Oscillatore smorzato

c : coeff. di smorzamento

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

Introduco fattore di smorzamento $\nu = \frac{c}{2\sqrt{Km}}$

1) $\ddot{x}(t) + 2\nu\omega\,\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$

Soluzione eq. del moto (1)

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$x(t) = Ce^{\lambda t}$ $\quad \dot{x}(t) = C\lambda e^{\lambda t}$ $\quad \ddot{x}(t) = C\lambda^2 e^{\lambda t}$ $\quad$ (2)

Sostituiamo le (2) nella (1)

$$C\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\nu\omega C\lambda e^{\lambda t} + \omega^2 C e^{\lambda t} = 0$$

$\lambda^2 + 2\nu\omega\lambda + \omega^2 = 0$ eq. di 2° grado in λ

soluzione $\lambda_{1,2} = -\nu\omega \pm \omega\sqrt{\nu^2 - 1}$

3 casi :

- $\nu < 1$
- $\nu = 1$ smorzamento critico
- $\nu > 1$

1) Caso $\nu < 1$ (Ingegneria Civile $\nu = 3\% - 7\%$)

$$\lambda_{1,2} = -\nu\omega \pm \omega\sqrt{-(1-\nu^2)} = -\nu\omega \pm \omega i\sqrt{1-\nu^2}$$

$$\Omega = \omega\sqrt{1-\nu^2}$$ Pulsazione dell' oscillatore smorzato

$$\lambda_{1,2} = -\nu\omega \pm i\Omega$$

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{(-\nu\omega + i\Omega)t} + C_2 e^{(-\nu\omega - i\Omega)t}$$

$$= \underbrace{e^{-\nu\omega t}}_{\text{decadimento}} \underbrace{\left(C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t}\right)}_{\text{moto oscillatorio}}$$

$t \to \infty$
$x \to 0$

$$x(t) = e^{-\nu\omega t}\left[C_1(\cos\Omega t + i \operatorname{sen}\Omega t) + C_2(\cos\Omega t - i\operatorname{sen}\Omega t)\right] =$$

$$= e^{-\nu\omega t}\left[\underbrace{(C_1 + C_2)}_{B}\cos\Omega t + \underbrace{(C_1 i - C_2 i)}_{A}\operatorname{sen}\Omega t\right]$$

$$x(t) = e^{-\nu\omega t}\left(A\operatorname{sen}\Omega t + B\cos\Omega t\right)$$

$$x(t) = e^{-\nu\omega t}\, C\cos(\Omega t - \psi)$$

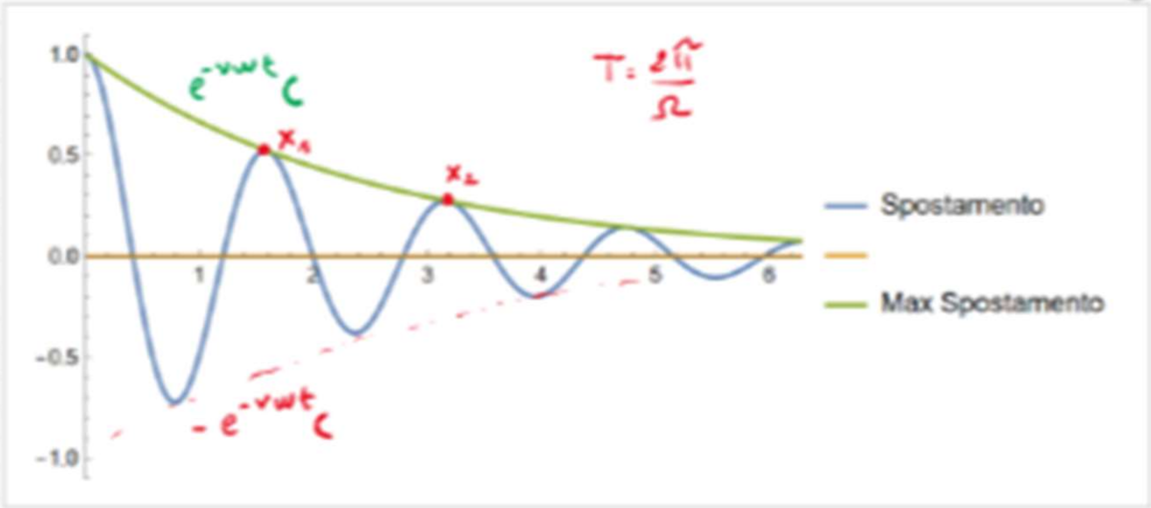
Condizioni iniziale

$x(0) = x_0 \qquad B = x_0$

$$\dot{x}(t) = -\nu\omega e^{-\nu\omega t}(A\operatorname{sen}\Omega t + B\cos\Omega t) + e^{-\nu\omega t}(A\Omega\cos\Omega t - B\Omega\operatorname{sen}\Omega t)$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = -\nu\omega B + A\Omega \longrightarrow A = \frac{v_0}{\Omega} + \frac{\nu\omega x_0}{\Omega}$$

$$x(t) = e^{-\nu\omega t}\left[\left(\frac{v_0}{\Omega} + \frac{\nu\omega x_0}{\Omega}\right)\operatorname{sen}\Omega t + x_0\cos\Omega t\right]$$ se $\nu < 1$



$x_0 = 1$

$v_0 = 0$

$\Omega = 4$

$\nu = 0{,}1$

$x_1 = x(t_1)$ $\quad t_1$ coincide con un max

$$x_1 = e^{-\nu\omega t_1}\left(A \operatorname{sen} \Omega t_1 + B \cos \Omega t_1\right)$$

$$x_2 = x(t_1+T) = e^{-\nu\omega(t_1+T)}\left(A \operatorname{sen} \Omega(t_1+T) + B \cos \Omega(t_1+T)\right) =$$

$$= e^{-\nu\omega T}\underbrace{e^{-\nu\omega t_1}\left(A \operatorname{sen} \Omega(t_1+T) + B \cos \Omega(t_1+T)\right)}_{x_1}$$

$$x_2 = e^{-\nu\omega T} x_1$$

$$x_n = e^{-\nu\omega T} x_{n-1} \longrightarrow e^{\nu\omega T} = \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

$\delta = \nu\omega T \longrightarrow \delta = \ln \frac{x_{n-1}}{x_n}$ decremento logaritmico

δ è noto, conosciamo x_{n-1} e x_n $\qquad \delta = \frac{\nu\omega 2\pi}{\omega\sqrt{1-\nu^2}} = \frac{\nu\omega 2\pi}{\Omega}$

ipotesi $\nu \ll 1$ $\quad \delta \simeq 2\pi\nu \longrightarrow \nu \simeq \frac{\delta}{2\pi}$

Considerazione energetica

Dissipazione di energia $t_1 \longrightarrow t_2$

$$\Delta U_{t_1-t_2} = \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x_2^2 = \frac{1}{2} k x_1^2\left(1 - e^{-2\nu\omega T}\right)$$

$$x_2 = e^{-\nu\omega T} x_1$$

$$\Delta U_{t_2-t_3} = \frac{1}{2} k x_2^2\left(1 - e^{-2\nu\omega T}\right) \qquad \Delta U_{t_1-t_2} > \Delta U_{t_2-t_3}$$

$x_2^2 < x_1^2$ $\quad$ la dissipazione di energia si riduce

Fattore di smorzamento critico $\nu = 1$

soluzione $\lambda_{1,2} = -\nu\omega \pm \omega\sqrt{\nu^2 - 1}$ si riduce

$\lambda_{1,2} = -\omega$ 2 soluzioni reali e coincidenti

Soluzione dell'eq. differenziale del 2° ordine lineare

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} = e^{-\omega t}(C_1 + t C_2)$$

Non rappresenta più un moto oscillatorio

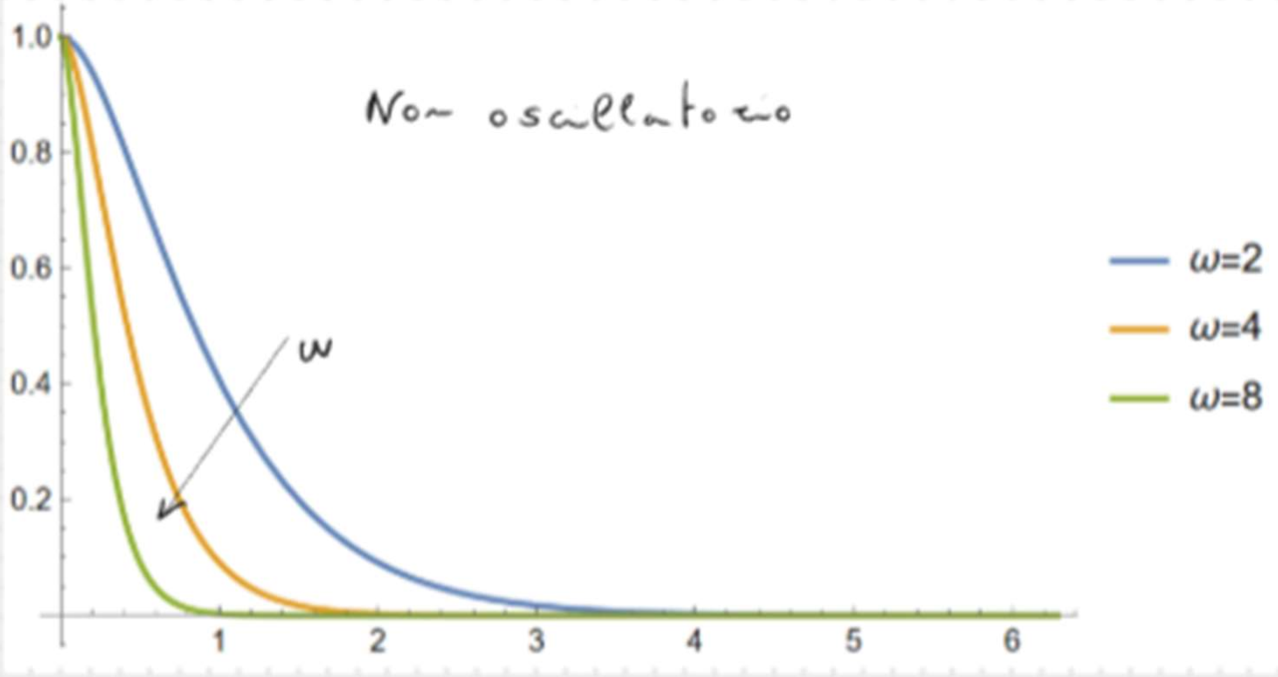
Condizioni iniziali

- $x(0) = C_1 = x_0$

$$\dot{x}(t) = -\omega e^{-\omega t}(C_1 + t C_2) + e^{-\omega t} C_2$$

- $\dot{x}(0) = -\omega C_1 + C_2 = v_0 \quad C_2 = \omega x_0 + v_0$

$$x(t) = e^{-\omega t}\left[x_0 + (\omega x_0 + v_0) t\right]$$



Sistema sovrasmorzato $\nu > 1$

$$\lambda_{1,2} = -\nu\omega \pm \omega\sqrt{\nu^2-1} = -\nu\omega \pm \Omega$$

2 soluzioni reali e distinte

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{(-\nu\omega+\Omega)t} + C_2 e^{(-\nu\omega-\Omega)t}$$

$$x(t) = e^{-\nu\omega t}\left(C_1 e^{\Omega t} + C_2 e^{-\Omega t}\right)$$

Non è un moto oscillatorio

$$\boxed{e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha}$$

Manca l'esponente immaginario

Condizioni iniziali

- $x(0) = C_1 + C_2 = 0$
- $\dot{x}(t) = -\nu\omega e^{-\nu\omega t}\left(C_1 e^{\Omega t} + C_2 e^{-\Omega t}\right) + e^{-\nu\omega t}\left(C_1 \Omega e^{\Omega t} - C_2 \Omega e^{-\Omega t}\right)$

$$\dot{x}(0) = -\nu\omega\left(C_1 + C_2\right) + \left(C_1\Omega - C_2\Omega\right) = v_0$$

$$C_1 = \frac{v_0 + \nu\omega x_0 + \Omega x_0}{2\Omega} \qquad C_2 = \frac{\Omega x_0 - v_0 - \nu\omega x_0}{2\Omega}$$