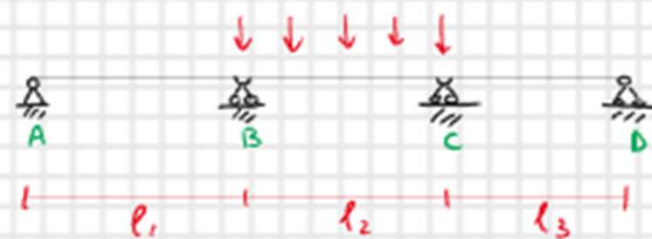
Nota:



Nei telai si può trascurare l'accorciamento dei pilastri

Le equazioni di congruenza sono scritte considerando che il nodo B non trasli verticalmente di conseguenza non induce ulteriori rotazioni nel nodo

## Travi continue



2 volte iperstatica

### Struttura principale 1



eq. congruenza  
 $V_B = 0$  e  $V_C = 0$

### Struttura principale 2



$9gl$  e  $9gv$

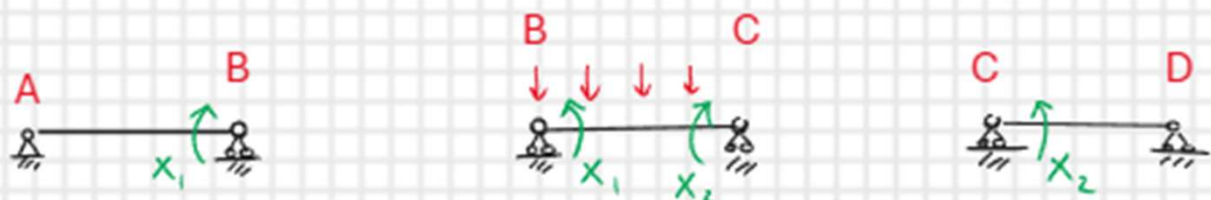
2 equazioni di congruenza, una per ciascun nodo

Nodo B  $\varphi_{BA} = \varphi_{BC}$

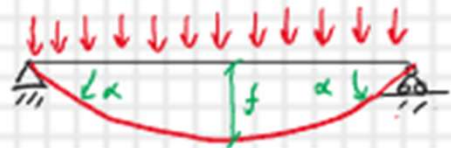
Rotazione nodo B dovuto alle azioni nel tratto AB = Rotazione nodo B dovuto alle azioni nel tratto BC

Nodo C  $\varphi_{CB} = \varphi_{CD}$

Rotazione nodo C dovuto alle azioni nel tratto BC = Rotazione nodo C dovuto alle azioni nel tratto CD



$$|\alpha| = \frac{ml}{6EI} \quad |\beta| = \frac{ml}{3EI}$$



$$|\alpha| = \frac{ql^3}{24EI}$$

Nodo B  $\varphi_{BA} = \varphi_{BC} \quad \uparrow \quad -\frac{X_1 l_1}{3EI} - \frac{X_1 l_2}{3EI} - \frac{ql^3}{24EI} + \frac{X_2 l_2}{6EI}$

Nodo C  $\varphi_{CB} = \varphi_{CD} \quad \uparrow \quad -\frac{X_1 l_2}{6EI} - \frac{X_2 l_2}{3EI} + \frac{ql^3}{24EI} = \frac{X_2 l_3}{3EI}$

$$\text{Se } l_1 = l_2 = l_3 = l$$

$$X_1 = X_2 = \frac{ql^2}{20}$$

