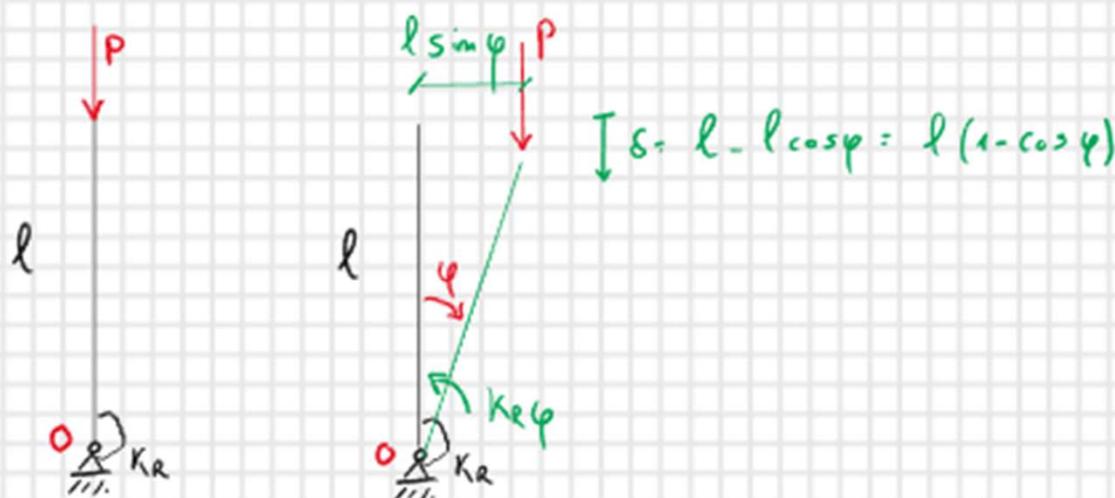


Instabilità dei corpi rigidi

- 1) Materiale elastico lineare
- 2) Spostamenti infinitesimi
- 3) eq. equilibrio scritte nella configurazione indeformata

Rimuoviamo anche la 2.



molla
rotazionale

Energia potenziale totale del sistema E_{pt}

$$E_{pt} = \frac{1}{2} K_R \varphi^2 - P l (1 - \cos \varphi)$$

↑
molla

Sistema è in equilibrio $E_{pt}'(\varphi) = 0$

$$E_{pt}' = K_R \varphi - P l \sin \varphi = 0$$

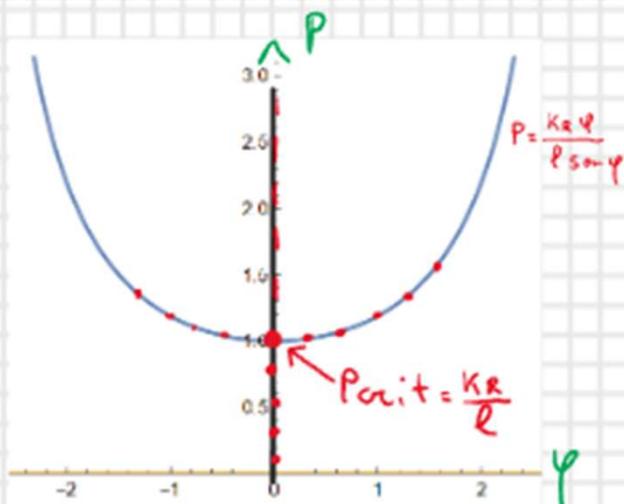
Equivalente ad imporre l'equilibrio delle forze rispetto a 0

Punti di stazionarietà

$$E'_{pt} = k_R \varphi - P l \sin \varphi = 0$$

$$\varphi = 0 \quad \forall P$$

$$\varphi \neq 0 \quad P = \frac{k_R \varphi}{l \sin \varphi}$$



Studio del comportamento post-critico della struttura

• • • eq. stabile
- - - eq. instabile

$$E''_{pt}(\varphi) = k_R - P l \cos \varphi$$

$$E''_{pt} > 0 \quad \text{eq. stabile} \quad \text{Minimo}$$

$$E''_{pt} < 0 \quad \text{eq. instabile} \quad \text{Massimo}$$

$$\text{Per } \varphi = 0 \quad k_R - P l > 0 \quad \longrightarrow \quad P < \frac{k_R}{l}$$

$$\text{Per } \varphi \neq 0 \quad P = \frac{k_R \varphi}{l \sin \varphi} \quad \longrightarrow \quad E''_{pt} = k_R - \frac{k_R \varphi}{\sin \varphi} > 0$$

$$k_R \left(1 - \frac{\varphi}{\sin \varphi} \right) > 0 \quad \text{stabile}$$

nei
2 rami

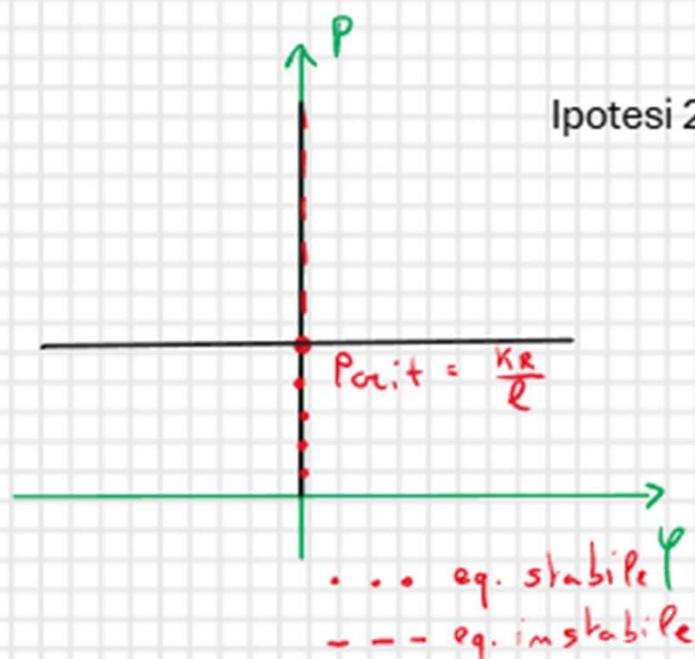
< 1
 > 0

Ipotesi 2 valida: piccoli spostamenti

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

$$\varphi = 0 \quad \forall P$$

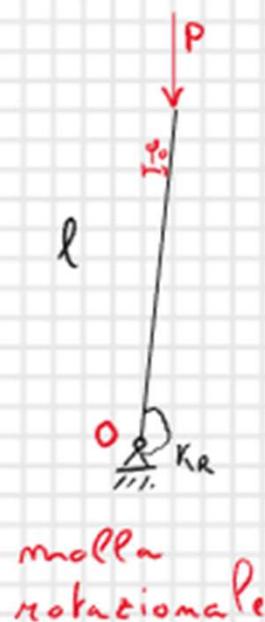
$$\varphi \neq 0 \quad P = \frac{k_R}{l}$$



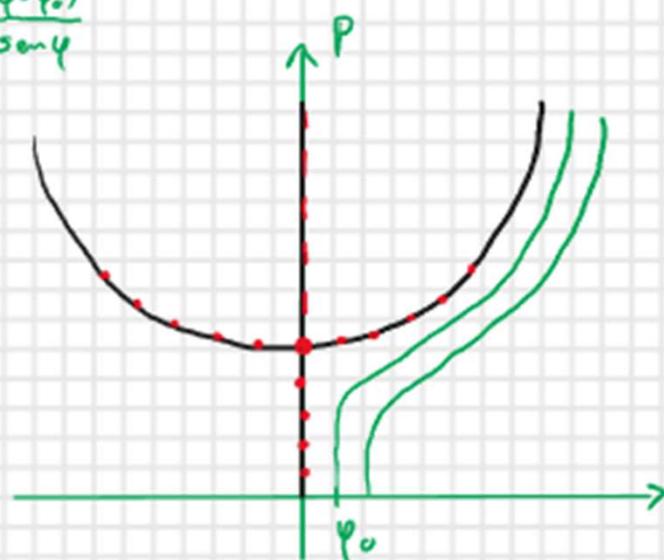
• • • eq. stabile
- - - eq. instabile

Perdiamo informazioni sul comportamento post-critico

Caso con imperfezioni iniziali



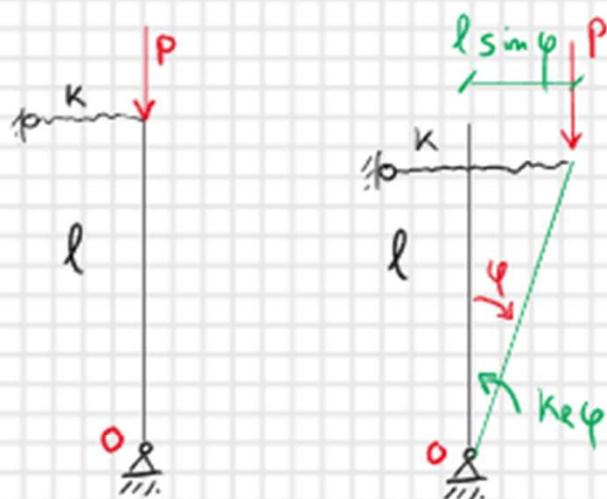
$$P_{crit} = \frac{K_R}{l} \frac{(\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi}$$



Non si ha un punto di biforcazione

P_{crit} può essere superato \rightarrow struttura è poco sensibile alle imperfezioni iniziali.

Caso 2



$$\delta = l - l \cos \varphi = l(1 - \cos \varphi)$$

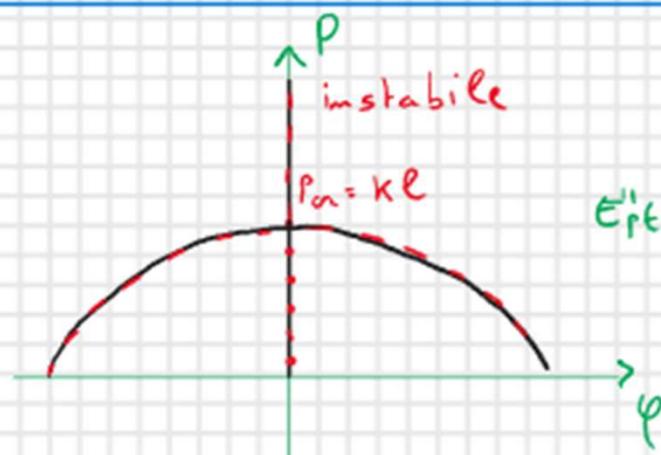
$$E_{pt} = \frac{1}{2} k (l \sin \varphi)^2 - P l (1 - \cos \varphi)$$

$$E'_{pt}(\varphi) = k l^2 \sin \varphi \cos \varphi - P l \sin \varphi = 0 \quad \text{per l'equilibrio}$$

$$\varphi = 0 \quad \forall P$$

$$\varphi \neq 0 \quad P = k l \cos \varphi$$

Comportamento post-critico



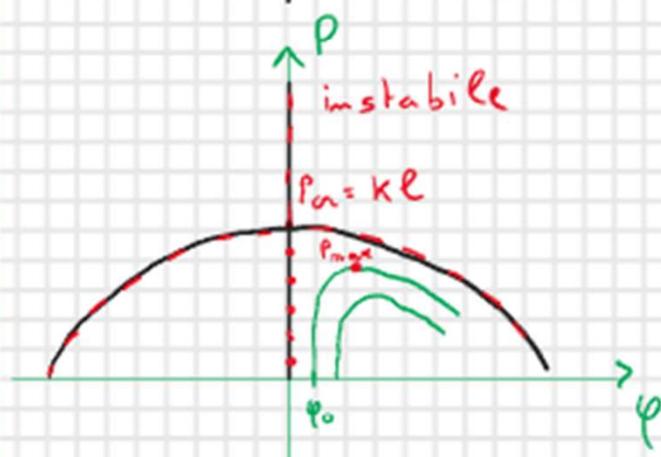
$$E''_{pt}(\varphi) = kL^2 \cos^2 \varphi - kL^2 \sin^2 \varphi - PL \cos \varphi$$

$$E''_{pt} > 0 \quad \text{eq. stabile}$$

$$\varphi = 0 \quad E''_{pt} = kL^2 - PL > 0 \quad P < kL \quad \text{stabile}$$

$$\varphi \neq 0 \quad P = kL \cos \varphi \quad E''_{pt} = -kL^2 \sin^2 \varphi < 0 \quad \text{eq. nei 2 rami instabile}$$

Caso con imperfezioni iniziali

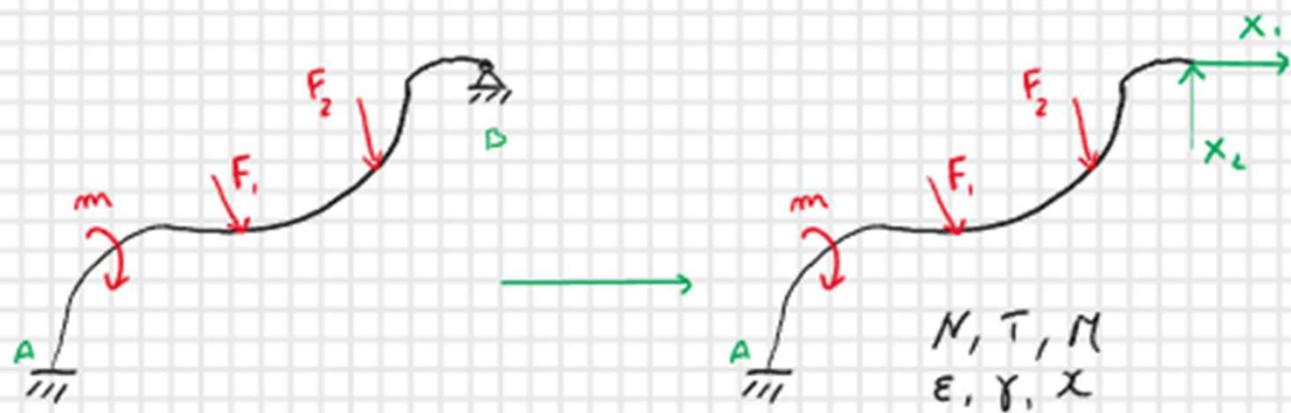


$P_{max} < P_{crit}$ il carico critico non può essere raggiunto

Struttura fortemente sensibile alle imperfezioni

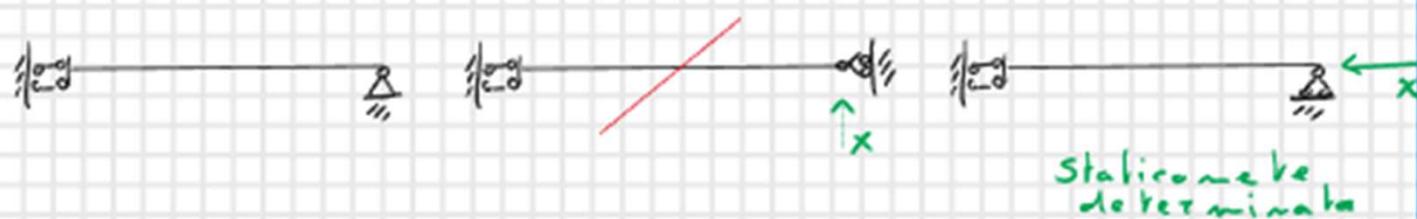
Metodo delle forze - Equazioni di Muller Breslau

Assumiamo come incognite delle grandezze statiche e imponiamo eq. di congruenza in funzione di esse

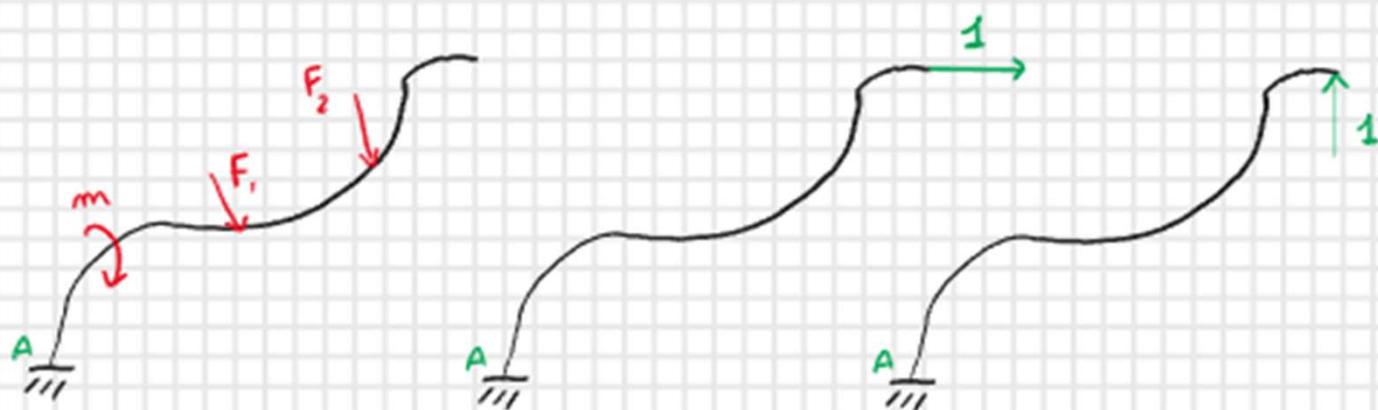


Struttura reale

Struttura principale
Staticamente determinata



Sistemi fittizi (strutture di servizio)



Sistema 0
Forze esterne

Sistema 1
 $X_1 = 1$

Sistema 2
 $X_2 = 1$

Strutture isostatiche \longrightarrow Risolvibili

N_0, T_0, M_0

N_1, T_1, M_1

N_2, T_2, M_2

$$\left. \begin{aligned} N &= N_0 + X_1 N_1 + X_2 N_2 \\ T &= T_0 + X_1 T_1 + X_2 T_2 \\ M &= M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 \end{aligned} \right\}$$

Per determinare X_1 e X_2 scriviamo le equazioni di congruenza per la struttura principale

$$W(B) = 0 \quad V(B) = 0$$

↓
Principio dei lavori virtuali

Fuorze e CBS delle strutture fittizie 1 e 2
per
spostamenti del sistema principale

1° Sistema fittizio $X_1 = 1$ $l_c = l_i$

$$1 \cdot W_B = \int_s^{l_c} N_1 \epsilon ds + \int_s^{l_i} T_1 \gamma ds + \int_s M_1 \chi ds$$

$$\boxed{E = \frac{N}{EA} \quad \gamma = \frac{KT}{GA} \quad \chi = \frac{M}{ES}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} N &= N_0 + X_1 N_1 + X_2 N_2 \\ T &= T_0 + X_1 T_1 + X_2 T_2 \\ M &= M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 \end{aligned}}$$

Sovrapposizione degli effetti

$$1 \cdot W_B = \int_s \left(N_1 \frac{N_0}{EA} + N_1 \frac{N_1}{EA} X_1 + N_1 \frac{N_2}{EA} X_2 \right) ds + \int_s \left(T_1 \frac{T_0}{GA} + T_1 \frac{T_1}{GA} X_1 + T_1 \frac{T_2}{GA} X_2 \right) ds + \int_s \left(M_1 \frac{M_0}{ES} + M_1 \frac{M_1}{ES} X_1 + M_1 \frac{M_2}{ES} X_2 \right) ds$$

Trascuriamo il contributo dovuto al taglio

$$1. w_0 = \int_S \left(N_1 \frac{N_0}{EA} + N_1 \frac{N_1}{EA} X_1 + N_1 \frac{N_2}{EA} X_2 \right) ds + \int_S \left(M_1 \frac{M_0}{ES} + M_1 \frac{M_1}{ES} X_1 + M_1 \frac{M_2}{ES} X_2 \right) ds$$

eq. congruenza $w_0 = 0$

$$0 = \int_S \left(N_1 \frac{N_0}{EA} + M_1 \frac{M_0}{ES} \right) ds + X_1 \int_S \left(\frac{N_1^2}{EA} + \frac{M_1^2}{ES} \right) ds + X_2 \int_S \left(N_1 \frac{N_2}{EA} + M_1 \frac{M_2}{ES} \right) ds \quad (1)$$

η_{10} η_{11} η_{12}

$$0 = \eta_{10} + X_1 \eta_{11} + X_2 \eta_{12} \quad (1)$$

η_{10} = spostamento della struttura reale in direzione w dovuto ai carichi esterni

η_{11} = spostamento della struttura reale in direzione w dovuto a $X_1 = 1$

η_{12} = spostamento della struttura reale in direzione w dovuto a $X_2 = 1$

2° Sistema fittizio $X_1 = 1$

$$1. v_0 = \int_S \left(N_1 \frac{N_0}{EA} + M_1 \frac{M_0}{ES} \right) ds + X_1 \int_S \left(\frac{N_1 N_1}{EA} + \frac{M_1 M_1}{ES} \right) ds + X_2 \int_S \left(\frac{N_1^2}{EA} + \frac{M_1^2}{ES} \right) ds$$

η_{20} η_{21} η_{22}

eq. congruenza $v_0 = 0$

$$0 = \eta_{20} + X_1 \eta_{21} + X_2 \eta_{22} \quad (2)$$

Sistema

$$\begin{Bmatrix} \eta_{10} \\ \eta_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

H: Matrice di flessibilità del sistema

H è simmetrica $\eta_{12} = \eta_{21}$

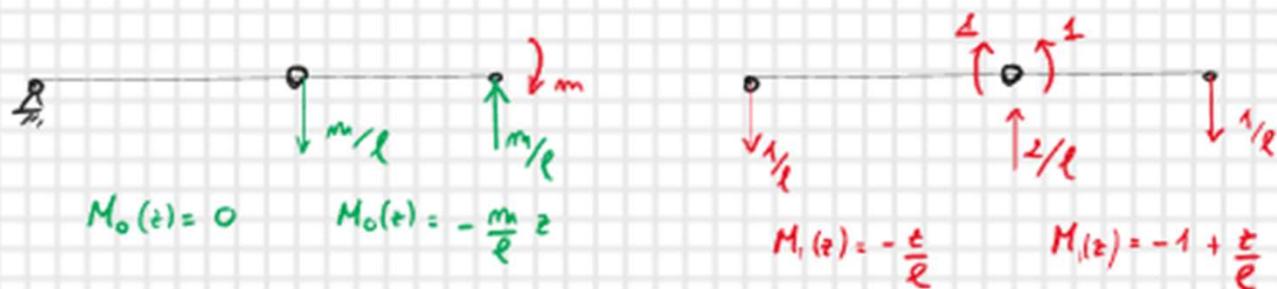
Esempio

sistema principale



$$\uparrow \varphi_{BA} = \varphi_{BC} \quad \frac{X_1 l}{3ES} = -\frac{X_2 l}{3ES} - \frac{m l}{6ES} \rightarrow X_1 \left(\frac{l}{3ES} + \frac{l}{3ES} \right) + \frac{m l}{6ES} = 0$$

$$X_1 \eta_{11} + \eta_{10} = 0$$



$$0 = \int_0^l \frac{M_0 M_1}{ES} dz + X_1 \int_0^l \frac{M_1^2}{ES} dz$$

$$\frac{1}{ES} \int_0^l \left(-\frac{m}{l} z \right) \left(-1 + \frac{z}{l} \right) dz + \frac{X_1}{ES} \left[\int_0^l \left(-\frac{z}{l} \right)^2 dz + \int_0^l \left(-1 + \frac{z}{l} \right)^2 dz \right] = 0$$

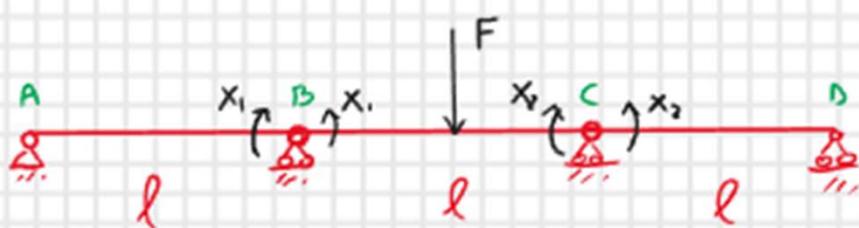
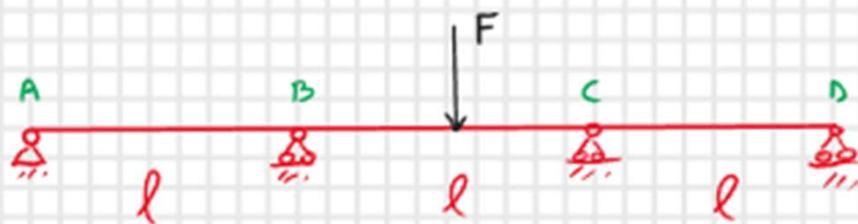
η_{10}

η_{11}

$$\frac{m l}{6ES}$$

$$+ X_1 \left(\frac{l}{3ES} + \frac{l}{3ES} \right) = 0$$

Esempio



$$\varphi_{0A} = \varphi_{0C}$$

$$\varphi_{0B} = \varphi_{0D}$$

in B

$$-\frac{x_1 l}{3ES} = \frac{x_1 l}{3ES} + \frac{x_2 l}{6ES} - \frac{Fl^2}{16ES}$$

in C

$$\frac{x_1 l}{3ES} + \frac{x_1 l}{6ES} - \frac{Fl^2}{16ES} = -\frac{x_2 l}{3ES}$$

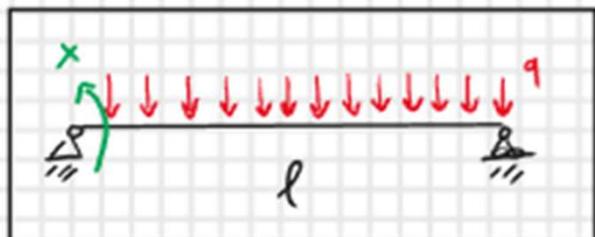
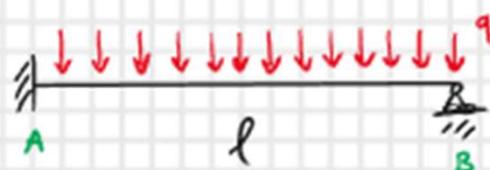
$$x_1 \left(\frac{l}{3ES} + \frac{l}{3ES} \right) + x_2 \frac{l}{6ES} - \frac{Fl^2}{16ES} = 0$$

$$x_1 \left(\frac{l}{6ES} \right) + x_2 \left(\frac{l}{3ES} + \frac{l}{3ES} \right) - \frac{Fl^2}{16ES} = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_{10} \\ m_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$m_{12} = m_{21}$$

Esercizio: soluzione con 3 metodi



1)

$$\varphi_A = 0 \quad \frac{Xl}{3ES} - \frac{ql^2}{24ES} = 0 \quad X = \frac{ql^2}{8}$$

$$\varphi_B = ? \quad \varphi_B = \frac{ql^3}{24ES} - \frac{Xl}{6ES} \longrightarrow \varphi_B = \frac{ql^3}{48}$$

2) Linea elastica

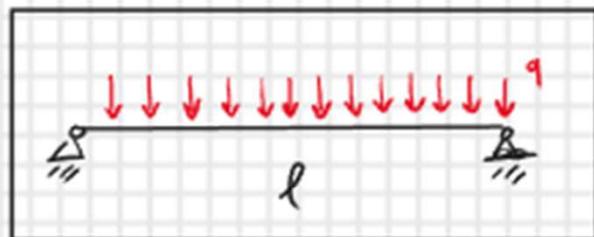
$$v''(z) = -\frac{M(z)}{ES}$$

$$M(z) = -X + \left(\frac{ql}{2} + \frac{X}{l}\right)z - qz^2/2$$

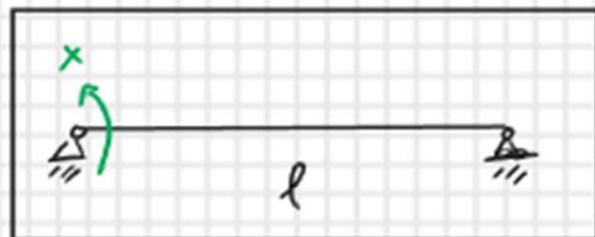
incognite: C_1 , C_2 , e X

$$v(0) = 0 \quad \varphi(0) = 0 \quad v(l) = 0$$

3) Müller-Breslau



Sistema 0



Sistema 1