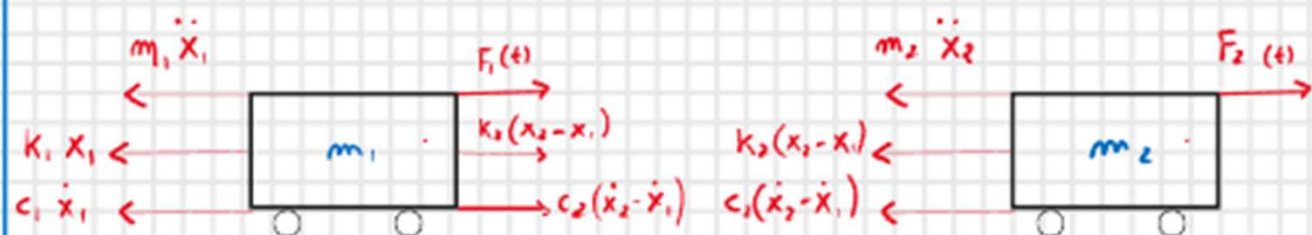
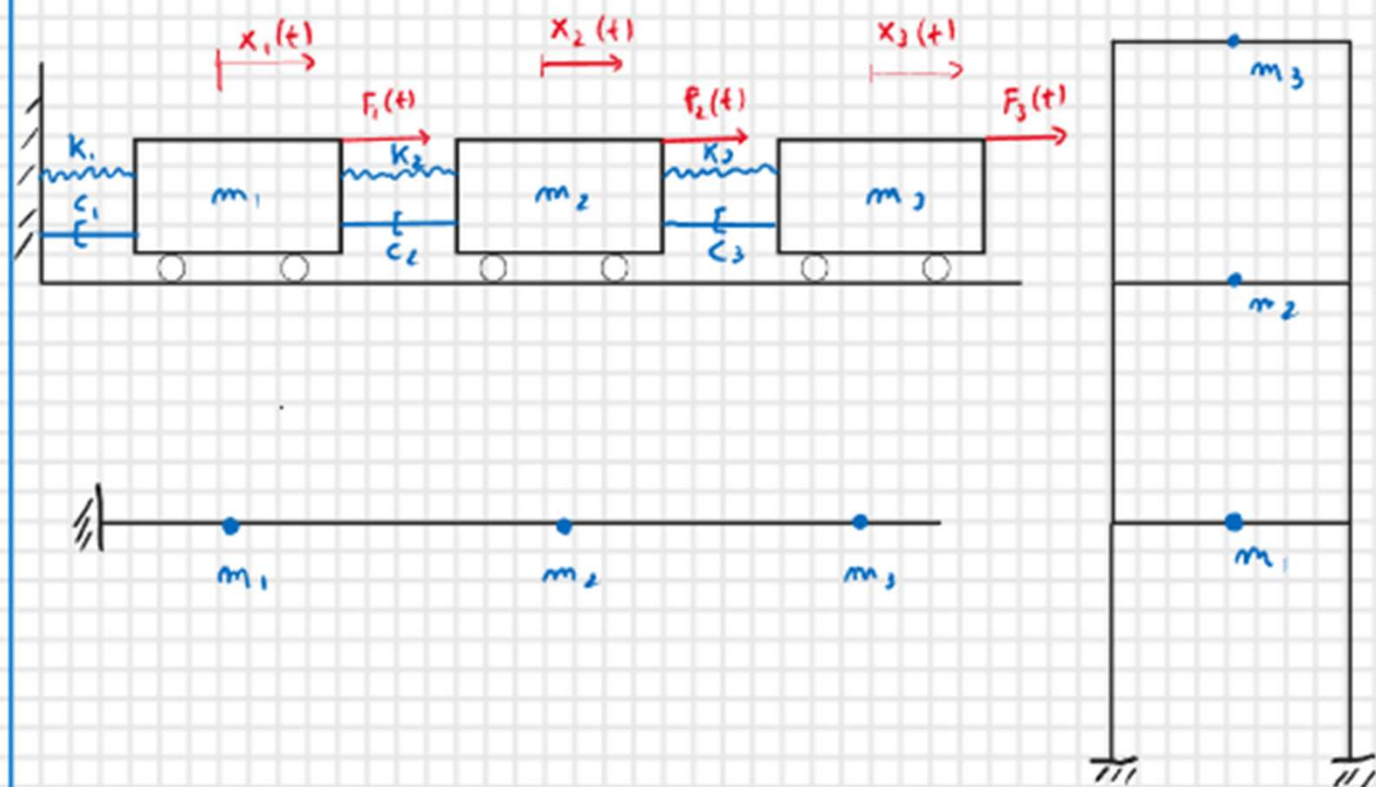


Sistemi a n gradi di libertà



Equilibrio m_1

$$-m_1 \ddot{x}_1 - k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 + k_2 (x_2 - x_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_1(t) = 0$$

Equilibrio m_2

$$-m_2 \ddot{x}_2 - k_2 (x_2 - x_1) - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F_2(t) = 0$$

$$\begin{array}{c}
 \text{[M]} \\
 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{Matrice} \\ \text{Smorzamento} \end{array} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{array}{c} \text{[K]} \\ \text{Matrice} \\ \text{rigidezza} \end{array} \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \\
 \text{Matrice} & \text{Matrice} & \text{Matrice} \\
 \text{masse} & \text{Smorzamento} & \text{rigidezza}
 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} \longrightarrow \text{Forze d'inerzia}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} \longrightarrow \text{Forze viscosse}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \longrightarrow \text{Forze elastiche}$$

Oscillazioni libere

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{0\} \quad *$$

La soluzione $\longrightarrow$ modi principali di vibrazione

$$\{x(t)\} = \sum_{i=1}^n \{\psi^i\} C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad n = \text{gradi di libertà}$$

$\uparrow$
 forma modale

Le C_i e φ_i $\longrightarrow$ condizioni iniziali

$$x_1(0) = x_{01} \quad x_m(0) = x_{0m}$$

$$\dot{x}_1(0) = v_{01} \quad \dot{x}_m(0) = v_{0m}$$

C_i e φ_i sono indipendenti quindi la soluzione della * deve essere soddisfatta con riferimento al termine iesimo per $n-1$ $C_j = 0$

$$\{x(t)\} = \{\psi^i\} C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

$$\{\dot{x}(t)\} = \omega_i \{\psi^i\} C_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

$$\{\ddot{x}(t)\} = -\omega_i^2 \{\psi^i\} C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

Le sostituiamo in *

$$-\omega_i^2 [M] \{\psi^i\} C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) + [K] \{\psi^i\} C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) = \{0\}$$

$$-\omega_i^2 [M] \{\psi^i\} + [K] \{\psi^i\} = \{0\} \quad \text{vale per qualunque } C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

$$(-\omega_i^2 [M] + [K]) \{\psi^i\} = \{0\} \quad \text{incognite}$$

Sistema $n \times n$ omogeneo, soluzioni non banali si hanno:

$$\det |-\omega_i^2 [M] + [K]| = 0$$

equazione
caratteristica
(biquadratica)
 $\alpha \omega^4 + \beta \omega^2 + \gamma = 0$

Ricaviamo n valori di ω_i^2 (autovalori)

$$\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$$

$$T_1 \geq T_2 \geq \dots \geq T_n$$

Più piccolo è la
pulsazione fondamentale

Note le ω_i $\xrightarrow[\text{autovettori}]{\text{forme modali}}$ $\{\psi^i\}$

$$\{x(t)\} = \{\psi^i\} C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad \text{iesimo modo di vibrare}$$

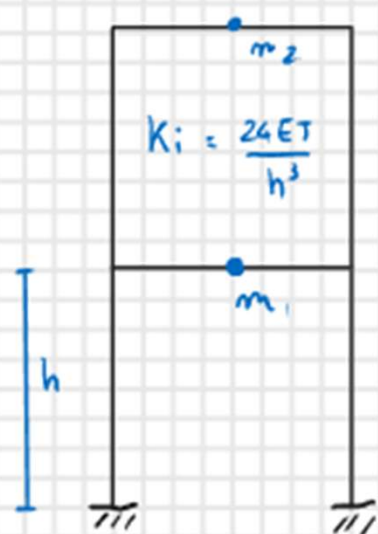
Particolare vibrazione

$$x_1(t) = \psi_1^i C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

$$x_2(t) = \psi_2^i C_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$

- masse oscillano in modo armonico
- sistema sincrono = stessa pulsazione ω_i
- le masse passano per punti di equilibrio allo stesso istante

Esempio



Dati: $k_1 = k_2 = k$
 $m_1 = 2m_2 = 2m$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$[M] \qquad [K]$

$$\downarrow$$

$$(-\omega_i^2 [M] + [K]) \{\psi^i\} = \{0\}$$

$$\left(-\omega_i^2 \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \right) \{\psi^i\} = \{0\} \rightarrow \begin{bmatrix} -\omega_i^2 2m + 2k & -k \\ -k & -\omega_i^2 m + k \end{bmatrix} \{\psi^i\} = \{0\}$$

Equazione caratteristica

$$\det \begin{vmatrix} -\omega_i^2 m + 2k & -k \\ -k & -\omega_i^2 m + k \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow 2\omega_i^4 m^2 - 4\omega_i^2 m k + k^2 = 0$$

Soluzioni: $\omega_1^2 = \frac{k}{m} \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ $\omega_2^2 = \frac{k}{m} \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

↓ forme modali
(autovettori)

1) $\omega_1^2 = \frac{k}{m} \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ lo sostituiamo nel sistema

$$\begin{cases} (-\omega_1^2 m + 2k) \psi_1^1 - k \psi_2^1 = 0 \\ -k \psi_1^1 + (-\omega_1^2 m + k) \psi_2^1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \psi_1^1 = \frac{\psi_2^1}{\sqrt{2}} \longrightarrow \{\psi^1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

1° modo di vibrare

2) $\omega_2^2 = \frac{k}{m} \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ lo sostituiamo nel sistema

$$\begin{cases} (-\omega_2^2 m + 2k) \psi_1^2 - k \psi_2^2 = 0 \\ -k \psi_1^2 + (-\omega_2^2 m + k) \psi_2^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \psi_1^2 = \frac{\psi_2^2}{-\sqrt{2}} \longrightarrow \{\psi^2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

2° modo di vibrare

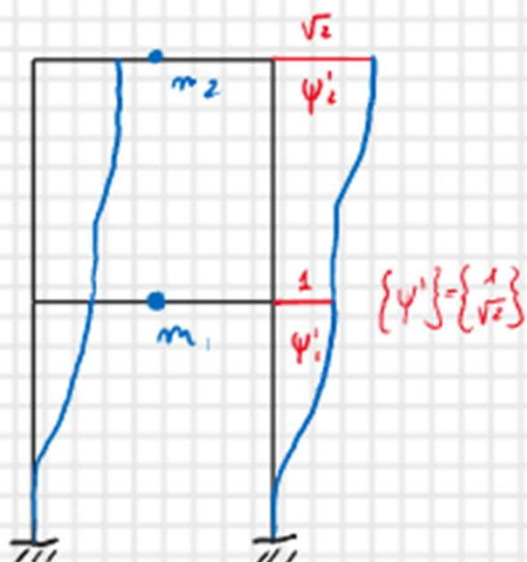
Soluzione

$$\{x(t)\} = \{\psi^1\} C_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \{\psi^2\} C_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

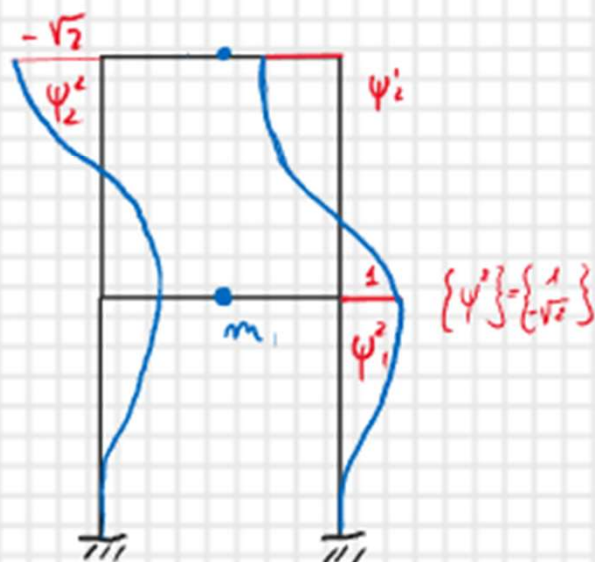
1° modo di vibrare

2° modo di vibrare

1° modo di vibrare ω_1

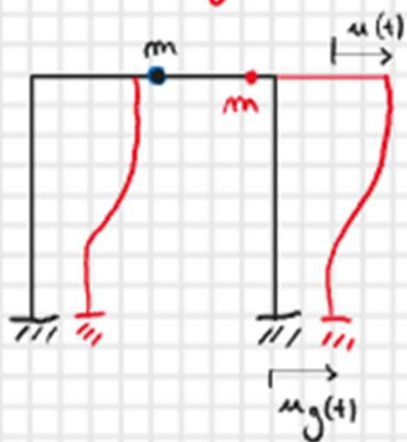


2° modo di vibrare ω_2



Spettri di risposta

Sistema a grado di libertà



$$u_{tot}(t) = u_g(t) + u(t)$$

Forze elastiche $F_e(t) = k u(t)$

Forze viscose $F_v(t) = c \dot{u}(t)$

Forze d'inerzia $F_i(t) = m \ddot{u}_{tot}(t)$

$$u_{tot}(t)$$

Il sistema ad un grado di libertà è definito da:

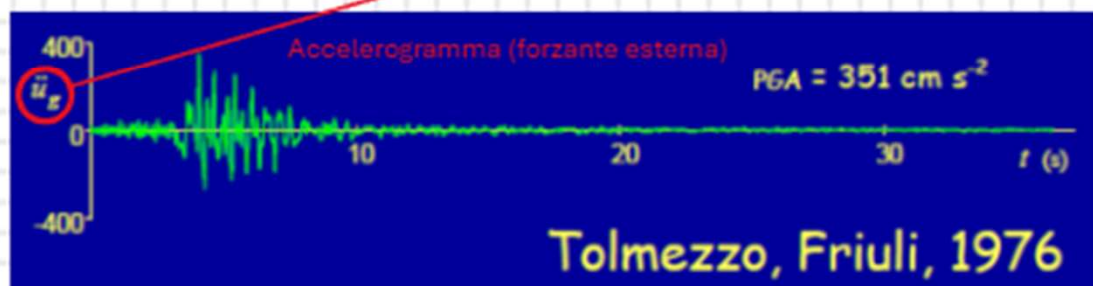
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad c$$

Equazione del moto

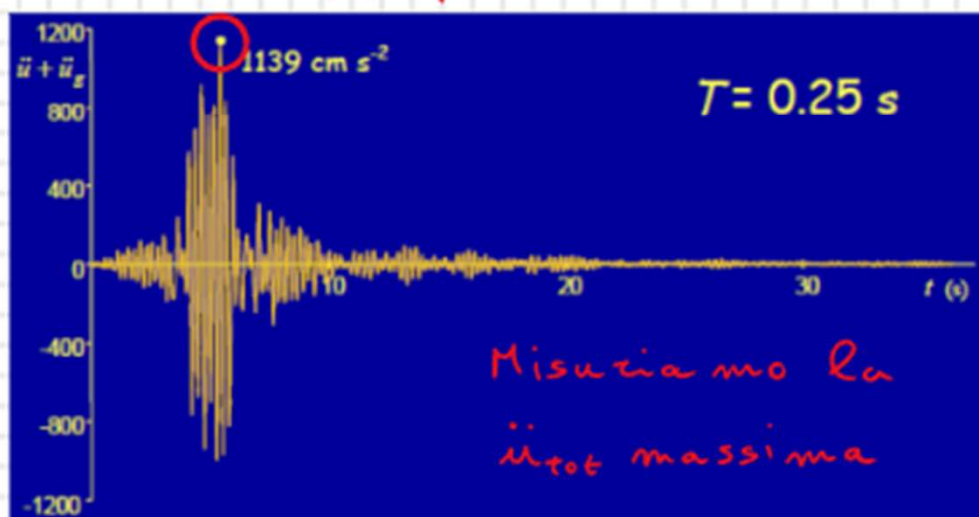
$$m \ddot{u}_{tot}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = 0 \rightarrow u_{tot}(t) = u_g(t) + u(t)$$

Sistema (1) $m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = -m \ddot{u}_g(t) = F(t)$

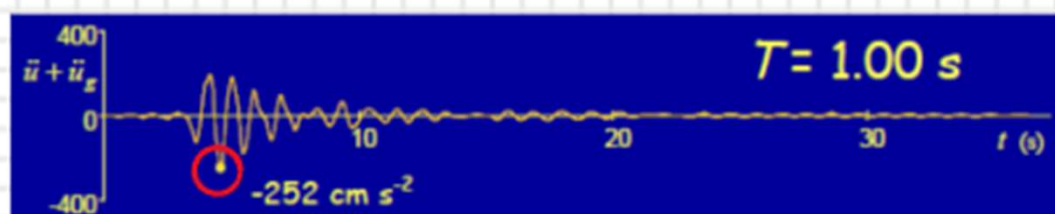
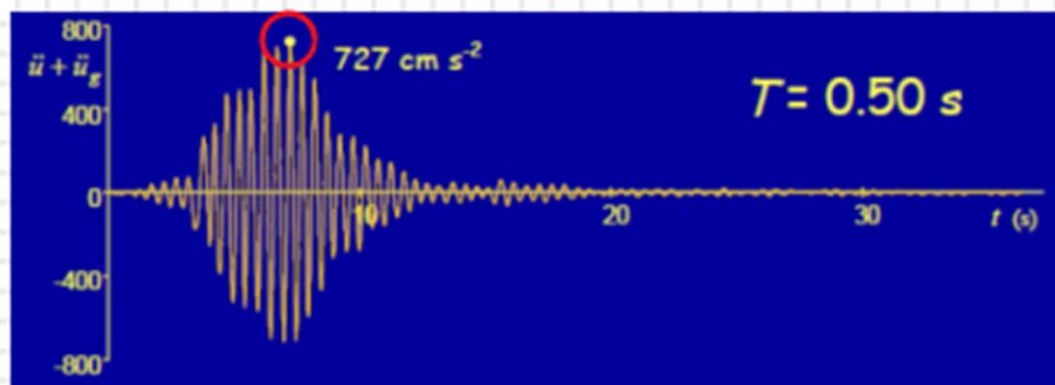
Presentazione prof. Sheesi:



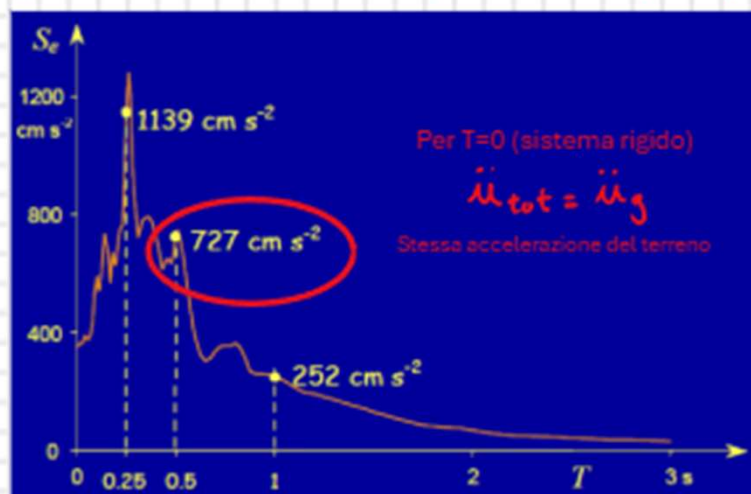
Risolvia la (1) fissando T



Variamo il periodo proprio T e risolviamo la (1)



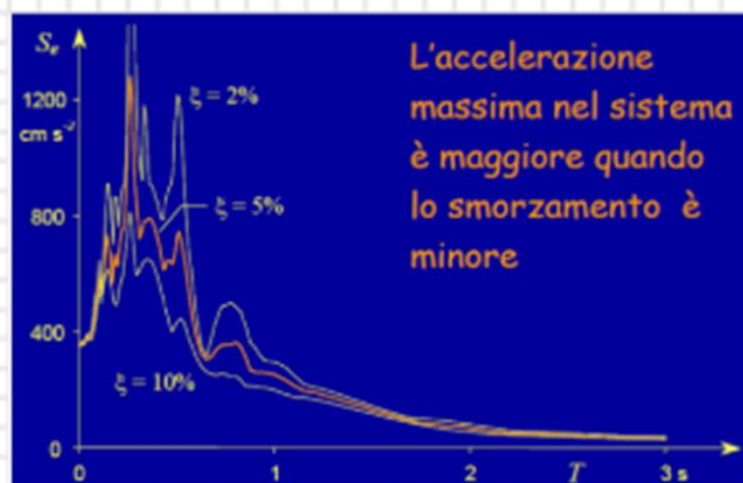
Riporto i valori di $\ddot{u}_{tot}$ massimi in un grafico in funzione del periodo proprio T



Risposta di un sistema ad 1 grado di libertà per un singolo sisma

"Tolmezzo 1976"

Lo spettro che si ottiene è uno spettro elastico (materiale elastico lineare)



L'accelerazione massima nel sistema è maggiore quando lo smorzamento è minore

Gli spettri elastici sono ricavati per uno smorzamento del 5%, altrimenti si introduce un fattore di riduzione

$$\eta = \sqrt{\frac{10}{5 - \xi}}$$

Esempio utilizzo dello spettro



$$m = 4000 \text{ t}$$

$$K = 630 \frac{\text{KN}}{\text{mm}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = 0,5 \text{ sec}$$

Per $T = 0,5 \text{ sec}$, leggo nello spettro
l'accelerazione massima

$$\ddot{u}_{\text{tot max}} = 7,27 \text{ m/s}^2$$

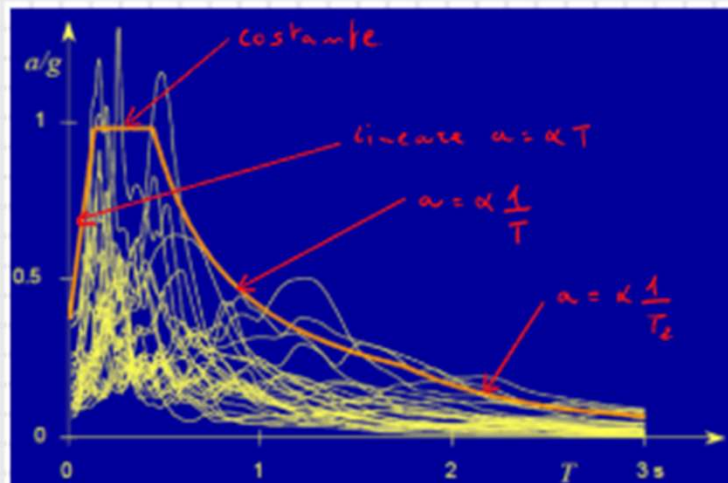
Possiamo calcolare $F_{\text{max}} = m \ddot{u}_{\text{tot max}}$

$$F_{\text{max}} = 4000.000 \cdot 7,27 = 29000 \text{ KN}$$

↓
Caratteristiche di sollecitazione

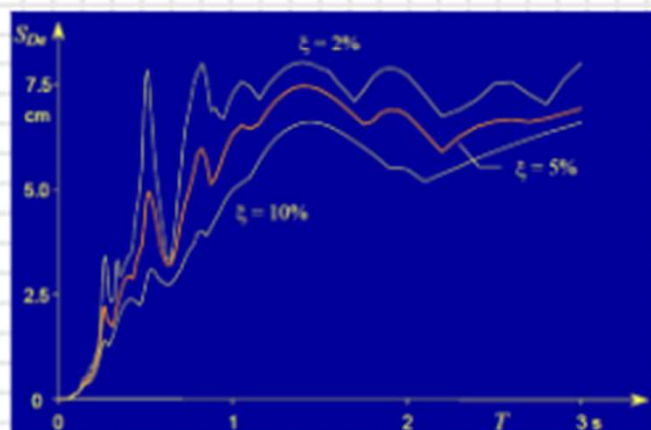
- Modifichiamo l'accelerogramma iniziale (sisma diverso) e ripetiamo i passi precedenti
- Si avranno tanti spettri quanti sono gli accelerogrammi considerati

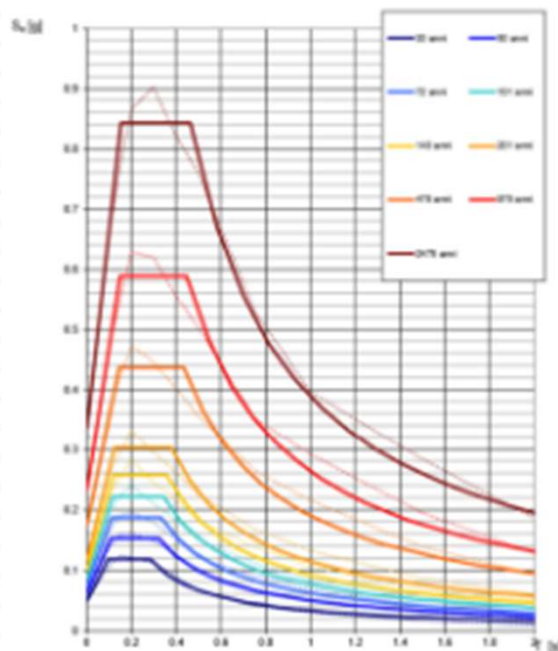
Infine inviluppo tutti gli spettri ottenuti (linea arancione)



Si ottengono dalle NTC 2018
Eurocodice 8

Posso avere spettri in funzione dello
spostamento o della velocità relativi

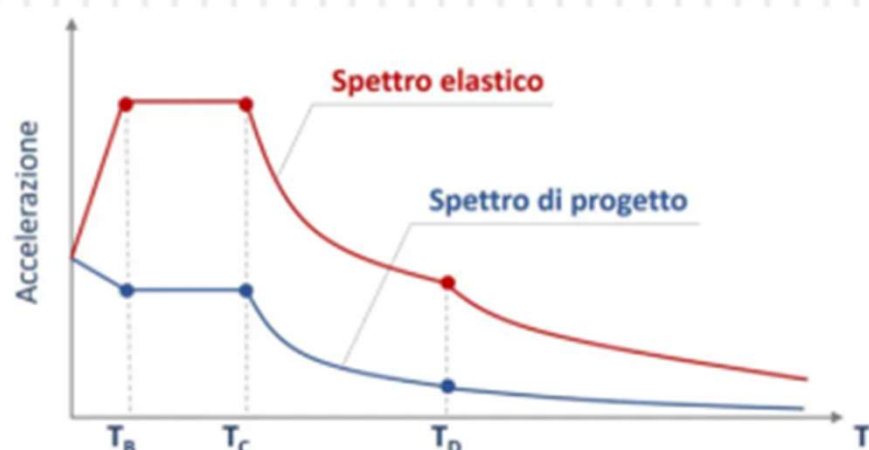




Spettri di risposta elastici per diversi valori del tempo di ritorno

Dagli spettri elastici a quelli di progetto

Si tiene conto della duttilità strutturale dividendo gli spettri elastici per un fattore di duttilità della struttura q (plasticizzazioni)



$$S_d(T) = \frac{S_e(T)}{q}$$

$q=1$ elastico
 $q=2 \div 6$ duttilità