23 Settembre

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $T > 0$, e suppongo

$$x \in X \iff x + nT \in X \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Allora una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo T se

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in X.$$

Osservazioni

1) Esempio $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono periodiche di periodo 2π.

2) Notare che se f è periodica di periodo T, è anche periodica di periodo $2T$

$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) \quad \forall x \in X$$

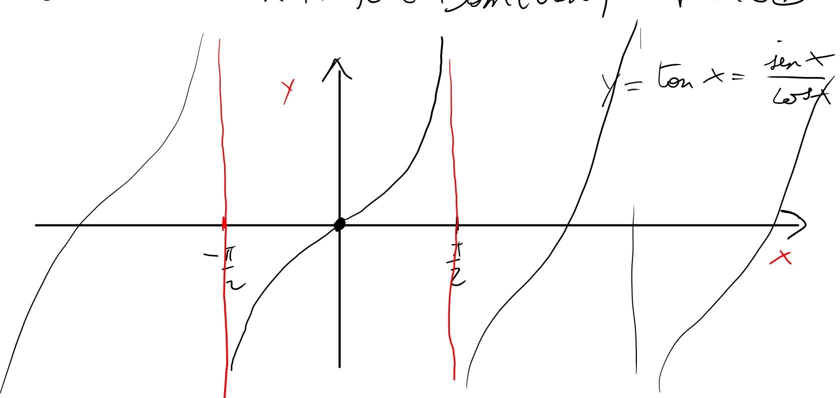
3) Le funzioni costanti $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

4) $\tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ definita solo dove $\cos(x) \neq 0$.

Sappiamo che $\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Notare che se $x \in \mathrm{Dom}(\tan)$ allora $x + n\pi \in \mathrm{Dom}(\tan) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$



Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ t.c.

$$x \in X \iff -x \in X.$$

Diremo che una $f: X \to \mathbb{R}$ è pari se

$$f(x) = f(-x) \qquad \forall x \in X$$

Diremo che una $f: X \to \mathbb{R}$ è dispari se

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in X.$$

Esempi $\quad f(x) = x^m \qquad m \in \mathbb{N}$

risulta che quando $\boxed{m \text{ è pari}}$, $m = 2k$

allora $f(-x) = (-x)^m = (-x)^{2k} = \left((-x)^2\right)^k =$

$= \left(x^2\right)^k = x^{2k} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$f(x)$ è una funzione pari

$f(x) = x^m$ se $\boxed{m \text{ è dispari}}$, $m = 2k+1$

$f(-x) = (-x)^m = (-x)^{2k+1} = (-x)^{2k}(-x)^1$

$= x^{2k}(-x) = -x^{2k} \cdot x = -x^{2k+1}$

$= -f(x)$

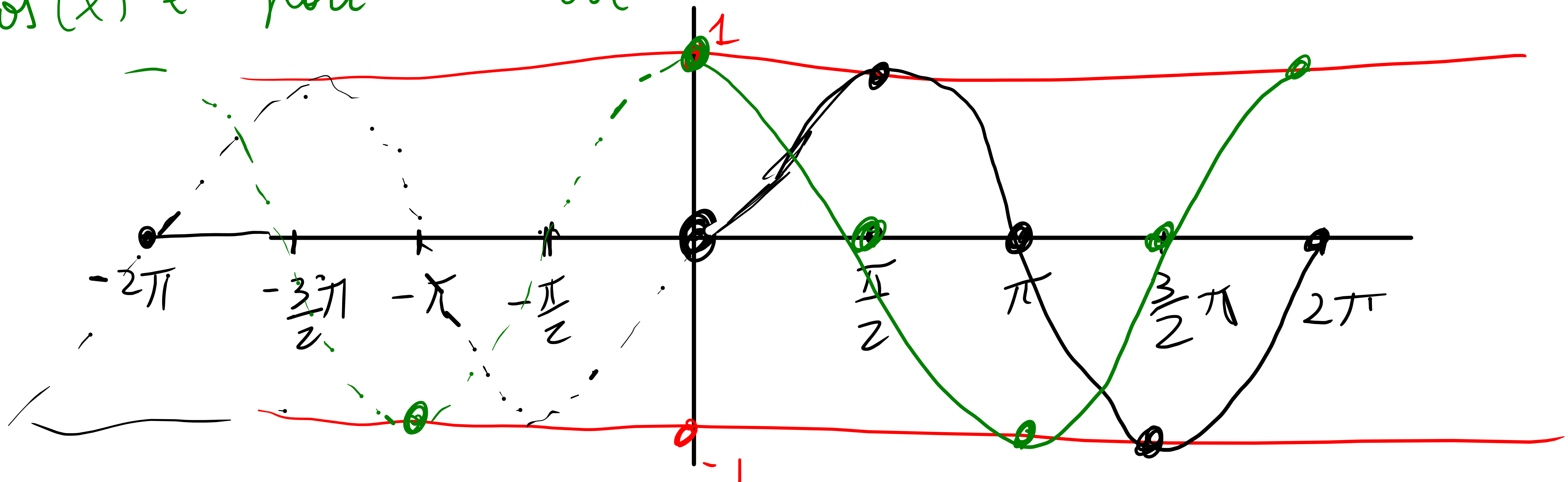
$f(x)$ è una funzione dispari

Altri esempi

- $\sin(x)$ è dispari

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$\cos(x)$ è pari $\qquad \cos(-x) = \cos(x) \ \forall\, x \in \mathbb{R}$



$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + \sin x \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}$$

$$= \sin x$$

Esercizio Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T > 0$ e non costante.

Allora $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ non esiste.

Def (Successione)

Una funzione $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice successione di numeri reali.

Di solito una successione viene scritta nella forma $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dove

x_n è il valore della funzione $n \longrightarrow x_n$.

Esempi 1) $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\} = \{n\}_{n\in\mathbb{N}}$
$= \{n\}$

2) $\{1\} = \{1, 1, 1, \ldots, 1\}$

3) $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$

Ha senso dato $\{x_n\}$ considerare

$\lim_{n\to+\infty} x_n$ $\qquad \{c\}$

$\lim_{n\to+\infty} c = c$ $\qquad x_n = c \quad \forall n$

Si tratta di dimostrare che

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon \ \text{t.c.} \ n > M_\varepsilon \Rightarrow |x_n - c| < \varepsilon}$$

Qui $x_n = c \ \forall n$ quindi

$|x_n - c| = |0| < \varepsilon$ $\qquad \forall n \in \mathbb{N}$
e $\forall \varepsilon > 0$

qui $M_\varepsilon = 0$

$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n =$

$(-1)^n = (-1)^{n+2}$ $\qquad \forall n \in \mathbb{Z}$
è periodica di periodo 2.

Esercizi

1) Date $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

a) Se sono entrambe pari allora il prodotto $f(x) \cdot g(x)$ è pari

Decidere il caso in cui sono entrambi dispari oppure se uno è pari e l'altro è dispari

b) Stessa domanda prendendo $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

2) Dimostrare che se $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ e $|L_1 - L_2| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$, allora $L_1 = L_2$

3) Dimostrare che se date L_1, L_2 si ha $|L_1 - L_2| \leq 10\,\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ allora

si ha anche

$|L_1 - L_2| \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.

$(<)$

Dimostrare che la frase $f : X \to \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon$ t.c. $x > M_\varepsilon$ e $x \in \cancel{X} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

è equivalente, per un $A \subseteq \mathbb{R}_+$ con $\inf A = 0$

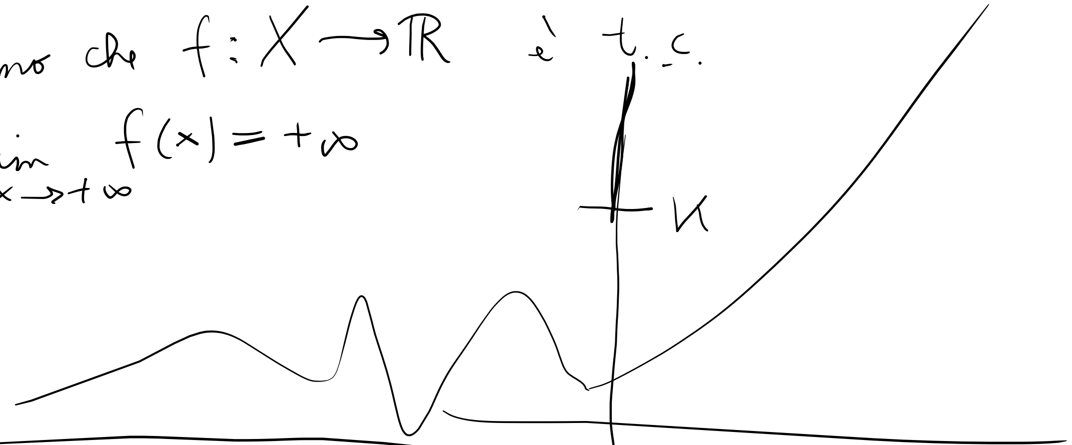
a

$\forall \varepsilon \in A \ \exists M_\varepsilon$ t.c. $x > M_\varepsilon$ e $x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ con $\sup X = +\infty$

Diremo che $f : X \to \mathbb{R}$ è t.c.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



Se

$$\forall K > 0 \quad \exists M_K \quad \text{t.c.} \quad x > M_K \text{ e } x \in X \Rightarrow f(x) > K$$

Verifichiamo che $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$

$$\forall K > 0 \ \exists M_K \ \text{t.c.} \quad n > M_K \Rightarrow n > K$$

Se qui scelgo $M_K = K$

$$n > K \Rightarrow n > K$$

$$\lim_{n \to +\infty} n^{\frac{1}{3}} = +\infty$$

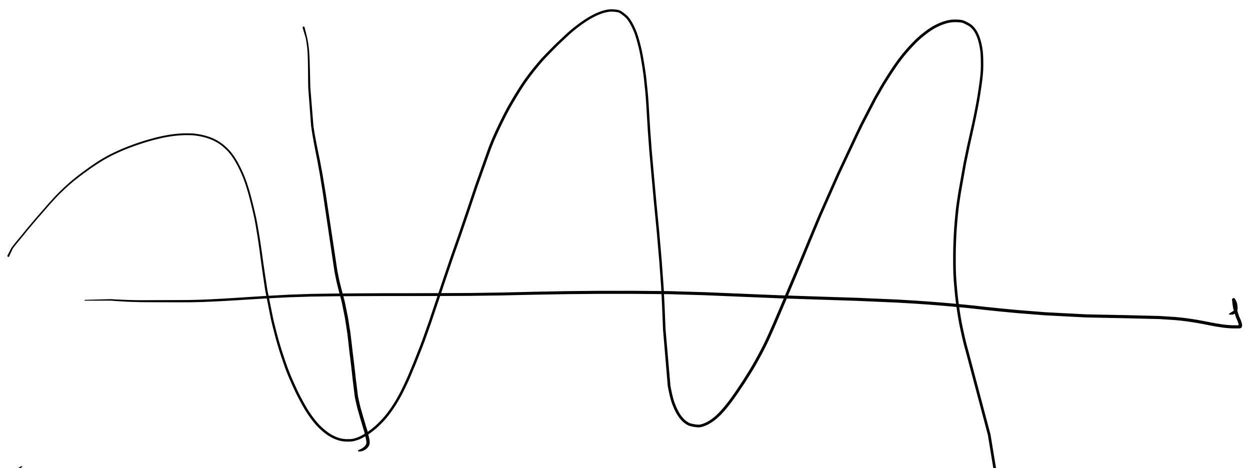
$$\forall K > 0 \ \exists M_K \ \text{t.c.} \quad n > M_K \Rightarrow n^{\frac{1}{3}} > K$$

$M_K = 3K$ $\qquad n > 3K \stackrel{?}{\Rightarrow} n^{\frac{1}{3}} > K$ è falso

$$n^{\frac{1}{3}} > K \iff n > K^3 = M_K$$

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $\sup X = +\infty$ e sia

$f: X \to \mathbb{R}$. Diremo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



$$* \left(\forall K \ \exists M_K \text{ t.c. } x > M_K \text{ e } x \in X \Rightarrow f(x) < -K \right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$$

$K > 0$

$$-x^3 < -K \iff x^3 > K$$

$$\iff x > \sqrt[3]{K}$$

Vale $*$ per $M_K = \sqrt[3]{K}$

Teor (Unicità del limite)

Sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \sup X = +\infty$.

Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L_2$

allora $L_1 = L_2$.

Dim (solo nel caso L_1, L_2 sono finiti)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L_1$ significa che

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon^{(1)} \text{ t.c. } x > M_\varepsilon^{(1)} \text{ e } x \in X \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon} \quad (1)$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L_2$ significa che

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon^{(2)} \text{ t.c. } x > M_\varepsilon^{(2)} \text{ e } x \in X \Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon} \quad (2)$$

Voglio dimostrare che $L_1 = L_2$.

Osserviamo che $\forall x \in X$

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \le$$
$$\le |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2|$$
$$= |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$$

Scelto $\varepsilon > 0$ arbitrario pongo

$$M_\varepsilon = \max\{M_\varepsilon^{(1)}, M_\varepsilon^{(2)}\}$$

Allora per $x > M_\varepsilon$ e $x \in X$ $\Rightarrow x > M_\varepsilon^{(1)}$ e $x \in X$

$\Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon$

$x > M_\varepsilon$ e $x \in X$ $\Rightarrow x > M_\varepsilon^{(2)}$ e $x \in X$

$\Rightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon$

Ritornando alla precedente disug., per ogni $\varepsilon > 0$ e per $x > M_\varepsilon$ e $x \in X$ si ha

$$|L_1 - L_2| \le \underbrace{|f(x) - L_1|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f(x) - L_2|}_{<\varepsilon}$$
$$< 2\varepsilon$$

Abbiamo appena dimostrato che $\forall \varepsilon > 0$ si ha

$$|L_1 - L_2| < 2\varepsilon$$

Questo implica che

$$|L_1 - L_2| < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Ma questo implica $L_1 = L_2$ $\quad \square$