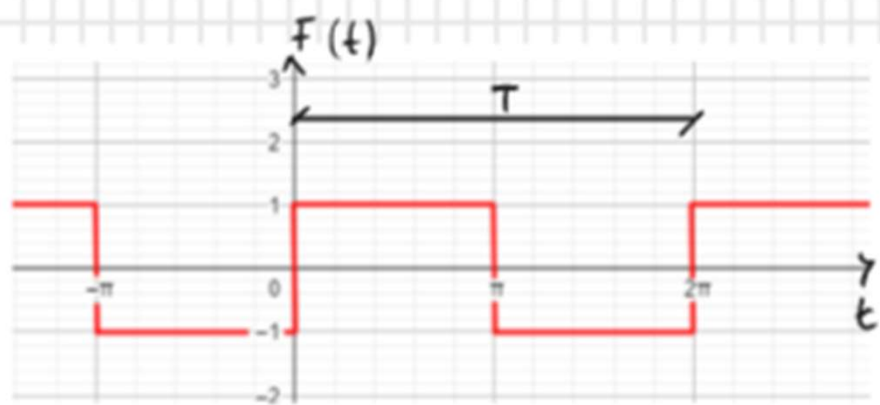


Oscillatore smorzato da forzante periodica



$$T = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$$

$F(t)$ periodica $\longrightarrow F(a) = F(a+T) \quad \forall a$

$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\bar{\omega}t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\bar{\omega}t)$ $\bar{\omega}$: Pulsazione fondamentale
Rappresentazione in serie di Fourier

$$a_n \cos(n\bar{\omega}t) + b_n \sin(n\bar{\omega}t) = C_n \sin(n\bar{\omega}t + \varphi_n)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \varphi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n}$$

Dobbiamo ricavare i valori di a_0 , a_n e b_n

Calcolo di a_0

$$\int_0^T F(t) dt = \int_0^T a_0 dt = a_0 T \longrightarrow a_0 = \frac{\int_0^T F(t) dt}{T}$$

a_0 : Valore medio di $F(t)$ nel periodo T

$$\int_0^T F(t) dt = \int_0^T a_0 dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\bar{\omega}t) dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\bar{\omega}t) dt$$

$$\int_0^T \sin n\bar{\omega}t dt = 0 \quad \text{Nel periodo è nullo} \quad \int_0^T \cos n\bar{\omega}t dt = 0$$

Calcolo di a_n e b_n

$$a_n \longrightarrow \int_0^T F(t) \cos n\bar{\omega}t \, dt \quad \text{Moltiplico } F(t) \text{ per } \cos n\bar{\omega}t$$

$$b_n \longrightarrow \int_0^T F(t) \sin n\bar{\omega}t \, dt \quad \text{Moltiplico } F(t) \text{ per } \sin n\bar{\omega}t$$

Relazioni - prodotti tra funzioni trigonometriche

$$\int_0^{T=2\pi/\bar{\omega}} \cos^2 n\bar{\omega}t \, dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin^2 n\bar{\omega}t}{4n\bar{\omega}} \Big|_0^T = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\bar{\omega}}$$

$$\int_0^T \sin^2 n\bar{\omega}t \, dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin^2 n\bar{\omega}t}{4n\bar{\omega}} \Big|_0^T = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\bar{\omega}}$$

$$\int_0^T \sin n\bar{\omega}t \cdot \cos m\bar{\omega}t \, dt = 0$$

$$\int_0^T \sin m\bar{\omega}t \cdot \sin n\bar{\omega}t \, dt = 0 \quad m \neq n$$

$$\int_0^T \cos m\bar{\omega}t \cdot \cos n\bar{\omega}t \, dt = 0 \quad m \neq n$$

All'interno delle sommatorie gli unici termini che non si annullano sono quelli quadratici

$$\bullet \int_0^T F(t) \cos n\bar{\omega}t \, dt = a_n \int \cos^2 n\bar{\omega}t = a_n \frac{\pi}{\bar{\omega}}$$

$$\bullet \int_0^T F(t) \sin n\bar{\omega}t \, dt = b_n \int \sin^2 n\bar{\omega}t = b_n \frac{\pi}{\bar{\omega}}$$

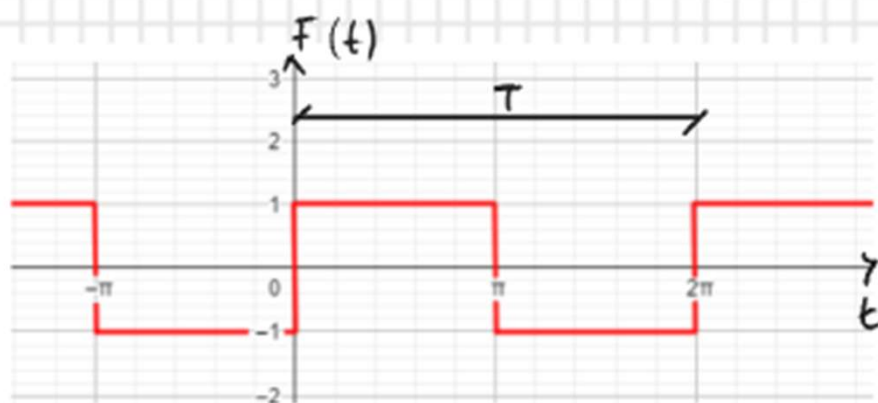
Riassumendo

$$a_0 = \frac{\int_0^T F(t) dt}{T}$$

$$a_m = \frac{\bar{\omega}}{\pi} \int_0^T F(t) \cos(m \bar{\omega} t) dt$$

$$b_m = \frac{\bar{\omega}}{\pi} \int_0^T F(t) \sin(m \bar{\omega} t) dt$$

Esempio



$$F(t) = 1 \quad 0 \leq t < \pi$$

$$F(t) = -1 \quad \pi \leq t < 2\pi$$

$$\bar{\omega} = 1$$

$$T = 2\pi$$

Calcolo $a_0 \longrightarrow a_0 = 0$ Valore medio

Calcolo a_m e b_m

$$a_m = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 \cos(m \bar{\omega} t) dt + \int_{\pi}^{2\pi} -1 \cdot \cos(m \bar{\omega} t) dt \right)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 \sin(m \bar{\omega} t) dt + \int_{\pi}^{2\pi} -1 \cdot \sin(m \bar{\omega} t) dt \right)$$

$$\int \cos m \bar{\omega} t dt = \frac{\sin m \bar{\omega} t}{m \bar{\omega}}$$

$$\int \sin m \bar{\omega} t dt = -\frac{\cos m \bar{\omega} t}{m \bar{\omega}}$$

$$m=1$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 \cos(\bar{\omega} t) dt + \int_{\pi}^{2\pi} -1 \cos(\bar{\omega} t) dt \right) = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} 1 \sin(\bar{\omega} t) dt + \int_{\pi}^{2\pi} -1 \sin(\bar{\omega} t) dt \right) = \frac{4}{\pi}$$

Per n generico

$$a_n = 0$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Forzante $F(t)$: $F(t) = a_0 + \sum a_n \cos(n \bar{\omega} t) + \sum b_n \sin(n \bar{\omega} t)$

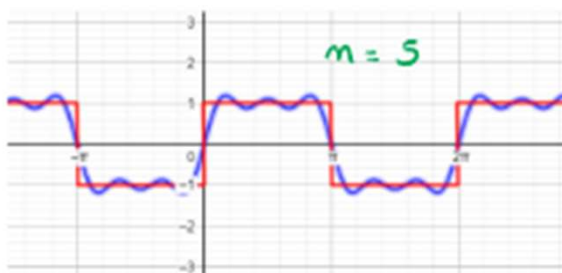
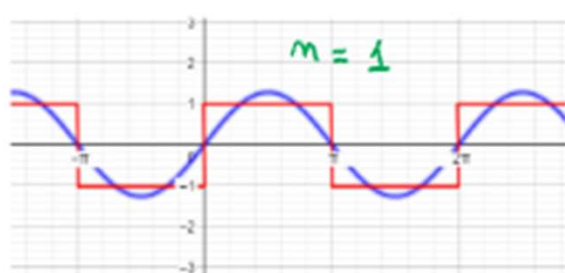
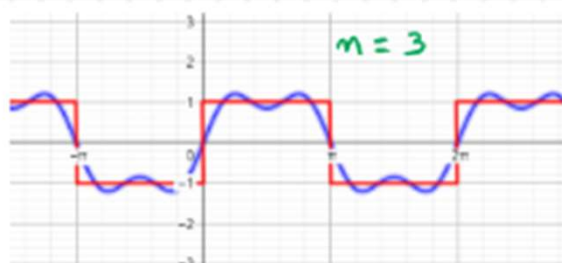
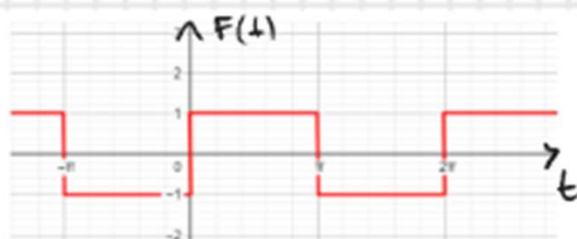
$$m=1 \quad F_1(t) = \frac{4}{\pi} \sin \bar{\omega} t$$

$$m=2 \quad F_2(t) = \frac{4}{\pi} \sin \bar{\omega} t$$

$$m=3 \quad F_3(t) = \frac{4}{\pi} \sin \bar{\omega} t + \frac{4}{3\pi} \sin 3\bar{\omega} t$$

$$m=5 \quad F_5(t) = \frac{4}{\pi} \sin \bar{\omega} t + \frac{4}{3\pi} \sin 3\bar{\omega} t + \frac{4}{5\pi} \sin 5\bar{\omega} t$$

Approssimiamo la $F(t)$
aggiungendo sempre più
contributi



$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = F(t)$$

$F(t)$ Periodica

Equazione del moto

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n C_n \sin(n \bar{\omega} t + \varphi_n)$$



$$\ddot{x}(t) + 2\nu \bar{\omega} \dot{x}(t) + \bar{\omega}^2 x(t) = x_{st0} \bar{\omega}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} x_{stn} \bar{\omega}^2 \sin(n \bar{\omega} t + \varphi_n)$$

Soluzione è una sovrapposizione di tante forzanti armoniche

Soluzione $x(t) = x_{om}(t) + x_p(t)$

Trascuriamo il regime transitorio $\rightarrow x(t) \approx x_p(t)$

$$x(t) \approx x_p(t) = x_{st0} + \sum_{n=1}^{\infty} x_{stn} N_n \sin(n \bar{\omega} t + \varphi_n - \varphi_n)$$

Come nell'oscillazione smorzata e forzata (forzante armonica)

$$x_{st0} = \frac{a_0}{k} \quad x_{stn} = \frac{C_n}{k}$$

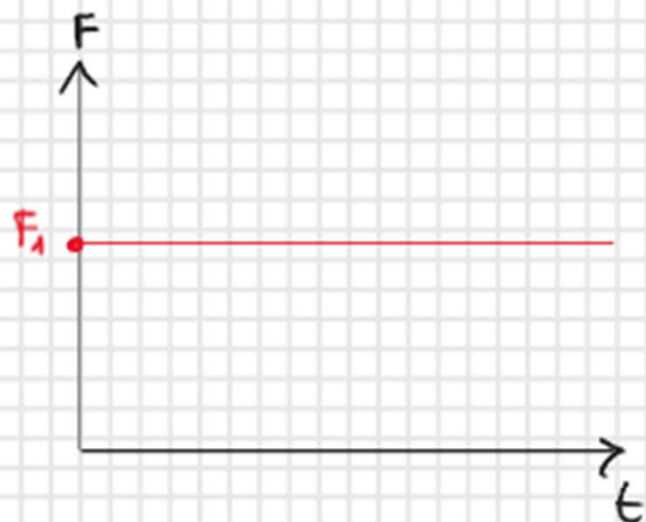
$$\tan \varphi_n = \frac{2\nu n \frac{\bar{\omega}}{\omega}}{1 - \left(n \frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2}$$

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(n \frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2\right)^2 + 2\nu^2 n^2 \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}}}$$

Forza variabile con legge qualsiasi

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = F(t) = -m \ddot{y}(t)$$

Partiamo con una forza costante



$$* m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + kx(t) = F_1$$

$$F(0) = 0$$

$$F(t) = 1$$

Condizioni iniziali

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$$

Soluzione dell'equazione del moto *

$$x(t) = e^{-\nu \omega t} (A \sin \omega t + B \cos \omega t) + \frac{F_1}{k}$$

Condizioni iniziali

$$\bullet x(0) = B + F_1/k = 0 \quad B = -F_1/k$$

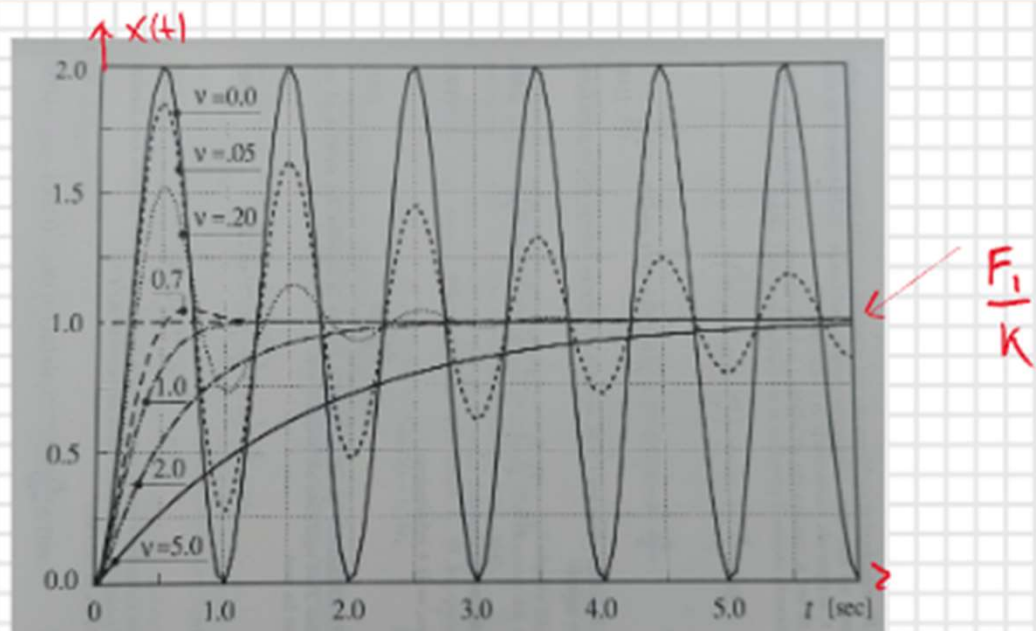
$$\dot{x}(t) = -\nu \omega e^{-\nu \omega t} (A \sin \omega t + B \cos \omega t) + e^{-\nu \omega t} (A \cos \omega t - B \omega \sin \omega t)$$

$$\bullet \dot{x}(0) = 0 \quad A = -\frac{F_1}{k} \frac{\nu \omega}{\omega}$$

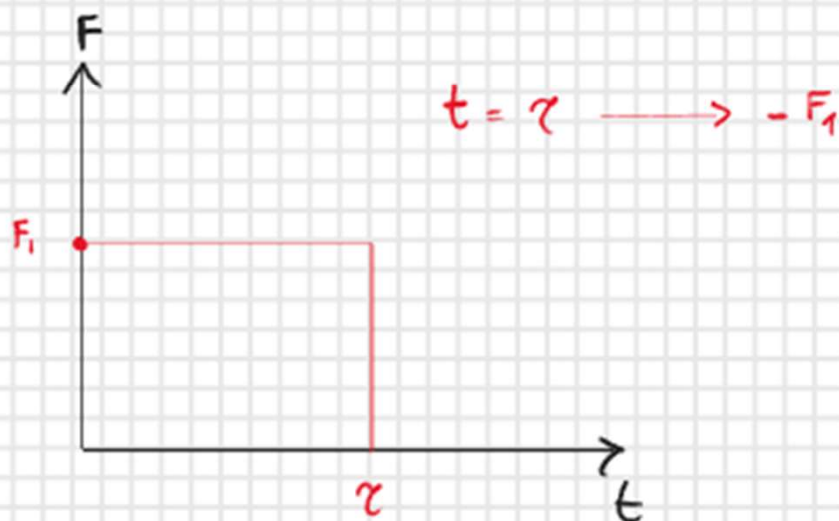
Risposta ad una forzante costante

$$x(t) = \frac{F_1}{k} \left[1 - e^{-\nu \omega t} \left(\frac{\nu \omega}{\omega} \sin \omega t + \cos \omega t \right) \right]$$

$$\text{Per } t \rightarrow \infty \quad x(t) = \frac{F_1}{k}$$



Introduco una forza $-F_1$



$$x(t) = \frac{F_1}{K} \left[1 - e^{-\frac{v}{2} t} \left(\frac{v}{2} \sin \omega t + \cos \omega t \right) \right] +$$

$$- \frac{F_1}{K} \left[1 - e^{-\frac{v}{2} (t-\tau)} \left(\frac{v}{2} \sin \omega (t-\tau) + \cos \omega (t-\tau) \right) \right] \quad t > \tau$$

Risposta ad un impulso $F_1 \cdot \tau$

Definisco la funzione $g(t)$:

$$g(t) = \frac{F_1}{K} \left[1 - e^{-\frac{v}{2} t} \left(\frac{v}{2} \sin \omega t + \cos \omega t \right) \right]$$

quindi: $x(t) = g(t) - g(t-\tau)$

Facciamo tendere $\tau \rightarrow d\tau$

$$x(t) = g(t) - g(t - d\tau) = \frac{dg(t)}{dt} d\tau$$

Risposta ad un impulso $F_1 d\tau$ in $t=0$

Calcolo

$$\frac{dg(t)}{dt} = -\frac{F_1}{K} \left[-v\omega e^{-v\omega t} \left(\frac{v\omega}{\Omega} \sin \Omega t + \cos \Omega t \right) + e^{-v\omega t} (v\omega \cos \Omega t - \Omega \sin \Omega t) \right]$$

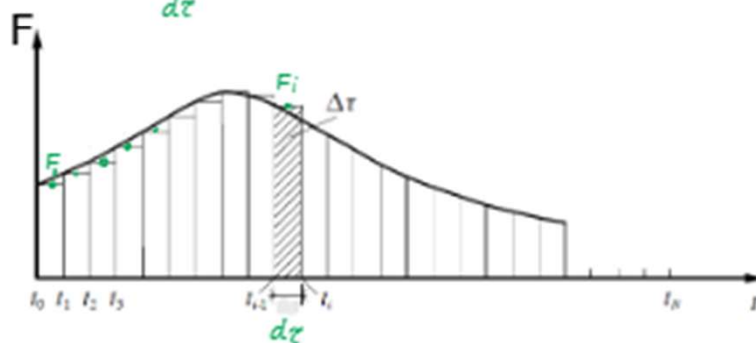
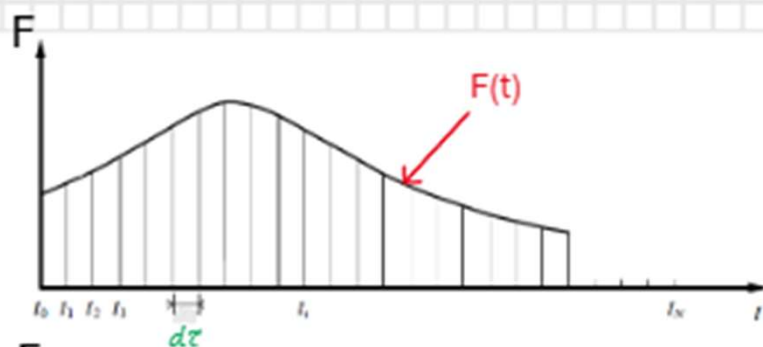
$$x(t) = \frac{F_1}{K} \left(\Omega + \frac{v^2 \omega^2}{\Omega} \right) e^{-v\omega t} \sin \Omega t d\tau = \frac{F_1}{m\Omega} e^{-v\omega t} \sin \Omega t d\tau$$

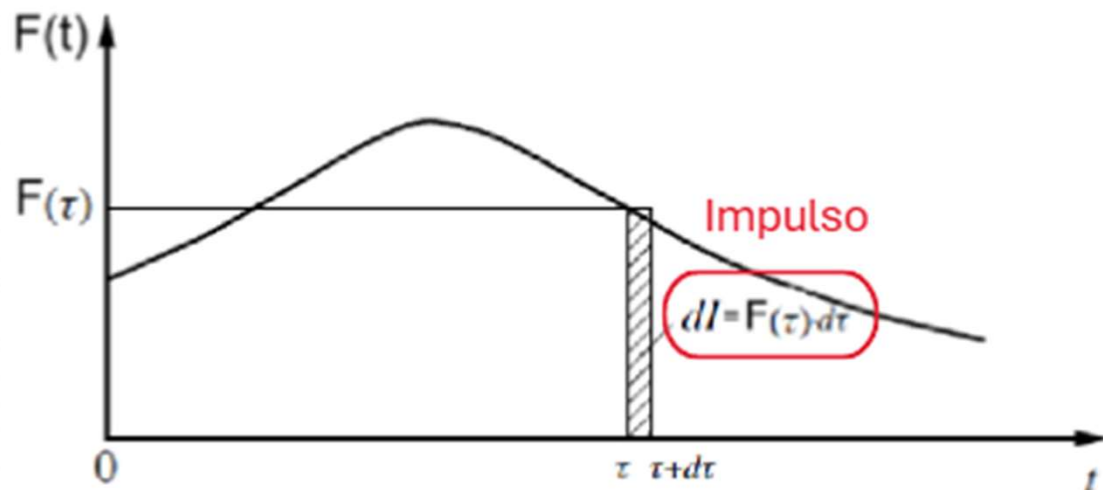
Spostamento dovuto ad un impulso $F_1 d\tau$ in $t=0$

Spostamento dovuto ad un impulso applicato ad un istante qualunque t_1

$$x(t) = \frac{F_1}{m\Omega} e^{-v\omega(t-t_1)} \sin \Omega(t-t_1) d\tau \quad t > t_1$$

La $F(t)$ generica può essere interpretata come una successione di impulsi $F_i d\tau$





Lo spostamento $x(t)$ al tempo t è determinato sommando i contributi degli impulsi $F(\tau)d\tau$ precedenti al tempo t

Soluzione per una forzante $F(t)$

$$x(t) = \int_0^t \frac{F(\tau)}{m\omega^2} e^{-\gamma\omega(t-\tau)} \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

Integrale di Duhamel

τ = variabile d'integrazione

Esempio semplice

- $F(t) = p_0$ $\gamma = 0$ Forzante costante, senza smorzamento

$$x(t) = \int_0^t \frac{p_0}{m\omega^2} \sin \omega(t-\tau) d\tau = \frac{p_0}{m\omega^2} \cos \omega(t-\tau) \Big|_0^t$$

$$x(t) = \frac{p_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t)$$