Oscillazioni libere

(m e K) Parametri

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F \longrightarrow m\ddot{x}(t) + Kx(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{K}{m}x(t) = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$ Pulsazione propria del sistema

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$ eq. del moto

Risolvere eq. del moto

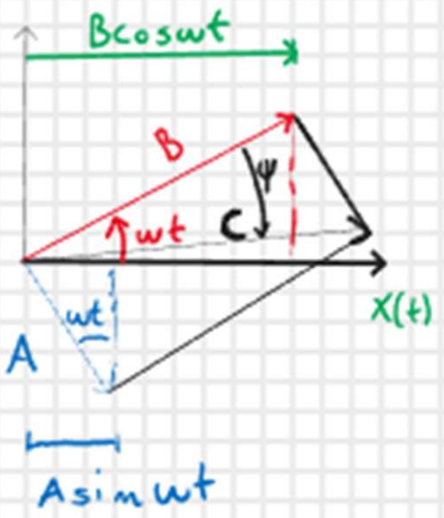
(1) $X(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ soluzione dell'equazione

$$V(t) = \dot{x}(t) = \omega A \cos \omega t - B\omega \sin \omega t$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t$$

Verifica $\longrightarrow$ introduco $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ nell'equazione del moto

Scrittura alternativa di $x(t)$



$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad tg\,\psi = \frac{A}{B}$$

$$X(t) = C\cos(\omega t - \psi) \quad (2)$$

$$x(t) = C\cos(\omega t - \psi)$$

$$\dot{x}(t) = -C\omega \operatorname{sen}(\omega t - \psi)$$

$$\ddot{x}(t) = -C\omega^2 \cos(\omega t - \psi)$$

x Spostamento max $(\omega t - \psi) = 0$ $\quad x_{max} = C$

$\dot{x}$ velocità nulla

$\ddot{x}$ $\quad \ddot{x}_{max} = -C\omega^2$

Alternativa

Soluzioni $Ce^{\lambda t} \longrightarrow x(t) = Ce^{\lambda t}$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= C\lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{x}(t) &= C\lambda^2 e^{\lambda t} \end{aligned} \longrightarrow m\lambda^2 Ce^{\lambda t} + kCe^{\lambda t} = 0$$

$$m\lambda^2 + k = 0 \longrightarrow \lambda^2 = -\frac{K}{m} \qquad \lambda = \pm i\omega$$

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} &= \cos\omega t + i \operatorname{sen}\omega t \\ e^{-i\omega t} &= \cos\omega t - i \operatorname{sen}\omega t \end{aligned} \qquad \text{Formule di Eulero}$$

$$x(t) = C_1(\cos\omega t + i \operatorname{sen}\omega t) + C_2(\cos\omega t - i \operatorname{sen}\omega t)$$

$$x(t) = \underbrace{(C_1 + C_2)}_{B}\cos\omega t + \underbrace{(iC_1 - iC_2)}_{A}\operatorname{sen}\omega t$$

Alternativa

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{B}{A}$$

$$A = C\cos\psi \qquad B = C\operatorname{sen}\psi$$

$$x(t) = C\cos\psi \operatorname{sen}\omega t + C\operatorname{sen}\psi\cos\omega t = C\operatorname{sen}(\omega t + \psi) \quad (4)$$

$$X(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

Condizioni iniziali $t = 0$

$x(t=0) = x_0 \qquad x(t=0) = v_0 \qquad$ Noti

$x(0) = B = x_0 \longrightarrow B = x_0$

$x(t) = \omega A \cos \omega t - B \omega \sin \omega t$

$x(0) = \omega A = v_0 \longrightarrow A = v_0/\omega$

$$X(t) = C \cos(\omega t - \psi)$$

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \qquad tg\,\psi = \frac{v_0}{\omega x_0}$$

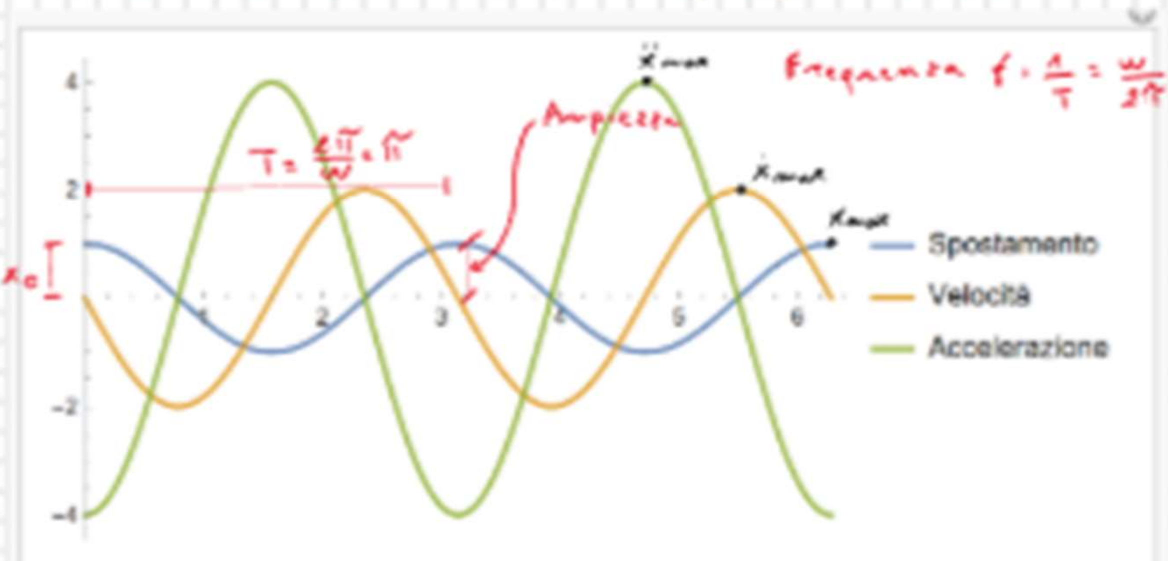
Equazione del moto

- $x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t$

Periodica $\quad x(t) = x(t+T)$

Esempio

$x_0 = 1 \quad v_0 = 0 \quad \omega = 2 \longrightarrow x(t) = \cos 2t$



$x_{max} \longrightarrow \dot{x} = 0 \longrightarrow \ddot{x}_{max}$

$\dot{x}_{max} \longrightarrow x = 0$ e $\ddot{x} = 0$

$x(t) = C \cos(\omega t - \varphi)$

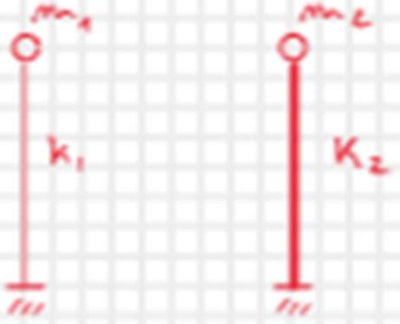
$\dot{x}(t) = -C\omega \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$ $\xrightarrow{\text{valori massimi}}$ $x_{max} = C$, $\dot{x}_{max} = C\omega$, $\ddot{x}_{max} = C\omega^2$

$\ddot{x}(t) = -C\omega^2 \cos(\omega t - \varphi)$

Nel nostro esempio $C = x_0 = 1$

$x_{max} = 1$ $\dot{x}_{max} = 2$ $\ddot{x}_{max} = 4$

Struttura



$m_1 = m_2$

$K_2 > K_1$

$\omega_2 > \omega_1$

$T_2 < T_1$

Struttura 2 più rigida

Considerazioni energetiche

$\frac{\cancel{dL_{nc}}}{dt} = \frac{dE_{tot}}{dt} = \frac{d}{dt}(T+V) = 0$ $E_{tot} = T + V =$ costante

$t_0 \longrightarrow x_0$ e v_0

$T_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$ $U_0 = \frac{1}{2} k x_0^2$ $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k x_0^2$

$t_1 \longrightarrow x_{max}$ e $\dot{x}(t_1) = 0$

$x(t) = C\cos(\omega t - \varphi)$ $x_{max} = C$ $T_1 = 0$ $U_1 = \frac{1}{2} k C^2$

$$E_n = T_n + U_n = \frac{1}{2} k C^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 + \frac{1}{2} k \frac{v_0^2}{\omega^2} = \frac{1}{2} k x_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 = T_0 + U_0$$