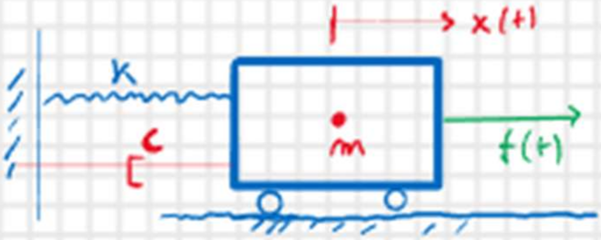
Oscillatore smorzato e forzato



$$f(t) = F \, \text{sen}(\bar{\omega} t)$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F \, \text{sen}\, \bar{\omega} t$$

(1) $\ddot{x}(t) + 2\nu\omega \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = x_{st}\, \omega^2 \text{sen}\, \bar{\omega} t \qquad x_{st} = \frac{F}{K}$

Soluzione

$$x(t) = x_{om}(t) + x_p(t)$$

$x_{om}(t)$ soluzione del sistema smorzato con $f(t) = 0$

$x_p(t) = C \, \text{sen}(\bar{\omega} t - \varphi) \longrightarrow$ Determinare C e φ

$$\dot{x}_p(t) = \bar{\omega} C \cos(\bar{\omega} t - \varphi)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -\bar{\omega}^2 C \, \text{sen}(\bar{\omega} t - \varphi)$$

Le sostituiamo all'interno dell'equazione del moto (1)

$$-\bar{\omega}^2 C \, \text{sen}(\bar{\omega} t - \varphi) + 2\nu\omega\bar{\omega} C \cos(\bar{\omega} t - \varphi) + \omega^2 C \, \text{sen}(\bar{\omega} t - \varphi) = x_{st}\, \omega^2 \text{sen}\, \bar{\omega} t$$

- $t = 0$

$$\bar{\omega}^2 C \, \text{sen}\varphi + 2\nu\omega\bar{\omega} C \cos\varphi - \omega^2 C \, \text{sen}\varphi = 0$$

$$\frac{\text{sen}\varphi}{\cos\varphi} = \frac{2\nu\omega\bar{\omega}}{\omega^2 - \bar{\omega}^2} = \text{tg}\varphi \longrightarrow \varphi = \text{arctg}\, \frac{2\nu\beta}{1-\beta^2}$$

- $t = \bar{\omega} t - \varphi = 0 \qquad t = \varphi / \bar{\omega}$

$$2\nu\omega\bar{\omega} C = x_{st}\, \omega^2 \text{sen}\varphi \longrightarrow C = \frac{x_{st}\, \omega^2}{2\nu\omega\bar{\omega}} \text{sen}\varphi$$

$$\boxed{\text{sen}\varphi = \frac{\text{tg}\varphi}{\sqrt{1 - \text{tg}\varphi^2}}}$$

$$C = x_{st} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\nu^2\beta^2}}$$

$$C = x_{st}\, N$$

Fattore di amplificazione N

$$\boxed{x_p(t) = x_{st} N \,\mathrm{sen}(\bar{\omega} t - \varphi)}$$

$x(t) = x_{om}(t) + x_p(t)$ soluzione completa

$x_{om}(t)$ soluzione del sistema smorzato con $f(t) = 0$

Consideriamo il caso con $\nu < 1$ (civile)

- Il moto descritto da $x_{om}(t)$ è oscillatorio e si riduce al passare del tempo
- Per $t \to \infty$ $x_{om}(t) \longrightarrow 0$

Dopo un regime transitorio il contributo di $x_{om}(t)$ si riduce e la soluzione diventa

$x(t) \simeq x_p(t)$ dopo un tempo abbastanza grande.

Soluzione a regime

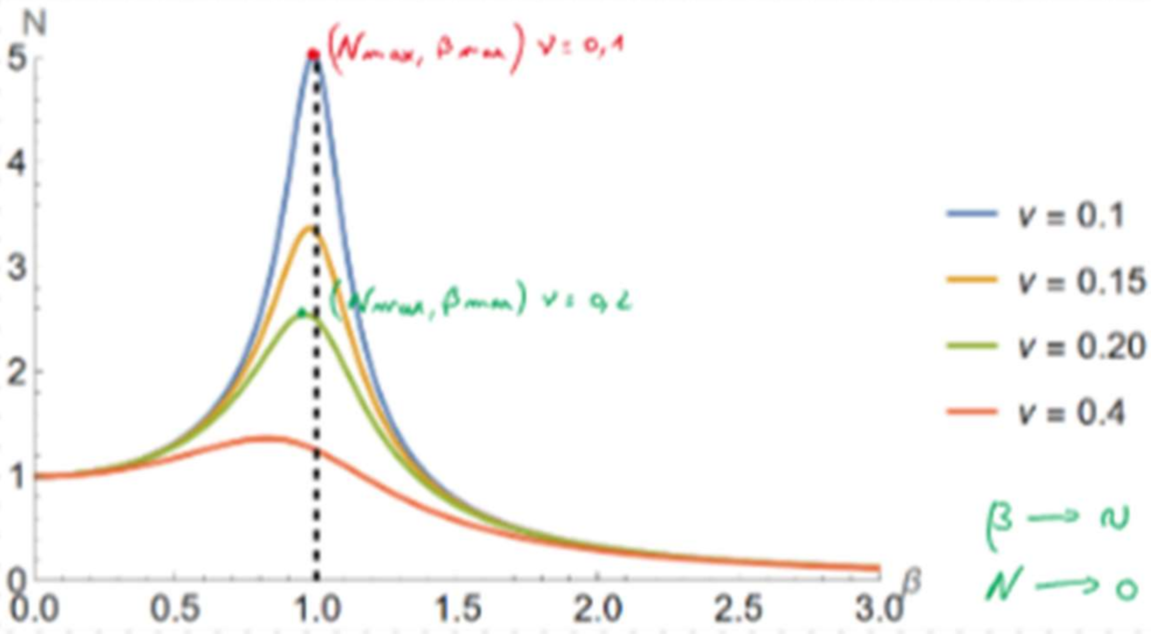
Studiamo il comportamento di N

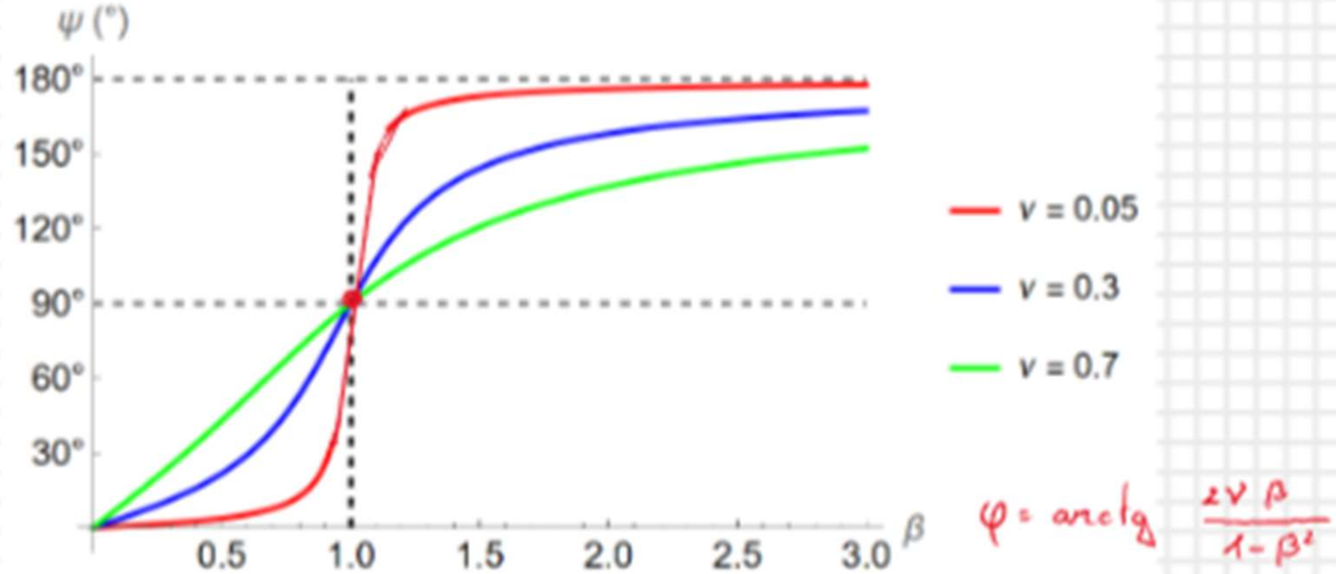
$$N = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\nu^2\beta^2}}$$

$$\frac{\partial N}{\partial \beta} = 0 \longrightarrow \beta_{max} = \sqrt{1-2\nu^2}$$

$$N_{max} = \frac{1}{2\nu\sqrt{1-\nu^2}}$$

$\nu \ll$ $N_{max} = \frac{1}{2\nu}$





Per $\beta = 1 \longrightarrow tg\,\varphi \to \infty \quad \varphi = 90°$